

Partial Differential Equation and Program Design for Image Processing

偏微分方程图像 处理及程序设计

贾 渊 刘鹏程 牛四杰 编著



科学出版社

偏微分方程图像处理及 程序设计

贾 渊 刘鹏程 牛四杰 编著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书系统地介绍了近年来偏微分方程在图像处理中的主要模型和程序实现,并结合作者的科研项目,提出了相应的改进算法。首先介绍了偏微分方程的基础,包括一些用于图像处理的重要概念和求解方法;然后介绍了FFT算法在偏微分方程求解中的应用,针对整序提出了改进,并给出了利用FFT算法求解微分积分、正弦变换、余弦变换和在周期边界条件下的偏微分方程的过程。

本书分为三个部分,包括偏微分方程在图像增强、图像复原和图像分割中的重要模型,以及模型与相关算法的比较。

本书可作为理工科院校应用数学、计算机应用专业本科生和研究生的参考用书,也可以作为从事数学图像处理研究和开发的技术人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

偏微分方程图像处理及程序设计/贾渊,刘鹏程,牛四杰编著.——北京:科学出版社,2012.8

ISBN 978-7-03-035221-7

I. ①偏… II. ①贾… ②刘… ③牛… III. ①偏微分方程—应用—数字图像处理 IV. ①TN911.73

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第172200号

责任编辑:杨 岭 高映雪 封面设计:陈思思

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

四川煤田地质制图印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012年8月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2012年8月第一次印刷 印张:16

字数:364 000

定价:60.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

图像处理是当今计算机应用最为活跃的研究领域之一. 近年来, 结合数字图像的某些特征, 构建偏微分方程模型, 以实现数字图像的增强、修复、分割等, 成为数字图像处理的研究热点. 这些模型涉及高深的数学理论、繁杂的数学公式、大量的算法分析、数值求解方法等内容, 使计算机应用类专业的研究生“望而生畏”. 编写本书的目的是希望初学者能通过本书轻松了解偏微分方程图像处理的基础内容, 也希望作者的研究成果能对从事图像处理的研究人员有所裨益.

在本书的写作过程中, 我们既考虑到数学类专业人员精于偏微分理论而疏于程序设计的实现, 又考虑到计算机类专业人员长于 C/C++ 编程而短于偏微分方程的理论及求解过程的状况, 因此本书对偏微分方程及求解过程进行了浅显的介绍, 尤其是如何利用傅里叶变换实现偏微分方程的求解. 同时, 本书也给出了几个重要模型在图像去噪、修复、分割方面的应用、对比及改进, 对各类模型的建立及求解, 给出了必要的数学推导过程, 并且用较大的篇幅, 给出了各类模型的离散化求解方法和相应的 C/C++ 程序.

本书第 1 章介绍了偏微分方程的基础知识, 涉及方向导数、散度、梯度等与图像处理相关的基本概念, 以及常见的偏微分方程模型和偏微分方程求解方法, 如行波法、分离变量法、幂级数解法等, 并给出了差分求解和变分法数值求解的基本过程. 第 2 章给出了分裂基 FFT 的程序设计、对整序算法的改进以及利用 FFT 求解泊松方程的具体方法. 第 3 章对比了目前主要的图像去噪方法, 并讨论了偏微分方程去噪模型的去噪效果. 第 4~7 章, 讨论了样本块修复模型、全变分图像修复模型、FMM 图像修复、基于图像分解的修补技术等内容, 给出了相应的实验结果及改进方法. 第 8~10 章, 讨论了 GAC 模型、CV 模型的实现及改进, 并将梯度流、边缘流在应用图像分割中存在的问题及改进方法进行了实现.

本书第 1~3 章由贾渊编写, 第 4~7 章由刘鹏程、贾渊编写, 第 8~10 章由牛四杰、贾渊、赵文琦编写, 全书由贾渊统稿. 赵文琦、刘鹏程、牛四杰、李振江等在收集资料、程序设计等方面做了大量的工作. 龙晓英女士, 科学出版社的高映雪编辑以及黄桥、张文婷、马晓敏等为本书的出版付出了辛勤的劳动. 西南科技大学的陈波、韩永国、刘志勤、范勇、鲜大权教授为本书提出了宝贵的意见和建议. 在此, 作者一并向他们表示深切的谢意. 本书

的出版得到了国家 863 计划(2008AA10Z211)和校博士基金(08ZX7101)的资助.

