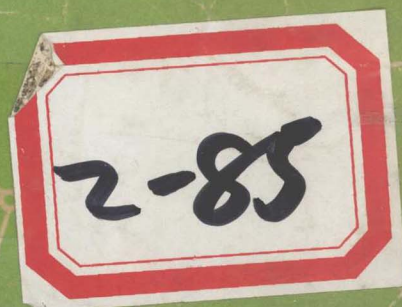
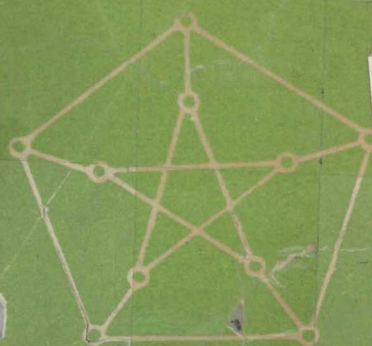


J · A · Bondy and R · Murty

图论及其应用

习题解答

张克民 林国宁 张忠辅 编解



甘 肃 省 数 学 会

一九八二年十月

0157-6-44
<1>

721565

前 言

J. A. Bondy 和 U. S. R. Murty 所著的《Graph theory with applications》(图论及其应用)是一本较好的图论入门书。图论的习题在该学科中有它特殊的地位。该书的每节后面附了大量的习题,这些习题不但是书中内容的补充,也是启发、诱导初学图论者学习掌握图论思维方法的重要组成部份。因此我们将这些习题一一解出,供教学和初学图论者参考。

本题解是我们在学习和教学过程中逐步完成的。我们发现书中个别题目所给出的条件或不充分,或不必要,或是错的,对此我们在该题后面都加了注。一道题的解法可能不只一种,一般情况下,我们仅选择一种。主观上,我们希望所选择的解(证)法简单、图论意义比较清晰的方法。但由于我们的水平有限,证明中的错误或是解法不够精炼或算法不合适等问题必然存在,恳切地希望同志们发现不妥之处后给予指教,以便日后订正。

在编解过程中,我们得到许多同志的帮助。特别要感谢的是新疆大学张福基、华中师范学院毛经中、兰州师专 谢继国、西北师范学院 姚兵、刘信生及程为麟、彭祖良等同志。此外,我们还要感谢兰州铁道学院印刷厂的同志,在他们的大力协助下本书才能很快与读者见面。

南京 大学 张克民
编 者 兰州 大学 林国宁 谨识
兰州铁道学院 张忠辅

1982年



目 录

第一章 图与子图

1.1. 图与单图	(1)
1.2. 图的同构	(2)
1.3. 邻接矩阵和关联矩阵	(7)
1.4. 子图	(8)
1.5. 顶点的度	(9)
1.6. 路和连通性	(12)
1.7. 圈(或回)	(16)
应用	
1.8. 最短路问题	(18)
1.9. Sperner 引理	(22)

第二章 树

2.1. 树	(26)
2.2. 割边和接合(键)	(29)
2.3. 割点	(33)
2.4. Cayley 公式	(34)
应用	
2.5. 连接问题	(38)

第三章 连通性

3.1. 连通性	(41)
块	(43)
用	
可靠通讯网络的构造	(47)

Euler 游历和 Hamilton 圈

Euler 游历	(49)
Hamilton 圈	(51)
用	
中国邮递员问题	(62)
旅行售货员(货郎担)问题	(64)

匹配

匹配	(65)
二部图的匹配和覆盖	(67)

5.3. 完美匹配	(70)
应用	
5.4. 人员工作分配问题	(75)
5.5. 最优分配问题	(76)

第六章 边着色

6.1. 边色数	(79)
6.2. Vizing 定理	(81)
应用	
6.3. 时间表问题	(86)

第七章 独立集和团

7.1. 独立集	(87)
7.2. Ramsey 定理	(89)
7.3. Turán 定理	(93)
应用	
7.4. Schur 定理	(97)
7.5. 一个几何问题	(98)

第八章 顶点着色

8.1. 色数	(100)
8.2. Brooks 定理	(104)
8.3. Hajo's 猜测	(104)
8.4. 色多项式	(106)
8.5. 围长和色数	(110)
应用	
8.6. 存储问题	(111)

第九章 平面图

9.1. 平面图和可平面图	(112)
9.2. 对偶图	(114)
9.3. Euler 公式	(116)
9.4. 桥	(119)
9.5. Kuratowski 定理	(120)
9.6. 5 — 色定理和 4 — 色猜测	(121)
9.7. 非 Hamilton 型平面图	(125)
应用	
9.8. 平面性算法	(126)

第十章 有向图

10.1. 有向图	(128)
-----------	-------

(107)	10.2.	有向路	(130)
	10.3.	有向圈	(132)
(127)		应 用	
(107)	10.4.	工作排序问题	(134)
	10.5.	高效率计算机磁鼓的设计	(135)
(87)	10.6.	单向道路系统的构造	(135)
(18)	10.7.	比赛参加者的名次评定	(137)

第十一章 网 络

(80)	11.1.	流	(140)
	11.2.	截	(142)
(87)	11.3.	最大流最小截定理	(143)
(80)		应 用	
(80)	11.4.	Menger 定理	(147)
	11.5.	可行流	(149)

第十二章 圈空间和键空间

(80)	12.1.	环流和势差	(155)
	12.2.	生成树的数目	(157)
(100)		应 用	
(101)	12.3.	完美正方形	(160)

勘 误

个别本有如下误:

P_7 两图位置放错了, 且 G_1 有平放的。

P_{120} 上角图倒了。

“图论及其应用”题解

第一章 图与子图

1.1. 图与单图

定义：图 G 是有序三元组 $(V(G), E(G), \phi_G)$ 构成，其中 $V(G)$ 是顶点的非空集合， $E(G)$ 是和 $V(G)$ 不相交的边集合， ϕ_G 则是连系着 G 中的边和一时无序顶点（可以相同）之间的关联函数。若 e 是 G 中的一条边，而 u 和 v 是 G 中的顶点，满足 $\phi_G(e) = uv$ 则称 e 是连接 u 和 v 的， u 及 v 和 e 相关联，顶点 u 和 v 称为 e 的端点。

