高中解析幾何學

教育部審定二十四年五月卅一日執照教字第五十八號

民國三十六年四月十四版

新課程標準適用
高中解析幾何學（全一冊）
◎定價國幣一元
（郵運匯費另加）

編著者　黃　泰
修訂者　徐子豪
校閱者　段子燮
發行人　顧樹森
中華書局股份有限公司代表
印刷者　中華書局永寧印刷廠
上海澳門路四六九號
發行處　各埠中華書局

（七七四九）港

我國於高中算學,向少良書,如解析幾何其一也.以致教者多取材於英文原本.然以東西異地,教育異制,而必按書以授,無怪教者之事倍而功半也.況黌序講學,一國之文化所繫,乃仰給於西文,殊爲不合.黃君階平,前在東南大學肄業時,對於算學,甚有研究.畢業後講授於江蘇省立揚州中學高中部,常感英文原本之不合用.爰列取各書之精密者,就其平日所得,而刪蕪擷英,用中文輯之,以爲教本,年來成績甚著,日前以美國史蓋蕣三氏解析幾何爲藍本輯成高中解析幾何一書,請益於余,余覽其程序井然,於我國中學,甚爲適宜.而製曲線等之分類詳明,不憚繁述,尤可爲大學一年級之參考書.是眞能融西哲之學爲國用者,因勸其付梓,以公國人,并深望其本斯志於幾何,三角,大代數者,亦有所貢獻,庶我國人講學不借乎外語也,特爲之序.

民國二十年四月段子燮序於國立中央大學算學系

新課程標準適用

高中解析幾何學目次

頁數

第一章　點及坐標…………1—18

第二章　函數變跡總論…………19—41

第三章　一次式的變跡　直線…………42—59

第四章　二次式的變跡　圓…………60—74

第五章　二次式的變跡　拋線　橢圓　雙曲線…………75—97

第六章　移軸術…………98—114

第七章　切線…………115—133

第八章　極坐標…………134—151

第九章　一般二次方程式…………152—167

第十章　高級平面曲線…………168—196

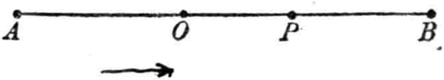
新課程標準適用

高中解析幾何學

第一章

點及坐標

1. 方向綫段 點,是幾何學上的一個基本原素.他位置的相關性質,和數學上的數量(Magnitude)一樣,所以要決定一點的**位置**,必須與其他標準點或綫,相關乃可.如於直綫 AB 上,要確定 P 點位置,必須另取一點 O,作爲標準,再量 O, P 距離,則 P 點的位置定了.此 OP 之長,稱爲 P 點在 AB 綫上的**坐標**,而 O 點叫做**原點**(Origin).



通常原點的右向,稱爲正向(Positive direction),其左向稱爲負向(Negative direction),所以 P 點在原點右方,其坐標恆爲正,若在原點左方,則爲負.

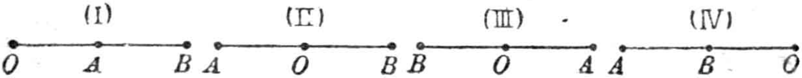
凡一直綫,已確定了方向的,便叫做**方向綫**(Directed line).如 AB 綫,從 A 到 B 是正向,則以符號 $\overrightarrow{AB}$ 或 AB 表之.若寫成 BA,就表示其長與 $\overrightarrow{AB}$ 等,而方向相反,

所以　$BA=-AB$.

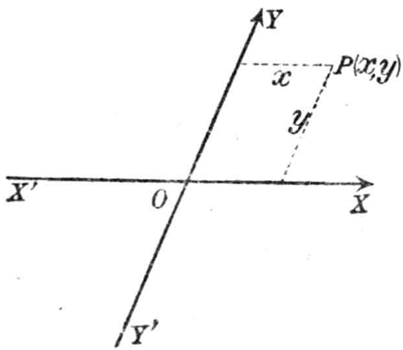
在一方向綫上,取一點 O 做原點,則其他任何兩點 A, B 間的距離,總有下面的關係:

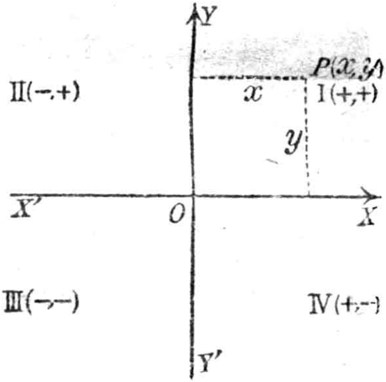
$$AB=OB-OA.$$

讀者試就下列種種情形分别驗之:



2. 點之坐標　上節僅述 P 點在一直綫上.若 P 點在一平面內,要决定他的位置,須取相交兩方向綫做軸(Axes),如 $X'X$ 與 $Y'Y$ 相交於 O,然後作過 P 點與此兩軸平行的直綫,如下圖,自 P 點至其與二軸交點距離,叫做 P 點的**坐標**(Coördinates),方向綫 $X'X$ 與 $Y'Y$ 叫做坐標軸,O 點叫做原點.