由于作者的水平有限,书中的错误和不妥之处在所难免,恳请读者批评指正.所有关于本书的意见和建议可寄至邮箱:jiayanli1225@sina.com.

作 者

西南科技大学计算机科学与技术学院

2012 年 3 月

目 录

前言

第 1 章 偏微分方程基础	1
1.1 常微分与偏微分	1
1.2 方向导数与梯度	2
1.3 积分和散度	4
1.4 常见偏微分方程	7
1.4.1 波动方程	7
1.4.2 热扩散方程	8
1.4.3 拉普拉斯方程	9
1.4.4 薛定谔方程	11
1.4.5 孤立波及 KDV 方程	12
1.5 常见的偏微分方程解法	13
1.5.1 行波法	13
1.5.2 分离变量法	14
1.5.3 幂级数解法	16
1.6 偏微分方程数值解法初步	17
1.6.1 有限差分基础	17
1.6.2 变分法	21
第 2 章 傅里叶变换及其在偏微分方程数值解法中的应用	23
2.1 分裂基算法及程序设计实现	23
2.1.1 分裂基算法	23
2.1.2 实序列的傅氏变换	25
2.1.3 分裂基算法的实现	30
2.2 FFT 整序算法的改进	35
2.2.1 算法的基本数学原理	36
2.2.2 算法设计	38

2.2.3	算法分析	40
2.2.4	程序实现	42
2.3	使用 FFT 求解偏微分方程	45
2.3.1	多维傅氏变换及其偏微分特性	45
2.3.2	求一维函数的不定积分	47
2.3.3	求一维函数的微分	50
2.3.4	离散正弦和余弦变换	52
2.3.5	FFT 求解泊松方程	56
第 3 章	偏微分方程图像去噪算法及对比	61
3.1	几类主要的图像去噪算法	62
3.1.1	基于 FFT 变换的低通滤波去噪	62
3.1.2	均值滤波及高斯滤波器去噪方法	64
3.1.3	中值滤波及多级中值滤波	65
3.1.4	小波软阈值法去噪	67
3.1.5	非局部均值滤波	67
3.2	基于偏微分方程的图像去噪	68
3.2.1	整体变分(TV)平滑模型	68
3.2.2	P-M 模型	70
3.2.3	正则化 P-M 模型	71
3.2.4	Y-K 模型	72
3.3	去噪结果对比	77
3.3.1	去除高斯噪声的实验对比	77
3.3.2	去除椒盐噪声的实验对比	79
第 4 章	样本块图像修复技术及改进模型	81
4.1	基于样本块的图像修复技术	82
4.1.1	区域建模	82
4.1.2	算法描述	83
4.1.3	实验及结果分析	84
4.2	改进的样本块图像修复模型	86
4.2.1	改进修复模型	86

4.2.2	对比实验及结果分析	86
4.2.3	结论	88
4.3	基于样本块的图像修补算法及改进修复模型程序	89
第 5 章	基于全变分的图像修复技术及其改进模型	109
5.1	基于 TV 模型的图像修复技术	109
5.1.1	TV 修复模型	109
5.1.2	数值计算实现	110
5.1.3	算法流程	112
5.2	改进 TV 模型的快速图像修复方法	112
5.2.1	快速 TV 修复模型	112
5.2.2	修复顺序	113
5.2.3	基于各向异性扩散的降噪方法消除阶梯效应	113
5.2.4	算法流程	115
5.2.5	对比实验及结果分析	115
5.2.6	结论	117
5.3	TV 模型及改进图像修复方法程序	117
5.3.1	TV 模型修复算法源代码	117
5.3.2	改进 TV 模型的快速图像修复方法源代码	124
第 6 章	基于快速步进法的图像修复技术	138
6.1	数学模型	138
6.2	算法流程及实验分析	139
6.3	基于 FMM 的图像修复技术程序	140
第 7 章	基于图像分解的图像修复技术	160
7.1	图像分解技术	160
7.2	算法流程及实验分析	164
7.3	基于图像分解的图像修复技术程序	166
第 8 章	水平集应用研究	177
8.1	水平集方法的基本理论	177
8.2	符号距离函数的重新初始化	179
8.3	速度函数	180