定义：可平面图。图 G 若存在一个平面图形，它们的边仅相交于端点，则称 G 为可平面图。反之称为不可平面图。

定义：和一条公共边相关联的两顶点称为相邻，和一个公共顶点相关联的两边称为边相邻。

定义：具有同一端点的边称为环，不同端点的边则称为杆。

定义：单图。若 G 是一个无环，且不存在两个顶点连接二条杆的图，则称 G 为单图。

定义： $v(G)$ ，简记 v ，表示图 G 的顶点数； $\varepsilon(G)$ ，简记 ε ，表示图 G 的边数。

1.1.1. 从日常生活中列举五个例子，在这些例子中图的概念的导出是自然的。

解：

例1. 若 $V(G)$ 代表中国的城市集合， $E(G)$ 代表城市间的道路集合，若 e 是 u 城到 v 城的道路， ϕ_G 则代表 $\phi_G(e) = uv$ 这种关联函数全体，所成之图 G 是中国国内的交通图。类似地可定义国内的通讯网络图。

例2. 若 $V(G)$ 代表某镇居民的集合， $E(G)$ 代表 $V(G)$ 中人的亲属关系 e 的集合，若 u, v 两人之间有亲属关系 e ，则 ϕ_G 代表 $\phi_G(e) = uv$ 这种关联函数全体，所成之图 G 是某镇居民的亲属关系图。

例3. 若 $V(G)$ 代表中国象棋盘中的格子点， $E(G)$ 表示相邻两棋盘格所构成之矩形之对角线 e 的集合，设 u 和 v 之间存在 e ，则 ϕ_G 代表 $\phi_G(e) = uv$ 这种关联函数全体，所成之图 G 是中国象棋中“马”所能走的路线图。

例4. 设 $V(G)$ 代表乒乓球赛中全体成员， $E(G)$ 表示成员间比赛关系 e 的集合，若 u, v 成员间有比赛，记为 e ，则 ϕ_G 代表 $\phi_G(e) = uv$ 这种关联函数全体，所成之图 G 表示乒乓球赛中的比赛关系图。

例5. 若 $V(G)$ 代表图书馆内藏书的集合， ϕ_G 表示图书的分类关系，当两本书属于同一分类时，连以边，所成之边集合记为 $E(G)$ ，则 $(V(G), E(G), \phi_G)$ 所成之图是该

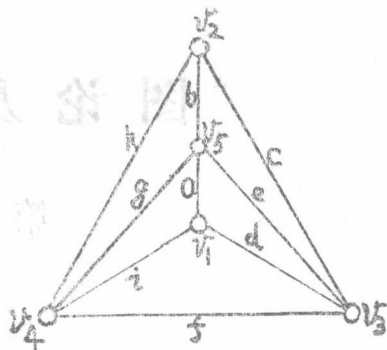
图书馆藏书分类图。

1.1.2. 将图 1.3 a 的图画成一个不同的图形以说明这图是可平面的图。

解：其图形如右。

1.1.3. 若 G 是单图，证明 $\varepsilon \leq \binom{v}{2}$ 。

证：因为 v 个顶点构成的完全图 K_v 的 $\varepsilon(K_v) = \binom{v}{2}$ 。另一方面对 v 个顶点的单图 G 显然有 $\varepsilon(G) \leq \varepsilon(K_v)$ 所以 $\varepsilon(G) \leq \binom{v}{2}$ 成立。



1.1.2. 图

1.2. 图的同构

定义：若图 $G = (V(G), E(G), \phi_G)$ 和 $H = (V(H), E(H), \phi_H)$ 之间满足 $V(G) = V(H)$, $E(G) = E(H)$ 和 $\phi_G = \phi_H$, 则称图 G 和 H 恒等，记为 $G = H$ 。

定义：若图 $G = (V(G), E(G), \phi_G)$ 和 $H = (V(H), E(H), \phi_H)$ 之间存在一个双方单值的映射偶 (θ, ϕ) , 满足 $\theta: V(G) \rightarrow V(H)$, 及 $\phi: E(G) \rightarrow E(H)$, 且 $\phi_G = uv \iff \phi_H(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$ 。则称图 G 和 H 同构。记为 $G \cong H$ 。

1.2.1 书中例 1 的图 G 和例 2 的图 H 间找寻一个异于已知的同构映射。

解：由同构定义，对应点的度保持不变，若 G, E 间存在另外一双方单值映射偶 (θ_1, ϕ_1) , 则 $\theta_1(v_1) = y, \theta_1(v_2) = x, \theta_1(v_3) = u$ 。同样由同构定义，两相邻顶点间的关联边数保持不变，从而我们有 $\theta_1(v_4) = v, \theta_1(v_5) = w$ 。所以 $\theta_1 \equiv \theta$ 。进而我们定义 ϕ_1 如下：除 $\phi_1(e_7) = f, \phi_1(e_8) = d$ 与 ϕ 不同外，其它与 ϕ 一样。 (θ_1, ϕ_1) 是异于 (θ, ϕ) 的一个双方单值映射偶。且易由同构定义验证，图 G 和 H 之间只有这两个相异的同构映射。

1.2.2 (a) 若 $G \cong H$, 则 $v(G) = v(H), \varepsilon(G) = \varepsilon(H)$ 。

(b) 给出一个例子说明 (a) 的逆不真。

证：(a) 由同构定义中的 θ 与 ϕ 都是一一对应映射，结论显然。

(b) 如下图中 G 和 H , 显然 $v(G) = 3 = v(H), \varepsilon(G) = 3 = \varepsilon(H)$, 但 G 和 H 不同构。