P點與x軸平行的坐標,叫做**橫坐標**(Abscissas);同y軸平行的坐標,叫做**縱坐標**(Ordinates).P點的坐標量,常書爲$P(x, y)$,在前的文字常代橫坐標,在後的文字常代縱坐標.

兩坐標軸的交角,本無一定,通常分做兩種:(1)兩坐標軸不垂直時,叫**斜坐標**(Oblique coördinates);(2)兩坐標軸相垂直,便叫**正坐標**(Rectangular coördinates).

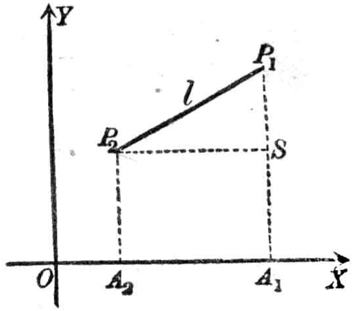
正坐標的運算,較簡於斜坐標,解析幾何上的討論,凡未指明斜坐標時,均指正坐標.

兩軸相交,將平面分而爲四,其每部分,稱爲象限(Quadrant).依反鐘向的次序,名爲I, II, III, IV四象限,看上頁右圖.

以原點爲標準,再按方向的正負,則第一象限的縱橫坐標皆爲正;第二象限的縱坐標爲正,橫的爲負;第三象限的縱橫坐標皆爲負;第四象限,縱的爲負,橫的爲正.讀者學三角時當知道了.

3. <u>兩點的距離公式</u>　**定理**　**任意兩點$P_1(x_1, y_1)$ $P_2(x_2, y_2)$間的距離公式爲**

$$l=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \qquad (1)$$



證　作 P_1, P_2 的縱坐標，再作 $P_2S \parallel x$ 軸，得直角三角形 P_1P_2S.

$$P_1S = y_1 - y_2$$

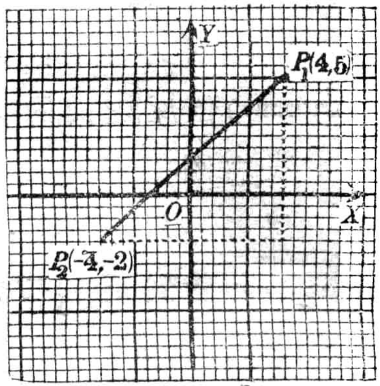
$$P_2S = x_1 - x_2$$

$$P_1P_2 = \sqrt{\overline{P_1S}^2 + \overline{P_2S}^2}$$

$$\therefore\quad l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

如果 P_1, P_2 在不同的象限內，也可依同法證明.

例　題



求 $P_1(4, 5), P_2(-4, -2)$ 間的距離.

解　已知 $x_1 = 4, x_2 = -4,$

$y_1 = 5,\ y_2 = -2.$

$$\therefore\quad l = \sqrt{(4+4)^2 + (5+2)^2}$$

$$= 10.6.$$

習　題　一

1. 作以下各點：(0,2), (3,−1), (4,7), (−3,6), (−4,3), (−5,−8), (1,−7), (−9,11), (9,0).

2. 作下面的三角形：

(a) $(2,3)$, $(-2,5)$, $(-5,-7)$.

(b) $(-1,8)$, $(-3,-4)$, $(6,5)$.

(c) $(-7,-4)$, $(0,3)$, $(5,-7)$.

3. 求下列兩點間的距離:

(a) $(1,3)$, $(-5,-7)$. (c) $(5,8)$, $(0,-3)$.

(b) $(2,-3)$, $(-3,2)$. (d) $(-1,-2)$, $(3,4)$.

4. 求一個動點的軌跡: (a)其橫坐標恆為5. (b)其縱坐標恆為7. (c)其縱橫兩坐標相等.(d)其縱橫兩坐標同值異號.

5. 求2題中各三角形的周圍.

6. 已知下列兩點間的距離,求 x 或 y.

(a) $P_1(0, 1)$, $P_2(x, 6)$. $l=10$.

(b) $P_1(-3, 5)$, $P_2(x, -6)$. $l=16$.

(c) $P_1(1, y)$, $P_2(2, 3)$. $l=20$.