8.3.1	水平集与外部速度域	181
8.3.2	水平集与持续速度	181
8.4	Hamilton-Jacobi 方程改写的水平集方程	182
8.5	C-V 模型及其水平集求解	183
8.6	C-V 模型程序	185
第 9 章	活动轮廓模型及改进	203
9.1	测地线活动轮廓模型原理及实现	203
9.1.1	测地线活动轮廓模型原理	203
9.1.2	测地线活动轮廓模型程序设计	206
9.2	不需要重新初始化的几何活动轮廓模型	217
9.2.1	不需要重新初始化的几何活动轮廓模型原理	217
9.2.2	不需要重新初始化的几何活动轮廓模型程序设计	219
第 10 章	梯度向量流和边缘流	231
10.1	梯度向量流	231
10.2	结合 GVF 的分水岭图像分割算法	233
10.2.1	一维梯度向量流(1D-GVF)	233
10.2.2	扩展最小变换	234
10.2.3	试验结果	236
10.3	边缘流	237
10.3.1	边缘流方法基本理论	237
10.3.2	边缘流综合	239
10.3.3	边缘流方法应用于图像分割	240
10.4	水平集与边缘流相结合的方法研究及改进	241
10.4.1	水平集与边缘流相结合的方法	241
10.4.2	水平集与边缘流相结合的方法的改进	243
参考文献		244

第 1 章 偏微分方程基础

1.1 常微分与偏微分

偏微分方程是连续数学的核心,科学界应用广泛^[1].近年来利用偏微分方程建模,结合数字图像的某些特征,以实现数字图像的增强、修复、分割等,成为数字图像处理的研究热点,因此有必要对偏微分方程有个初步的了解.科学研究关注的是根据各种自然现象来探索其中的规律,通过对某事物数量的分析,找出影响其数量变化的因素,得到相应的规律(如函数表达式),人类社会基于这样的认知,就可以对该事物进行预测和控制.

一个量的变化(即所谓变量)有离散和连续两种形式.前几年房地产很火爆,以某城市新竣工的楼盘为例,设 $I(x, y)$ 表示某时刻竣工的楼盘总数,由于楼盘竣工受很多因素的影响,不可能每时每刻都有竣工的楼盘,因此可以认为它是一个离散变化的量,以每年 12 月 15 日为统计日期,得到某城市的楼盘竣工函数是 $f(t)$ ($t=2008, 2009, 2010, \dots$) $f(2008)=10, f(2009)=20, f(2010)=100$. 自然地,可以得到一个初步的结论,每年竣工的楼盘数不断增加,而且是成倍地增加,因为从 2008 年到 2009 年增加了 10 个,而 2009 年到 2010 年竟然增加了 80 个,这说明了什么问题? 有什么样的规律? 这是经济学家、社会学家关注的问题,数学家用 $\Delta f(t)$ 表示量的变化, $C(t)$ 表示变化率,并给出了这样的公式:

$$\begin{aligned}\Delta f(n) &= f(n) - f(n-1) \\ C(n) &= \frac{\Delta f(n)}{f(n)}\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

由式(1.1.1),可得 $\Delta f(2009)=10, \Delta f(2010)=80, C(2009)=0.5, C(2010)=0.8$, 这就是离散形式的量变公式.

以上单就某一城市的房地产开发为例,它是个离散变量.如果全省、全国、全世界都在从事房地产开发,这时候每时每刻都会有楼盘竣工,那么楼盘数就是一个连续变化的量,在式(1.1.1)的基础上,需要引入微分的概念,即

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t - \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta t}\tag{1.1.2}$$

而 $C(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$ 表示变化率, 如果 $C(t)$ 是一个常数(而不是像前面那样变化的情况),

可以得到一个简单的常微分方程

$$f'(t) = C \cdot f(t) \quad (1.1.3)$$

事物的数量除了随时间变化外, 还受到其他因素影响, 比如楼盘竣工要受到建筑材料、人工等诸多因素影响. 现在假设楼盘受到时间 t , 建筑材料 x_1 , 人工 x_2 的影响, 建立一个函数 $f(t, x_1, x_2)$. 自然地, 要分析该函数在各因素变化下的规律, 最好是在某个量变化的情况下, 选择其他量不变化, 这就是偏微分, 相应的公式表达如下:

$$f_t(t, x_1, x_2) = \frac{\partial f(t, x_1, x_2)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t, x_1, x_2) - f(t - \Delta t, x_1, x_2)}{\Delta t} \quad (1.1.4)$$

$$f_{x_1}(t, x_1, x_2) = \frac{\partial f(t, x_1, x_2)}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(t, x_1, x_2) - f(t, x_1 - \Delta x_1, x_2)}{\Delta x_1} \quad (1.1.5)$$

$$f_{x_2}(t, x_1, x_2) = \frac{\partial f(t, x_1, x_2)}{\partial x_2} = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{f(t, x_1, x_2) - f(t, x_1, x_2 - \Delta x_2)}{\Delta x_2} \quad (1.1.6)$$