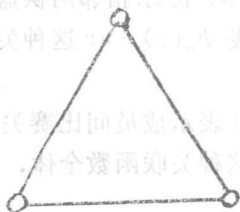


图 G

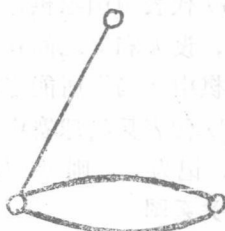
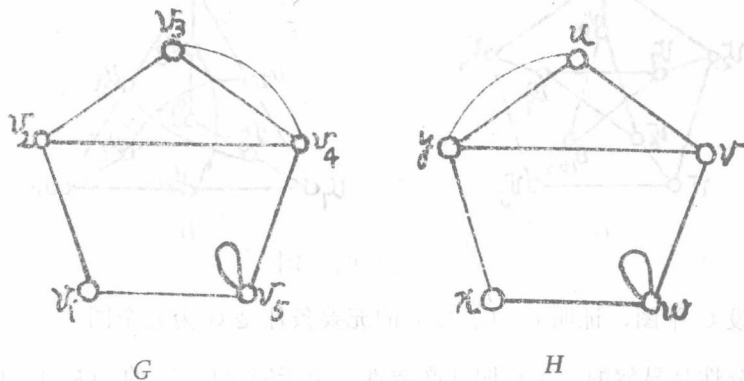


图 H

1.2.2.(b)图

1.2.3. 证明下面的图不同构。



1.2.3. 图

证：因为 H 的 x 的邻点度均为 4，而 G 中无这样的点，故 G 与 H 不同构。

1.2.4 证明有 11 个不同构的四个顶点的单图。

证：如右图， $\varepsilon=0$ ，在同构意义下仅一个图；

$\varepsilon=1$ ，在同构意义下仅一个图；

$\varepsilon=2$ ，在同构意义下仅二个图；

$\varepsilon=3$ ，在同构意义下仅三个图；

$\varepsilon=4$ ，在同构意义下仅二个图；

$\varepsilon=5$ ，在同构意义下仅一个图；

$\varepsilon=6$ ，在同构意义下仅一个图。

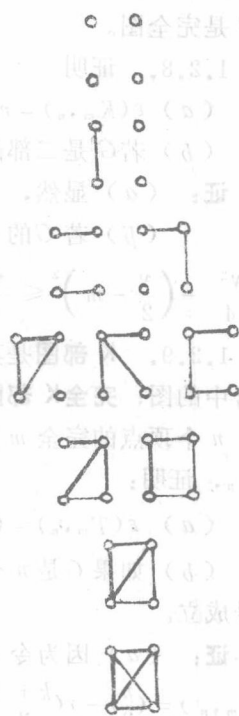
对四个顶点的单图 G ，由练习 1.1.3 知 $\varepsilon(G) \leq \binom{4}{2} = 6$ ，从而上面我们已穷举了四个顶点的一切可能的单图。其总数恰为 11 个。

1.2.5. 证明两个单图 G 和 H 同构的充要条件是存在双方单值映射 $\theta: V(G) \rightarrow V(H)$ ，使得 $uv \in E(G)$ 的充要条件是 $\theta(u)\theta(v) \in E(H)$ 。

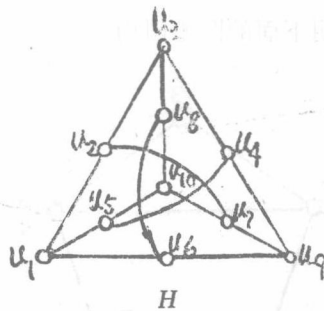
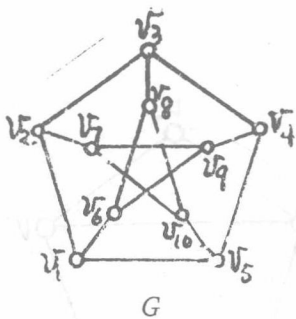
证：由同构的定义，必要性是显然的，下面我们证明其充分性，首先由 θ 定义 $\phi: E(G) \rightarrow E(H)$ ，如下： $uv \in E(G)$ 和 $\theta(u)\theta(v) \in E(H)$ 对应，由于 G 和 H 均是单图，从而 ϕ 是双方单值映射，且有 $\phi_c(e) = uv$ 的充要条件为 $\phi_H(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$ ，从而按定义 $G \cong H$ 。

1.2.6. 证明下面两图是同构的。

证：将下图图 G 和 H 顶点编号如图，令 $\theta: \theta(v_i) = u_i$ ($i=1, 2, \dots, 10$)，显然 θ 是在 $V(G) \rightarrow V(H)$ 上是双方单值映射，易直接验证 $v_i v_j \in E(G)$ 的充要条件是 $u_i u_j = \theta(v_i)\theta(v_j) \in E(H)$ ，从而由练习 1.2.5. 知， $G \cong H$ 。



1.2.4. 图



1.2.6. 图

1.2.7. 设 G 单图, 证明 $\varepsilon = \binom{v}{2}$ 成立的充要条件是 G 为完全图。

证: 其充分性是显然的, 现证明其必要性, 由于完全图 K_v 的 $\varepsilon(K_v) = \binom{v}{2}$, 从而不是完全图且又要满足 $\varepsilon = \binom{v}{2}$ 的图 G , 恒包含多重边或环, 但这又与 G 是单图的假定矛盾。故 G 是完全图。

1.2.8. 证明

(a) $\varepsilon(K_{m,n}) = mn$;

(b) 若 G 是二部的单图, 则 $\varepsilon \leq v^2/4$ 。

证: (a) 显然,

(b) 若 G 的一部份是 m 个顶点。则 $\varepsilon(G) \leq \varepsilon(K_{v-m,m}) = (v-m) \cdot m = vm - m^2$

$$= \frac{v^2}{4} - \left(\frac{v}{2} - m\right)^2 \leq \frac{v^2}{4}.$$

1.2.9. K 部图是其顶点集合能划分成 K 个子集合, 且没有一条边其两端点都在同一集合中的图; 完全 K 部图是一个 K 部单图, 且它的不在同一子集中的每对顶点均存在边相连。 n 个顶点的完全 m 部图, 若其中每一部分为 $\lfloor n/m \rfloor$ 个或为 $\lceil n/m \rceil$ 个顶点时, 记为 $T_{m,n}$, 证明:

(a) $\varepsilon(T_{m,n}) = \binom{n-k}{2} + (m-1) \binom{k+1}{2}$, 其中 $k = \lfloor n/m \rfloor$;

(b) 如果 G 是 n 个顶点的完全 m 部图, 则 $\varepsilon(G) \leq \varepsilon(T_{m,n})$, 且只有在 $G \cong T_{m,n}$ 时等号成立。