(d) $P_1(+15, -4)$, $P_2(4, y)$. $l=5$.

(e) $P_1(6, 5)$, $P_2(0, y)$. $l=11$.

7. 證明下面的三角形是等腰三角形.

(a) $(2, 4)$, $(5, 1)$, $(6, 5)$.

(b) $(2, 6)$, $(6, 2)$, $(-3, -3)$.

8. 證明 $(3, 3)$, $(-3, -3)$, $(3\sqrt{3}, -3\sqrt{3})$ 是三等邊三角形.

9. 證明 $(3, 4)$, $(2, 1+\sqrt{12})$, $(4, 3)$ 三點,在同一圓周上,圓心是 $(1,1)$.

10. 有等邊三角形,每邊長8寸,底邊在 x 軸上,以原點為中點.求頂點的坐標.

11. 有正方形,每邊長 6 寸,對角綫在坐標軸上,求四個頂點的坐標.

12. 設 $(0, 0)$ $(0, a)$, (b, c) 是一個平行四邊形的三頂點,求第四個頂點的坐標.

13. 假如坐標軸的交角是 θ,證明 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$兩點間的距離公式是

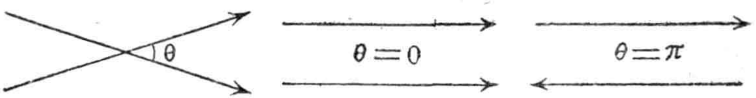
$$l=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2-2(x_1-x_2)(y_1-y_2)\cos\theta}.$$

14. 假如 P_1, P_2 兩點的縱坐標相等,證明 P_1, P_2 的長,等於他們的橫坐標之差,卽

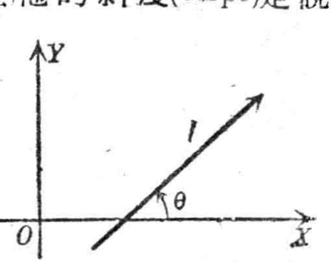
$$d=x_1-x_2. \qquad (1)$$

讀者分三種情形,說明(1)式都合用.

4. <u>斜度</u>　兩方向綫的交角,是指其兩正向間的交角.若兩綫同向且平行,則交角爲零;若是異向而平行,則交角爲 π.



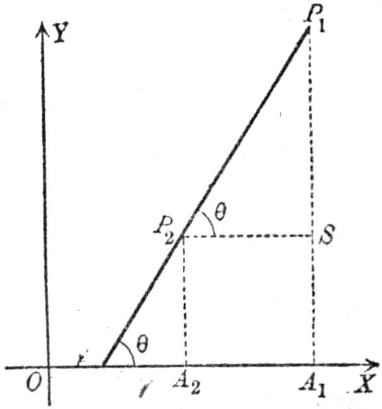
取一直綫向上的方向爲正,他的斜度(Slope)是說他與 x 軸所成交角的正切.例如直綫 l 與 x 軸的交角爲 θ,那麼 l 的斜度就是 $\tan\theta$. 通常用 m 來表示,就是



$$m=\tan\theta.$$

定理　經過 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 的直綫斜度是

$$m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}. \qquad (II)$$



證　作 P_2S 與 x 軸平行,

則　$\angle P_1P_2S=\theta$,

$P_1S=y_1-y_2$,

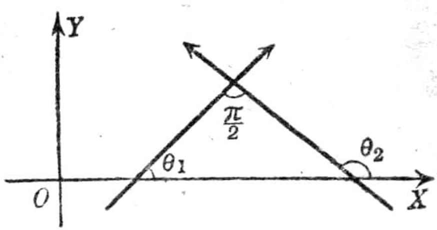
$P_2S=x_1-x_2$,

$\therefore \tan\theta=\frac{P_1S}{P_2S}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

5. **定理**　(*a*)平行兩直綫的斜度必相等,(*b*)正交兩直綫的斜度互為負逆數.

證　(*a*)兩直綫既然相平行,所以與 x 軸做成等交角,因而正切亦相等,即

$m_1=m_2$.



(*b*) 若兩綫相垂直,

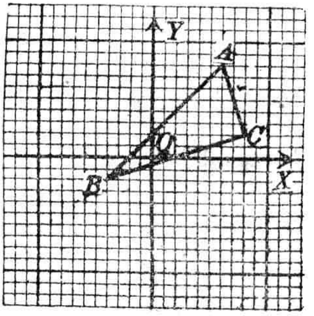
則　$\tan\theta_2=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta_1\right)$,

$=-\cot\theta_1=-\frac{1}{\tan\theta_1}$,

即　$m_2=-\frac{1}{m_1}$.