式(1.1.4)~(1.1.6)就是一阶偏微分, 还可以定义更高阶的偏微分, 而且偏微分的次序可以相互交换, 即

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t \partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial t \partial x_2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial t} = \dots \quad (1.1.7)$$

有了偏微分, 就可以定义偏微分方程, 即方程式中有偏微分表达式. 另外, 微分的表达式还有其他的形式, 感兴趣的读者可以查阅微分方程的相关文献.

1.2 方向导数与梯度

上面的一阶偏微分是函数沿着坐标轴方向的变化率, 除此之外, 还需要知道某特定方向的变化率. 一般的, 可以给出方向导数的定义.

定义 1.1 函数 $f(x_1, x_2)$ 在点 $p(x_1, x_2)$ 沿着方向 $\vec{a}(\cos a_1, \cos a_2)$ (方向角分别为 a_1, a_2 , 与相应坐标轴对应的夹角) 存在以下极限:

$$D_{\vec{a}} f(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h \cos a_1, x_2 + h \cos a_2) - f(x_1, x_2)}{h} \quad (1.2.1)$$

则称 $D_{\vec{a}} f(x_1, x_2)$ 为函数在点 p 处沿方向 $\vec{a}$ 的方向导数.

由定义 1.1 可知, 函数 $f(x_1, x_2)$ 的偏导数 $f_{x_1}(x_1, x_2)$ 在对应的方向 $(1, 0)$ 上变化, $f_{x_2}(x_1, x_2)$ 在对应的方向 $(0, 1)$ 上变化. 根据定义 1.1 稍作变换, 即可将方向导数拆解成沿着 $(1, 0)$ 方向走了 $h \cos a_1$ 步, 沿着 $(0, 1)$ 方向走了 $h \cos a_2$ 步(如图 1.1 所示).

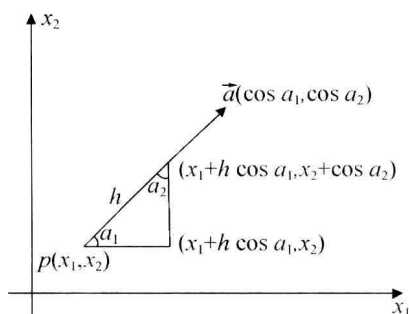


图 1.1 方向导数示意图

$$\begin{aligned}
 & D_{\vec{a}} f(x_1, x_2) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h \cos a_1, x_2) - f(x_1, x_2) + f(x_1 + h \cos a_1, x_2 + h \cos a_2) - f(x_1 + h \cos a_1, x_2)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h \cos a_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h \cos a_1, x_2 + h \cos a_2) - f(x_1 + h \cos a_1, x_2)}{h} \quad (1.2.2)
 \end{aligned}$$

在式(1.2.2)右边的第一项里 x_2 是固定的, 因此可假设 $\Delta x_1 = h \cos a_1$; 对第二项也可采取同样的方式, 取 $\Delta x_2 = h \cos a_2$, 因此式(1.2.2)可变换为

$$\begin{aligned}
 D_{\vec{a}} f(x_1, x_2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h \cos a_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{h} \\
 &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h \cos a_1, x_2 + h \cos a_2) - f(x_1 + h \cos a_1, x_2)}{h} \\
 &= \cos a_1 \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1} \\
 &\quad + \cos a_2 \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h \cos a_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1 + h \cos a_1, x_2)}{\Delta x_2} \\
 &= \cos a_1 f_{x_1}(x_1, x_2) + \cos a_2 f_{x_2}(x_1, x_2) \quad (1.2.3)
 \end{aligned}$$

式(1.2.3)给出了一个重要的结论, 方向导数可写成偏微分的线性组合, 而且可以推广到更高维, 即表达为如下定理.