证: (a) 因为令 $n = mk + r$, $0 \leq r < m$ 时, 则由 $T_{m,n}$ 定义有

$\varepsilon(T_{m,n}) = \binom{n}{2} - r \binom{k+1}{2} - (m-r) \binom{k}{2}$ 。用 $r = n - mk$ 代入化简整理即得结论。

(b) 设完全 m 部图 G 的 m 个部分的顶点数分别为: $n_1, n_2, \dots, n_m$, 若 G 不同构 $T_{m,n}$, 则恒存在 $n_i - n_j > 1$, 考虑如下的完全 m 部图 G' , 它的 m 部分的顶点分别为: $n_1, n_2, \dots, n_i - 1, \dots, n_j + 1, \dots, n_m$ 。由于 $\varepsilon(G) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (n - n_k) n_k$,

$$\varepsilon(G') = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (n - n_k) n_k + \frac{1}{2} (n - n_i + 1)(n_i - 1) + \frac{1}{2} (n - n_j - 1)(n_j + 1) = \varepsilon(G) + (n_i - n_j) - 1 > \varepsilon(G).$$

若 $G' \cong T_{m,n}$ 则 (b) 结论已成立, 若 G' 不同构 $T_{m,n}$, 则上述过程可继

续进行,直到对一切 $i, j, |n_i - n_j| \leq 1$ 为止,这时所得的图恰为 $T_{m,n}$,注意到在这过程中产生的新图的边数在逐渐增大,直至 $\varepsilon(T_{m,n})$ 为止,故 (b) 成立。

1.2.10. K -方体图是其顶点为 0 与 1 的有序 K 元组,当且仅当它们的一个坐标不同时,此两个顶点相连接。(图1.4.(b),恰好是 3-方体图)。证明: K -方体图有 2^K 个顶点, $K2^{K-1}$ 条边,且是两部图。

证:按定义 K -方体图中顶点与分量取值 0 和 1 的 K 维向量一一对应。而后者恰为 2^K 个,从而 K -方体图有 2^K 个顶点。另外在这 K 维向量中,固定 $K-1$ 个坐标后,恰恰在 K -方体中,对应两个点,且这两点按定义应连以一条边,于是显然 K -方体有 $C_K^{K-1} 2^{K-1} = K2^{K-1}$ 条边,最后我们按每个顶点的坐标和的奇偶性,将 K -方体图的顶点分成两部分,显然按 K -方体图边的定义,每一部分中的顶点相互没有边相连。故 K -方体图是二部图。

1.2.11. (a) 单图 G 的补图 G^c 是顶点集为 $V(G)$ 的单图,两个顶点在 G^c 中相邻的充要条件是它们在 G 中不相邻。问 $K_n^c, K_{m,n}^c$ 是怎样的图?

(b) 如果单图 G 满足 $G \cong G^c$, 则称为自补的,证明若 G 是自补的,则 $v(G) \equiv 0$ 或 $1 \pmod{4}$

证: (a) K_n^c 为 n 个顶点的空图。 $K_{m,n}^c$ 则为 K_m 和 K_n 的并。

(b) 由 G^c 定义,我们有 $\varepsilon(G) + \varepsilon(G^c) = \varepsilon(K_v) = \binom{v}{2} = \frac{1}{2}v(v-1)$, 由于

$G \cong G^c$, 从而 $\varepsilon(G) = \varepsilon(G^c)$, 所以 $\varepsilon(G) = \frac{1}{4}v(v-1)$, 恒为整数,又因为 $v, v-1$ 间恒有一为奇数,从而只能 $v \equiv 0, 1 \pmod{4}$ 。

1.2.12. 图的自同构是图到自身的一个同构。

(a) 用练习1.2.5.证明单图 G 的自同构可以看成是在 $V(G)$ 上保持相邻性的一个置换,并证明这种置换的集合在通常置换的乘法运算下构成群 $\Gamma(G)$ (G 的自同构群)。

(b) 求 $\Gamma(K_n)$ 和 $\Gamma(K_{m,n})$ 。

(c) 求一个自同构群为唯一么元的非平凡单图。

(d) 证明对于任意单图 G 恒有 $\Gamma(G) = \Gamma(G^c)$ 。

(e) 考虑元素为 (1) (2) (3), (1, 2, 3) 和 (1, 3, 2) 构成的置换群 A 。证明不存在顶点集为 $\{1, 2, 3\}$ 的单图 G 使得 $\Gamma(G) = A$ 。

(f) 求一个单图使得 $\Gamma(G) \cong A$ 。(R. Frucht. 1939年已证明,每一个抽象群都同构于某些图的自同构群)。

证: (a) 将练习1.2.5 中的 H 换成 G , 于是由练习1.2.5. (a) 的前半部分的结论是显然的。再应用练习1.2.5.的结论,易证 G 的两自同构对应的置换的乘积,仍为 G 上的自同构所对应的置换, G 的自同构对应的置换的逆置换,仍为 G 上的自同构所对应的置换,从而由子群的定义和性质, G 上自同构所对应的置换所成的集合,在通常的置换乘法运算下构成群 $\Gamma(G)$ 。

(b) $\Gamma(K_n) = S_n$ (n 阶对称群); $\Gamma(K_{m,n}) = S_m + S_n$ 。

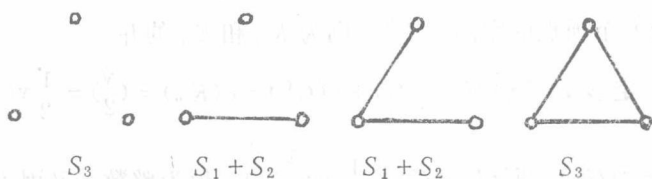
(c)



1.2.12 (c) 图

(d) 由练习1.2.5.知, 若 θ 是 G 上的自同构对应的置换, 即 $\theta: V(G) \rightarrow V(G)$, 使得 $uv \in E(G)$ 的充要条件是 $\theta(u)\theta(v) \in E(G)$ 。我们也可以叙述成 $\theta: V(G) \rightarrow V(G)$, 使得 $uv \notin E(G)$ 的充要条件是 $\theta(u)\theta(v) \notin E(G)$ 。我们再将它在 G^c 上来叙述, 于是有 $\theta: V(G^c) \rightarrow V(G^c)$ 使得 $uv \in E(G^c)$ 的充要条件是 $\theta(u)\theta(v) \in E(G^c)$ 。从而 θ 亦是 G^c 上的自同构。类似地可证 G^c 上的自同构同样也是 G 上的自同构, 所以 $\Gamma(G) = \Gamma(G^c)$ 。

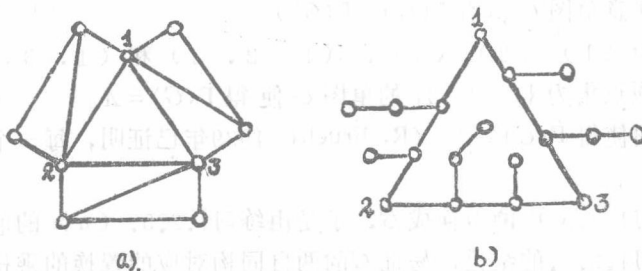
(e) 用穷举来加以证明。对顶点集为 $\{1, 2, 3\}$ 的单图 G 一共仅有四个, 它们及所对应的自同构群如下:



1.2.12 (e) 图

都与 A 不同, 从而结论成立。

(f) 下列两图均可直接验证 $\Gamma(G) = A$ 。可以证明图 (a) 是满足 $\Gamma(G) = A$ 的顶点数最小的单图。证明见 F. Harary and E. M. Palmer, Czech. Math. J. 16 (1966), 70 ~ 71。



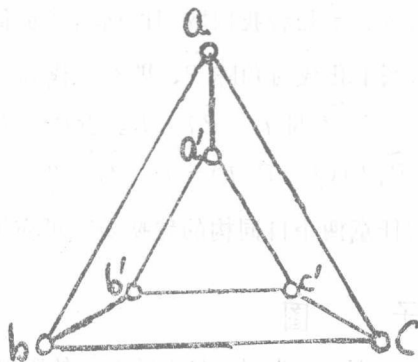
1.2.12 (f) 图

1.2.13. 单图 G 称为是**顶点传递图**, 若对于任两个顶点 u 和 v , 在 $\Gamma(G)$ 中恒有元素 g 使得 $g(u) = v$; G 称为**边传递图**, 若对于任意两条边 u_1v_1 和 u_2v_2 在 $\Gamma(G)$ 中恒有元

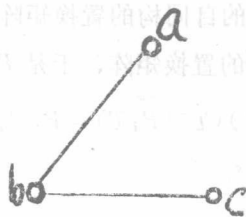
素 h 使得 $h(\{u_1, v_1\}) = \{u_2, v_2\}$, 求一个图 G :

(a) 它是顶点传递的但不是边传递的。

(b) 它是边传递的但不是顶点传递的。



1.2.13 (a) 图



1.2.13 (b) 图

解:

(a) 上左图即为所求, 易直接验证 G 是顶点传递的, 但不存在自同构变换将边 aa' 变成边 ab 。这可以从边 aa' 的顶点 a' 的另外两个相邻顶点 b', c' 和 a' 构成一个三角形, 而边 ab 中无论是 a 或 b 点均无此性质这一简单事实, 得证 G 不是边传递的。

(b) 上右图即为所求, 易直接验证 G 是边传递的, 但由于 a 的度为 1, b 的度为 2, 而同构下的对应点度应相等。所以不存在自同构将 a 变成 b , 故 G 不是顶点传递的。

1.3. 邻接矩阵和关联矩阵

定义: 邻接矩阵 $A(G) = [a_{ij}]_{n \times n}$ 其中 a_{ij} 是连接顶点 v_i 和 v_j 的边数。

定义: 关联矩阵 $M(G) = [m_{ij}]_{n \times x}$ 其中 m_{ij} 是顶点 v_i 和边 e_j 的关联次数 (0, 1 或 2)。

1.3.1. 设 M 是图 G 的关联矩阵, 而 A 是图 G 的邻接矩阵。

(a) 证明: M 的列和为 2

(b) A 的列和是多少?

证: (a) 按 M 的定义, 它的第 j 列是对应 e_j 和 $V(G)$ 中顶点的关联次数所成的向量, 由于一条边只有二个端点, 故 M 的列和恒为 2。

(b) 根据定义 A 的第 i 列的列和恰为与 v_i 关联的边的边数。

1.3.2. 设 G 为二分图, 证明 G 的顶点可编号使得 G 的邻接矩阵具有如下形状:

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

其中 A_{21} 是 A_{12} 的转置。

证: 由于 G 是二分图, 故 $V(G)$ 可分解成二部分 V_1 和 V_2 , V_1, V_2 内部顶点之间没有边相连。先对 V_1 编号, 编完后, 再对 V_2 编号。这时 $A(G)$ 具有上述形状, 又 A 恒为对称矩阵, 故 A_{21} 是 A_{12} 的转置。

1.3.3. 证明: 若 G 是单图, $A(G)$ 的特征值均相异, 则 $\Gamma(G)$ 是 $Abel$ 群。

证: G 的一个自同构对应一个置换矩阵 P , 且 $PAP' = A$, 即 $PA = AP (\because P' = P^{-1})$, 设 X 是 A 的特征值 λ 对应的特征矢量。从而有 $PAX = APX$, 因为 $PAX = \lambda PX$, 所以 $APX = \lambda PX$, 即 PX 亦是 A 的 λ 所对应的特征矢量。由于 A 的特征值均相异, 从而它们对应的特征矢量均相异且正交, 所以 $PX = \mu X$ 。于是若我们取 A 的所有特征值所对应的特征矢量作为空间的正交基底时, 则 P 在这基底下化成对角阵 $\tilde{P}$, 即存在满秩方阵 T , 对于任意的 G 中的自同构的置换矩阵 P 成立 $TPT^{-1} = \tilde{P}$, 即 $T^{-1}\tilde{P}T = P$ 。设 P_i, P_j 是 G 中任意两个自同构的置换矩阵, 于是 $P_iP_j = (T^{-1}\tilde{P}_iT)(T^{-1}\tilde{P}_jT) = T^{-1}\tilde{P}_i\tilde{P}_jT = T^{-1}\tilde{P}_j\tilde{P}_iT = (T^{-1}\tilde{P}_jT)(T^{-1}\tilde{P}_iT) = P_jP_i$ 。所以 G 的任意两个自同构的置换矩阵可交换, 故 $\Gamma(G)$ 是 $Abel$ 群。