定理 1.1 设函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在点 $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 沿着方向 $\vec{a}(\cos a_1, \cos a_2, \dots, \cos a_n)$ 存在方向导数, 则该导数可写成偏微分的线性组合, 即

$$\begin{aligned}
 D_{\vec{a}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \cos a_1 f_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) + \cos a_2 f_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 &\quad + \dots + \cos a_n f_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.2.4)
 \end{aligned}$$

由于方向 $\vec{a}$ 已经使用了归一化表达, 即 $\cos^2 a_1 + \cos^2 a_2 + \dots + \cos^2 a_n = 1$, 这里使用余弦值, 实际上就是沿方向 $\vec{a}$ 的增长 h 在各坐标轴上的投影. 如果引进 $\vec{G} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$, 称 $\vec{G}$ 为函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在点 $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的梯度, 从而方向导数式(1.2.4)可写成内积的形式, 即 $D_{\vec{a}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{G} \cdot \vec{a}$, 函数的方向导数是梯度在该方向上的投影. 梯度是函数在点 $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的固有向量, 与方向 $\vec{a}$ 无关. 当

$\vec{G}$ 的方向与 $\vec{a}$ 的方向一致时, 方向导数取得最大值, 即

$$D_{\vec{a}}f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial a} = \vec{G} \cdot \vec{a} = |\vec{G}| \cos(\vec{G}, \vec{a}) \quad |\vec{a}| = 1 \quad (1.2.5)$$

$$|\vec{G}| = \max\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)$$

式(1.2.5)说明梯度的方向是函数变化率最大的方向, 其模是函数变化率最大值. 梯度是一个非常重要的概念, 在许多求函数极值的应用中, 经常可以看见它, 下面举例说明一下

它的几何意义. 设一个函数 $z = f(x, y)$, 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = C \end{cases}$ 在平面上的投影为 $S^*: f(x, y) = C$, 即函数的等值线. 如果 f_x, f_y 不同时为 0, 则 S^* 上点 p 的法向量为 $(f_x, f_y) = \vec{G}_p$, 函数在点 p 的梯度垂直于等值线, 指向函数增大的方向(如图 1.2 所示).

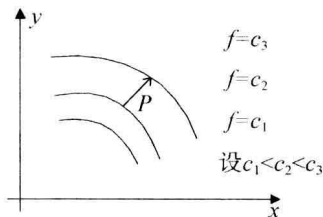


图 1.2 函数等值线

梯度运算还有一些基本公式(用 ∇f 代表 f 的梯度运算), 主要如下:

$$\begin{aligned} \nabla c &= 0 (c \text{ 为常数}) \\ \nabla cf &= c \nabla f \\ \nabla(f \pm g) &= \nabla f \pm \nabla g \\ \nabla(fg) &= g \nabla f + f \nabla g \\ \nabla(f/g) &= (g \nabla f - f \nabla g) / g^2 \\ \nabla(f(g)) &= \frac{\partial f}{\partial g} \nabla g \quad (f(g) \text{ 为 } g \text{ 的复合函数}) \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

1.3 积分和散度

有微分就有积分, 一元微积分基本定理表明, 一个函数微分的积分与函数只相差一个常数项, 即

$$\int_a^x f'(t) dt = f(t) \Big|_a^x = f(x) - f(a) \quad (1.3.1)$$

同时, 根据函数乘积的微分定理, 还可以得到分部积分的公式, 因为

$$(fg)' = f'g + fg' \quad (1.3.2)$$

对式(1.3.2)两边积分, 再进行移项处理, 即可得到分部积分的公式

$$\int_a^x f'(t)g(t)dt = f(t)g(t)|_a^x - \int_a^x f(t)g'(t)dt \quad (1.3.3)$$

现在将其推广到多维空间,如图 1-3 所示,假设要计算二维空间函数 $f(x_1, x_2)$ 的偏微分 $f_{x_1}(x_1, x_2)$ 在面域 Ω 上的积分 $\iint_{\Omega} f_{x_1}(x_1, x_2)dx_1dx_2$. 自然地,由于是关于 x_1 的偏微分,可在取定 x_2 的情况下,利用式(1.3.1)得到积分. 需要注意的是,此时 x_1 的取值范围要根据 x_2 的值来确定,因此是 x_2 的一个函数,从而可以得到

$$\int_{A(x_2)}^{B(x_2)} f_{x_1}(x_1, x_2)dx_1 = f[B(x_2), x_2] - f[A(x_2), x_2] \quad (1.3.4)$$

因此

$$\iint_{\Omega} f_{x_1}(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_C^D \{f[B(x_2), x_2] - f[A(x_2), x_2]\}dx_2 \quad (1.3.5)$$

这样,双重积分变成了单重积分,由式(1.3.5)还可知 $(B(x_2), x_2)$ 、 $(A(x_2), x_2)$ 为边界封闭且分段连续的平面区域 Ω 边界 $\partial\Omega$ 上的点(如图 1.3 所示),边界 $\partial\Omega$ 是曲线,其单位外法向量 $\vec{n} = (n_1, n_2)(\vec{x})$ 和长度 $d\vec{S}$ (如图 1.4),而 $|\vec{n}| = 1$, $|d\vec{S}| = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2}$,根据相似三角形原理,不难得到 $\frac{dx_2}{d\vec{S}} = \frac{n_1(\vec{x})}{1}$,即 $dx_2 = n_1(\vec{x})d\vec{S}$.