1.4. 子 图

定义: 若 $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$, 且 ϕ_H 为 ϕ_G 在 $E(H)$ 上的限制, 则称 H 为 G 的**子图**, 记为 $H \subseteq G$; 若 $H \neq G$ 时称 H 为 G 的**真子图**, 记为 $H \subset G$; 若 $V(H) = V(G)$, 则 H 称为 G 的**生成子图**。(或支撑子图)。

定义: 设 V' 为 V 的非空子集, G 的一个子图, 其顶点集合为 V' , 边集合是 G 中两端点均在 V' 中的那些边全体, 则称这子图为 V' 在 G 中的**导出子图**, 记为 $G[V']$, 类似地由边子集 E' 可以定义由 E' 在 G 中的**边导出子图**, 记为 $G[E']$ 。

1.4.1. 证明 n 个顶点任一个单图均同构于 K_n 的一个子图。

证: 由子图和 K_n 的定义, 结论是显然的。

1.4.2. 证明

(a) 完全图的任一个导出子图均是完全的。

(b) 二部图的任一个子图均是二部图。

证: 由完全图, 二部图及导出子图的定义, 结论是显然的。

1.4.3. 说明 $M(G - E')$ 和 $M(G - V')$ 如何从 $M(G)$ 中得到? 又 $A(G - V')$ 如何从 $A(G)$ 中得到?

解: 从 $M(G)$ 中划去对应于 E' 中的边的列, 所得的矩阵即为 $M(G - E')$ 。从 $M(G)$ 中划去对应于 V' 中的顶点的行, 在所得到的矩阵中, 再划去列和为 0 或 1 的列。最后所得的矩阵即为 $M(G - V')$ 。从 $A(G)$ 中划去对应于 V' 中的顶点的行和列, 所得的矩阵即为 $A(G - V')$ 。

1.4.4. 找一个不与任何 K -一方体的子图同构的二部图。

解: 设 $G = 3\text{-方体} + e$, 其中 e 为 $(0, 0, 0)$ 和 $(1, 1, 1)$ 之间的边。显然 G 是二部图 (它的顶点可划分成如下两部分, $V_1 = \{(0, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$, $V_2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$) 对 $K \leq 3$ 的 K -一方体, 其边数少于 G 的边数, 它的子图不可能与 G 同构。

若 G 与 K -一方体 ($K \geq 4$) 某子图同构, 注意到 G 中 $(0, 0, 0)$ 与 V_2 中的顶点均相邻。由 K -一方体的对称性, 适当地进行坐标变换, 不失一般性地可假定 $(0, 0, 0)$ 和 $(0, 0, \dots, 0)$ 相对应, 它的邻点 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)$ 分别依次和 $(1, 0, 0, \dots, 0),$

$(0, 1, 0, \dots, 0), (0, 0, 1, 0, \dots, 0), (0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0)$ 相对应。由于 $(1, 0, 0)$ 和 $(1, 1, 1)$ 在 G 中除 $(0, 0, 0)$ 外, 还有两个公共邻点, 可是按 K 一方体的定义 $(1, 0, 0, \dots, 0)$ 和 $(0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0)$ 除 $(0, 0, \dots, 0)$ 外, 仅能和 $(1, 0, 0, 1, 0, \dots, 0)$ 这个顶点相邻, 矛盾。故 G 不与某个 K 一方体的子图同构。

1.4.5. 设 G 是单图, 整数 n 满足 $1 < n < v-1$ 。证明若 $v \geq 4$, 且 G 的所有的 n 个顶点的导出子图都具有相同的边数时, 则 $G \cong K_v$ 或 $G \cong K_v^c$ 。

证: 设 G 中 n 个顶点的导出子图的边数为 m 。 v_i, v_j 是 G 中任意两个顶点, $\varepsilon(G) - d(v_i) = \varepsilon(G - v_i)$, 这里 $d(v_i)$ 表示和 v_i 关联的边数。显然在 $G - v_i$ 中取 n 个顶点的导出子图一共有 $\binom{v-1}{n}$ 种取法, 在 $G - v_i$ 中的任一边 uv 在这 $\binom{v-1}{n}$ 个 n 个顶点的导出子图中取到的次数恰为 $G - \{v_i, u, v\}$ 中取 $n-2$ 个顶点的导出子图的个数 $\binom{v-3}{n-2}$ 故我们有:

$$\varepsilon(G) - d(v_i) = \varepsilon(G - v_i) = m \binom{v-1}{n} / \binom{v-3}{n-2} \quad (1)$$

类似地我们有:

$$\varepsilon(G) - d(v_j) = \varepsilon(G - v_j) = m \binom{v-1}{n} / \binom{v-3}{n-2} \quad (2)$$

$$\varepsilon(G) - d(v_i) - d(v_j) + a_{ij} = \varepsilon(G - \{v_i, v_j\}) = m \binom{v-2}{n} / \binom{v-4}{n-2} \quad (3)$$

这里 a_{ij} 当 v_i, v_j 相邻时为 1, 当 v_i, v_j 不相邻时为 0。

由 (3) - (1) - (2), 于是: $a_{ij} = \varepsilon(G) + m \binom{v-2}{n} / \binom{v-4}{n-2} - 2m \binom{v-1}{n} / \binom{v-3}{n-2}$

故 a_{ij} 与 i, j 的选取无关, 若 $a_{ij} = 0$ 则 $G \cong K_v^c$, 若 $a_{ij} = 1$, 则 $G \cong K_v$ 。

1.5. 顶点的度

定义: G 中与顶点 u 关联的边数 (我们约定环作二条边计算) 称为 G 中顶点 u 的度。记为 $d_G(u)$, 或简记 $d(u)$, 我们用 $\delta(G)$ 与 $\Delta(G)$ 分别记 G 中顶点的最小度和最大度。