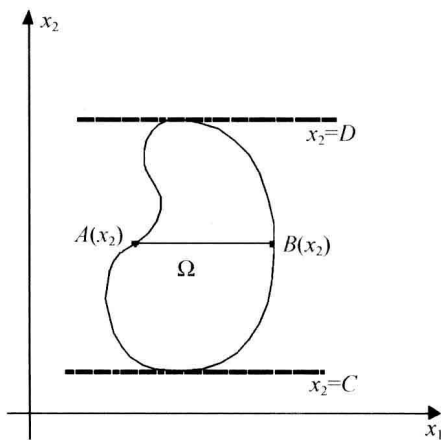


图 1.3 二维空间积分示意图

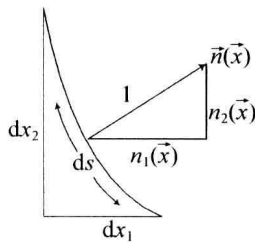


图 1.4 外法线向量投影

从而式(1.3.5)可写成

$$\iint_{\Omega} f_{x_1}(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_C^D \{f[B(x_2), x_2] - f[A(x_2), x_2]\}n_1(\vec{x})d\vec{S} \quad (1.3.6)$$

由于上式中参与积分运算的点都是边界点,且 $\vec{x} = (A(x_2), x_2)$ 时, $\vec{n}_1(\vec{x}) < 0$, 而 $\vec{x} = (B(x_2), x_2)$ 时, $\vec{n}_1(\vec{x}) > 0$ (见图 1.5),因此式(1.3.6)可表示为

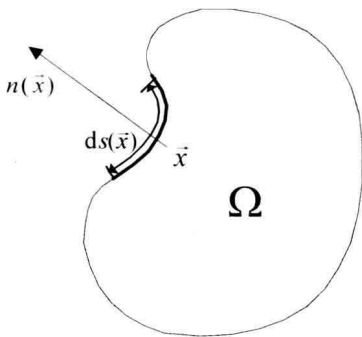


图 1.5 面域外法线示意图

$$\int_C^D \{f[B(x_2), x_2] - f[A(x_2), x_2]\} n_1(\vec{x}) d\vec{S} = \int_{\partial\Omega} f(x_1, x_2) n_1(\vec{x}) d\vec{S} \quad (1.3.7)$$

也即是,将边界按照 $n_1(\vec{x})=0$ 分成两半,由于参与积分的点 (x_1, x_2) 都在边界上,因此将两半合起来即构成了上式,这个结论对偏微分 $f_{x_2}(x_1, x_2)$ 同样是成立的. 相应的,此结论可以推广到更高维的空间,对二维空间而言, $d\vec{S}$ 是曲线的微小长度,对三维空间来说, $d\vec{S}$ 就是一个微小的曲面. 同样,可以考虑函数组 $\vec{u}(\vec{x}) = (u^1(\vec{x}), u^2(\vec{x}), \dots, u^n(\vec{x}))$, 并引进散度算子

$$\operatorname{div} \vec{u}(\vec{x}) = \frac{\partial u^1}{\partial x_1}(\vec{x}) + \frac{\partial u^2}{\partial x_2}(\vec{x}) + \dots + \frac{\partial u^n}{\partial x_n}(\vec{x}) \quad (1.3.8)$$

则下式

$$\iint \dots \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{u}(\vec{x}) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int \dots \int_{\partial\Omega} \vec{u}(\vec{x}) n(\vec{x}) d\vec{S} \quad (1.3.9)$$

成立(即散度定理),其中

$$\vec{u}(\vec{x}) n(\vec{x}) = u^1(\vec{x}) n_1(\vec{x}) + u^2(\vec{x}) n_2(\vec{x}) + \dots + u^n(\vec{x}) n_n(\vec{x})$$