定理 1.1: $\sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon$ 。

定义: 若 $\delta(G) = \Delta(G) = k$ 时, 称图 G 是 k -正则图。

1.5.1. 证明 $\delta \leq 2\varepsilon/v \leq \Delta$ 。

证: 由定理 1.1. 我们有 $v\delta \leq \sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon \leq v\Delta$ 。故命题成立。

1.5.2. 若 G 是单图, 则 MM' 和 A^2 的对角线上的元素均是 G 的顶点的度。

证: 因为 G 是单图, M 和 A 中只有 0 和 1。由 M 的定义, M 中 i 行向量中 “1” 的个数恰为 u_i 的度, 从而 MM' 中 i 行 i 列位置上的元素为 $d_G(u_i)$ 。类似地 A 中 i 行向量中 “1” 的个数恰为 u_i 的度, 从而 $AA' = A^2$ 中 i 行 i 列位置上的元素为 $d_G(u_i)$ 。

1.5.3. 证明若一个 $K > 0$ 的 K -正则的二部图有二部划分 (X, Y) , 则 $|X| = |Y|$ 。

证: 对二部图讲 $\sum_{u \in X} d(u) = \sum_{u \in Y} d(u)$, 故对 K -正则二部图成立 $K|X| = K|Y|$, 从

而 $|X| = |Y|$ 。

1.5.4. 证明在任何两个或两个以上的人的组内, 恒存在两个人在组内有相同个数的朋友。

证: 令上述组内的人的集合表示图 G 的顶点集合, 若两人互相是朋友, 则其间联以一边, 所得之图 G 是组内人员的朋友关系图。显然 G 是单图, 图中顶点的度恰表示该人在组内朋友的个数, 利用图 G , 上述问题就抽象成如下的图论问题: 在一单图 G 中, 若 $v(G) \geq 2$, 则在 G 中恒存在度相等的两个顶点。下面我们证明这个命题。

用反证法, 设 G 中各点度均不相等。必有最大度 $\Delta \geq v-1$ 。若 $\Delta = v-1$, 必有 $\delta \geq 1$, 从而 $\Delta - \delta + 1 < v$, 这与各点度均不等矛盾! 若 $\Delta > v-1$, 又与 G 是单图矛盾。

1.5.5. 若 G 有顶点 $v_1, v_2, \dots, v_n$, 序列 $(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n))$ 称为 G 的度序列, 证明非负整数的序列 $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ 为某个图的度序列的充要条件是 $\sum_{i=1}^n d_i$ 为偶数。

证: 由定理1.1知, 必要性是显然的。对于充分性: 取 n 个相异顶点 $v_1, v_2, \dots, v_n$, 若 $d_i = 2k$, 则在 v_i 处作 k 个环。若 $d_i = 2l+1$, 则在顶点 v_i 处作 l 个环, 由于 $\sum_{i=1}^n d_i$ 为偶数, 故 d_i 为奇数的项在 $\sum_{i=1}^n d_i$ 中为偶数, 从而 d_i 为奇数的所对应的顶点 v_i 可以配对并以边相连。最后所得之图记为 G , G 的度序列按作法恰是 $(d_1, d_2, \dots, d_n)$, 故充分性成立。

1.5.6. 单图的度序列 $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ 称为图序列。

证明: (a) 序列 $(7, 6, 5, 4, 3, 3, 2)$ 和 $(6, 6, 5, 4, 3, 3, 1)$ 都不是图序列。

(b) 若 $\mathbf{d}$ 为图序列, 且 $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ 。则 $\sum_{i=1}^n d_i$ 是偶数, 且对 $1 \leq k \leq n$ 成立 $\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min\{k, d_i\}$ 。

(Erdős, P. 和 Gallai, T. 在1960年已证明这是 $\mathbf{d}$ 为图序列的充要条件)。[注]

证: (a) $(7, 6, 5, 4, 3, 3, 2)$, 它对应的是7个顶点的图, 若是单图, 则每个顶点度最大为6。现 $d(v_1) = 7$, 故它不是图序列。 $(6, 6, 5, 4, 3, 3, 1)$, 它对应的是7个顶点的图, 若是单图, 则由 $d(v_1) = 6, d(v_2) = 6$ 知, v_1, v_2 和图中每一个顶点均需相连, 故图中每一个顶点的度应大于或等于2。这又和 $d(v_7) = 1$ 矛盾, 故它不是图序列。

(b) 由练习1.5.5. 知 $\sum_{i=1}^n d_i$ 为偶数, 又 k 个顶点的导出子图的顶点的度之和 $\leq k(k-1)$ (练习1.1.3.) 剩下的 $v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n$ 可给 $v_1, v_2, \dots, v_k$ 最大的可能的度为 $\sum_{i=k+1}^n \min(k, d_i)$ 。故我们有, $\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min\{k, d_i\}$ 成立。

[注]其充分性可参阅 Harary, F. Graph Theory P. 90. "Partitions"。

1.5.7. 设 $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ 是非负整数的不增序列, 令 $\mathbf{d}'$ 来记序列 $(d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$

(a) 证明 $\mathbf{d}$ 为图序列的充要条件是 $\mathbf{d}'$ 为图序列。

(b) 利用 (a) 说明构造具有图序列 $\mathbf{d}$ 的单图的一个算法。

(V. Havel, S. Hakimi)

证: (a) 必要性: 设 G 是单图, 其图序列为 $\mathbf{d}$ 。

且 $d(v_i) = d_i \quad (i = 1, \dots, n)$, 分两种情况证明。

(1) 若 v_1 关联的 d_1 条边恰为: $v_1 v_2, \dots, v_1 v_{d_1+1}$ 。

则 $G - v_1$ 的图序列是 $\mathbf{d}'$ 。

(2) 若 v_1 关联的 d_1 条边中, 有 $v_1 v_j$, 且 $j > d_1 + 1$ 。

令 $j_0 = \max\{j \mid v_1 v_j \in E(G)\} > d_1 + 1$

$i_0 = \min\{i \mid v_1 v_i \in E(G)\} \leq d_1 + 1$

则 $v_1 v_{j_0} \in E(G)$

且 $j > j_0$ 时 $v_1 v_j \notin E(G)$ 。

$v_1 v_{i_0} \in E(G)$

且 $i < i_0$ 时 $v_1 v_i \notin E(G)$ 。

因为 $d_{i_0} \geq d_{j_0}$,

考察与 v_{i_0} 相邻的 d_{i_0} 个点, 其中必有一点 v_k 与

v_{j_0} 不相邻, 否则, $d_{i_0} \geq d_{j_0} + 1 > d_{i_0}$ 矛盾!

作 $G' = G - \{v_1 v_{j_0} + v_{i_0} v_k\} + \{v_1 v_{i_0} + v_k v_{j_0}\}$

这时, G' 与 G 有相同的图序列 $\mathbf{d}$, 只是 G' 的 j_0 小了, i_0 大了, 如此继续下去, 必可化为情况 (1)。

充分性: 设 G' 的图序列为 $\mathbf{d}'$ 。在 G' 上加入异于 G' 顶点 $v_2, v_3, \dots, v_n$ 的新顶点 v_1 , 并在 v_1 和 $v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}$ 之间连以边, 所得之新图记为 G 。则 G 的图序列为 $\mathbf{d}$ 。

解 (b), 构造图序列为 $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$ 的单图 G , 其步骤如下:

第 1 步: 令 $E^{(0)} = \phi$, $\mathbf{d}^{(0)'} = (d_1, d_2, \dots, d_n) = \mathbf{d}$, $V^{(0)'} = (v_1^{(0)'}, v_2^{(0)'}, \dots, v_n^{(0)'})$, $k = 1$;

第 2 步: 对 $\mathbf{d}^{(k-1)'} = (d_1^{(k-1)'}, d_2^{(k-1)'}, \dots, d_n^{(k-1)'})$, 求出其下标集 $(1, 2, \dots, n)$ 的一个置换 σ , 使 $\sigma \mathbf{d}^{(k-1)'} = (d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \dots, d_n^{(k)})$ 成为一个非增序列。同时, 令 $\sigma V^{(k-1)'} = (v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, \dots, v_n^{(k)}) = V^{(k)}$,

若 $d_1^{(k)} = 0$, 则转第 4 步, 否则, 转第 3 步。

第 3 步: 令 $E^{(k)} = E^{(k-1)} \cup \{v_1^{(k)} v_j^{(k)} \mid j = 2, 3, \dots, d_1^{(k)} + 1\}$,

$\mathbf{d}^{(k)'} = (0, d_2^{(k)} - 1, d_3^{(k)} - 1, \dots, d_{d_1^{(k)}+1}^{(k)} - 1, d_{d_1^{(k)}+2}^{(k)}, \dots, d_n^{(k)})$,

$k := k+1$, 转第2步。

第4步: 令 $G = (V^{(k)}, E^{(k-1)})$, 停。

1.5.8. 证明: 无环图 G 含二部生成子图 H , 使得对一切的 $v \in V$ 成立 $d_H(v) \geq \frac{1}{2}d_G(v)$ 。

证: 设 H 为含于 G 中边数最多的一个二部生成子图, 此 H 即为所求。事实上, 若存在 $v_0 \in V(G)$ 成立 $d_H(v_0) < \frac{1}{2}d_G(v_0)$, 由于 H 是含于 G 中边数最多的一个二部生成子图, 从而有 $d_G(v_0) - d_H(v_0)$ 条边和 v_0 同一部的顶点相连, 现把 v_0 从 H 中的一部变到另一部顶点中去, 并将原来 H 中的连结 v_0 的 $d_H(v_0)$ 条边除去。加上在 G 中和 v_0 关联的其它 $d_G(v_0) - d_H(v_0) (> \frac{1}{2}d_G(v_0))$ 条边, 这样我们得到了一个新二部图 H' 。它也是含于 G 中的一个二部生成子图。且 $\varepsilon(H') > \varepsilon(H)$ 。但这和 H 的选择矛盾。故对一切 $v_0 \in V$ 成立 $d_H(v_0) \geq \frac{1}{2}d_G(v_0)$ 。

1.5.9 设 $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 是平面上的点集, 其中任意两点之间的距离至少是 1, 证明: 最多有 $3n$ 对点距离恰好为 1。

证: 作图 G , 其中 $V(G) = S$, S 中两点相邻 $\Leftrightarrow$ 两点间距离为 1。由于两点间距离为 ≥ 1 , 从而对任意 $x_i \in V(G)$, 在 x_i 为心的单位圆周上, 最多含有 S 的六个点, 故 $d_G(x_i) \leq 6$ 。对 G 应用定理 1.1。有 $\sum_{i=1}^n d_G(x_i) = 2\varepsilon$, 从而有 $6n \geq 2\varepsilon$, 故 $3n \geq \varepsilon$ 。

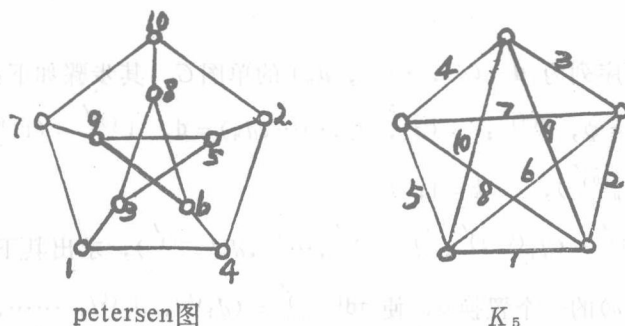
1.5.10. 图 G 的线图是顶点集合为 $E(G)$ 的图, 其中两个顶点相连接的充要条件是它们在 G 中为相邻的边。证明: 如果 G 是单图,

(a) G 的线图具有 $\varepsilon(G)$ 个顶点和 $\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{2}$ 条边。

(b) K_5 的线图与练习 1.2.6. 中所描述的图的补图同构。

证: 按线图的定义 (a) 结论是显然的。

(b) K_5 的线图和 Petersen 图 (即练习 1.2.6. 的图) 的补图的同构关系, 可以由下面两图之间标明的顶点对应, 利用练习 1.2.5. 直接验证它。



1.5.10. 图 (b)

1.6. 路和连通性

定义: G 中的途径是一个有限非空序列 $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$, 它为顶点和边的交错序列, 且 $e_i (1 \leq i \leq k)$ 的端点是 v_{i-1} 和 v_i 。上述从 v_0 到 v_k 的途径 W , 记为 $(v_0,$