同样地,还可以将分部积分推广到更高维空间中去. 取两个函数 $v(\vec{x}), w(\vec{x})$, 且令 $\vec{u}(\vec{x}) = v(\vec{x}) \nabla w(\vec{x}) = (v(\vec{x}) w_{x_1}(\vec{x}), v(\vec{x}) w_{x_2}(\vec{x}), \dots, v(\vec{x}) w_{x_n}(\vec{x}))$, 利用散度算子式(1.3.8)可得

$$\operatorname{div} \vec{u}(\vec{x}) = \nabla v(\vec{x}) \nabla w(\vec{x}) + v(\vec{x}) \Delta w(\vec{x}) \quad (1.3.10)$$

其中, $\Delta w(\vec{x}) = \frac{\partial^2 w(\vec{x})}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w(\vec{x})}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 w(\vec{x})}{\partial x_n^2}$, Δ 称为拉普拉斯算子. 结合上式与式

(1.3.9)的结论,可得

$$\begin{aligned} & \iint \dots \int_{\Omega} \nabla v(\vec{x}) \nabla w(\vec{x}) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \iint \dots \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{u}(\vec{x}) dx_1 dx_2 \dots dx_n - \iint \dots \int_{\Omega} v(\vec{x}) \Delta w(\vec{x}) dx_1 dx_2 \dots dx_n \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

记 $\frac{\partial w}{\partial n}(\vec{x}) = \nabla w(\vec{x}) \vec{n}(\vec{x})$ 是函数 $w(x)$ 在外法线方向 $\vec{n}(\vec{x})$ 上的方向导数,从而上式可

化成

$$\begin{aligned} & \iint \cdots \int_{\Omega} \nabla v(\vec{x}) \nabla w(\vec{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \iint \cdots \int_{\Omega} v(\vec{x}) \frac{\partial w}{\partial n}(\vec{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n - \iint \cdots \int_{\Omega} v(\vec{x}) \Delta w(\vec{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

利用散度定理可以导出流体不可压缩的偏微分方程, 现设 $\vec{u}(\vec{x}) = (u^1(\vec{x}), u^2(\vec{x}), u^3(\vec{x}))$ 是流体在点 (x_1, x_2, x_3) 的流速, $\vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x})$ 是流速 $\vec{u}(\vec{x})$ 在外法线单位向量 $\vec{n}(\vec{x})$ 的分量, 是流体流出边界 $\partial\Omega$ 的速率, 既然流体不可压缩, 则流进流出一个封闭区域曲面 $\partial\Omega$ 的流体总量为 0 (即流体运动时单位体积的改变率为 0), 即

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) d\vec{S} = 0 \quad (1.3.13)$$

由散度定理式 (1.3.9), 比较等式左右两端, 可得出流体不可压缩性的偏微分方程

$$\operatorname{div} \vec{u}(\vec{x}) = 0 \quad (1.3.14)$$

散度是一个数量函数, 在图像处理中有重要的应用, 散度具有如下性质:

$$(1) \operatorname{div}[a\vec{u}(\vec{x}) + b\vec{v}(\vec{x})] = a\operatorname{div}\vec{u}(\vec{x}) + b\operatorname{div}\vec{v}(\vec{x}), a, b \text{ 是常数}; \quad (1.3.15)$$

(2) 若 $f(\vec{x})$ 的梯度 $\nabla f(\vec{x})$ 存在, 则

$$\operatorname{div}(f(\vec{x})\vec{u}(\vec{x})) = f(\vec{x})\operatorname{div}\vec{u}(\vec{x}) + \vec{u}(\vec{x}) \cdot \nabla f(\vec{x}) \quad (1.3.16)$$

1.4 常见偏微分方程

偏微分方程包括线性和非线性方程, 其中非线性偏微分方程的求解麻烦, 线性方程求解相对容易. 在求解的过程中, 常常通过简化, 将非线性方程转化为线性方程. 这里简要介绍几种常见的偏微分方程, 包括波动方程、热扩散方程、孤子方程等.

1.4.1 波动方程

波在自然现象中是很常见的, 如水波、光波、声波等. 以声音为例, 气体是可压缩的, 其压力 $P(\rho)$ 与密度 $\rho(\vec{x}, t)$ 相关 (密度是位置和时间的函数), 如氢气 $P(\rho) = \rho^{\frac{5}{3}}$, 氧气 $P(\rho) = \rho^{\frac{7}{5}}$, 同时气体还有速度 $\vec{u}(\vec{x}, t)$. 由质量守恒和动量守恒定律, 先讨论在某一区域 Ω 内气体质量 $\iiint_{\Omega} \rho(\vec{x}, t) dx_1 dx_2 dx_3$ 随时间的变化, 等于由边界 $\partial\Omega$ 在单位时间内流进的质量 m , 即

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho(\vec{x}, t) dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\Omega} m d\vec{S} \quad (1.4.1)$$

而 $m = \rho\vec{u}(\vec{x}, t) \cdot (-\vec{n}(\vec{x}))$ 是密度 $\rho(\vec{x}, t)$ 与速度 $\vec{u}(\vec{x}, t)$ 在内法线方向 $-\vec{n}(\vec{x})$ 的分量 $-\vec{u}$ 和 $\vec{n}$ 的乘积 $-\vec{u} \cdot \vec{n}$. 据此可得质量守恒

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho(\vec{x}, t) dx_1 dx_2 dx_3 + \iint_{\partial\Omega} \rho \vec{u}(\vec{x}, t) \vec{n}(\vec{x}) d\vec{S}(\vec{x}) = 0 \quad (1.4.2)$$

对于动量守恒,并且对各方向的动量 ρu_i 随着时间的变化情况,除了前面谈到的流量影响外,还需要考虑其他作用,如流体黏性. 欧拉方程只考虑由压力 $P(\rho)$ 在 x_i 方向的分量 $P(\rho)n_i$ 的影响,综合起来,构建如下三个方程

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho u_i(\vec{x}, t) dx_1 dx_2 dx_3 + \iint_{\partial\Omega} \{ \rho u_i \vec{u}(\vec{x}, t) \vec{n}(\vec{x}) + P[\rho(\vec{x}, t)] \cdot \vec{n}_i(\vec{x}) \} d\vec{S}(\vec{x}) \\ & = 0 \quad i=1, 2, 3 \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

根据散度定理式(1.3.9),可以将式(1.4.2)和式(1.4.3)中边界 $\partial\Omega$ 的积分改写为在区域 Ω 的积分,从而易得

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \quad (1.4.4)$$

$$(\rho u_i)_t + \operatorname{div}(\rho u_i u) + (P(\rho))_{x_i} = 0 \quad i=1, 2, 3 \quad (1.4.5)$$

由于上述两组欧拉方程是非线性的,如果只研究声音的传播,可以将其线性化. 设环境是在平静无风($\vec{u} \approx 0$)、常密度($\rho \approx \rho_0$)的情况下,则式(1.4.4)可改写为

$$\begin{aligned} & \rho_t + \rho u_{1x_1} + \rho u_{2x_2} + \rho u_{3x_3} + \rho_{x_1} u_1 + \rho_{x_2} u_2 + \rho_{x_3} u_3 \\ & \approx \rho_t + \rho u_{1x_1} + \rho u_{2x_2} + \rho u_{3x_3} = 0 \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

对于动量守恒,有

$$P(\rho)_{x_i} \approx P'(\rho_0) \rho_{x_i} \quad (1.4.7)$$

从而式(1.4.5)的线性化方程为

$$\rho_0 u_{it} + C^2 \rho_{x_i} = 0 \quad i=1, 2, 3 \quad (1.4.8)$$

引入 $C^2 = P'(\rho_0)$ 称为声速. 可将式(1.4.6)和式(1.4.8)合并成

$$\rho_{tt} = C^2 (\rho_{x_1 x_1} + \rho_{x_2 x_2} + \rho_{x_3 x_3}) \quad (1.4.9)$$

这就是波动方程,一般写成

$$u_{tt} = C^2 \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = C^2 \Delta u \quad u = u(x_1, \dots, x_n, t) \quad (1.4.10)$$

其中, Δ 为拉普拉斯算子. 该方程在任何方向 $\vec{\xi}(\vec{x})$, $|\vec{\xi}(\vec{x})|^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 = 1$ 上有行波解,即

$$u(\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x} \cdot \vec{\xi} - Ct) \quad (1.4.11)$$

将式(1.4.11)直接代入式(1.4.10)可得

$$u_{tt} = C^2 \varphi'' \quad (1.4.12)$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \varphi'' \quad (1.4.13)$$

从而可验证式(1.4.10). 它说明,不管波的形状 φ 和方向 $\vec{\xi}$ 如何,它将以速度 C 向前进.

1.4.2 热扩散方程

自然现象中,有许多是扩散性的,如热扩散. 设物体的密度 ρ 和比热 α 为常数,物体温