例　題

求證 $A(3,4)\ B(-2,-1)\ C(4,1)$ 是直角三角形.

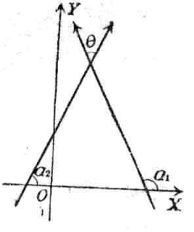


解　由 B, C 兩點求得 BC 的斜度 $m_1=\frac{-1-1}{-2-4}=\frac{1}{3}$.

同法求得 AC 的斜度 $m_2=-3$, AB 的斜度 $m_3=1$. m_1, m_2 旣互爲負逆數,所以 C 角是直角.

6. <u>交角公式</u>　**定理　設 m_1, m_2 爲兩方向綫的斜度,而以 m_1 爲斜度的角,大於以 m_2 爲斜度的角,此兩直綫的交角爲 θ,則**

$$\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}. \quad (III)$$



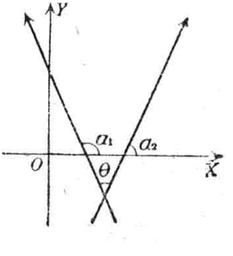
證　如圖,以 α_1 表較大之角,

總有 $\alpha_1=\theta+\alpha_2$,

$$\therefore\quad \theta=\alpha_1-\alpha_2.$$

$$\therefore\quad \tan\theta=\tan(\alpha_1-\alpha_2)$$

$$=\frac{\tan\alpha_1-\tan\alpha_2}{1+\tan\alpha_1\tan\alpha_2}.$$

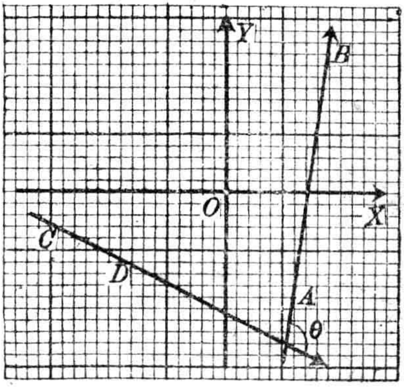


以 $m_1=\tan\alpha_1$, $m_2=\tan\alpha_2$,

代入上式,即得 $\tan\theta=\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$.

例題

求 $A(2,-3)\,B(3,4)$, $C(-5,-1)\,D(-3,-2)$ 二直綫間的交角



解 AB 的斜度是

$$m_1=\frac{-3-4}{2-3}=7,$$

CD 的斜度是

$$m_2=\frac{-1+2}{-5+3}=-\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad \tan\theta=\frac{7+\frac{1}{2}}{1-\frac{7}{2}}=\frac{15}{-5}=-3.$$

所以交角 $\theta=\tan^{-1}(-3)$.

習題二

1. 求下列各點所決定的直綫斜度:

(a) $(2,3)$, $(6,-1)$.　　(d) $(2,2)$, $(4,4)$.

(b) $(-1,-5)$, $(2,7)$.　　(e) $(5,3)$, $(6,8)$.

(c) $(2.5,3.4)$, $(3,-5.7)$.　　(f) $(-7,8)$ $(2,5)$.

2. 求與坐標軸平行或垂直的直綫斜度.

3 求與下列各點決定的直綫(一)相平行的直綫斜度,(二)

相垂直的直綫斜度.

(a) (1, 3), (2, 5). (c) (1, 3), (6, —8).

(b) (—4, 5), (—5, —4). (d) (2, 3), (8, —7).

4. 證明下面每組的三點在一直綫上:

(a) (6, 6), (4, 7), (2, 8). (c) (4, 1), (0, 2), (—4, 3).

(b) (2, 1), (4, 2), (6, 3). (d) (—4, 2), (0, 0), (4, —2).

5. 從下列三角形內,指出那個是直角三角形?

(a) (2, 1), (3, —2), (—4, —1).

(b) (—3, 2), (1, —4), (1, 2).

(c) (6, 5), (4, —3), (—1, 2).

6. 求 5 題內各個三角形的三內角.

7. 分點 設 P_1, P_2 爲方向綫 AB 上的兩定點,再從 AB 上另取一點 P, 那麼 P 點就分 P_1P_2 爲兩分,成 P_1P, 同 PP_2. 這個 P 點,叫做 P_1P_2 的**分點**(Point of division).

如 P 點在 P_1P_2 內,就叫做**內分**;如 P 在 P_1P_2 外,便叫做**外分**.無論內分或外分,他分成兩綫分之比,總名之爲**分比**(Ratio of division).通常用 r 表分比,

即 $$r = \frac{P_1P}{PP_2}.$$

若是內分,則 P_1P 和 PP_2 同向,故 r 爲正;若是外分,則 P_1P 和 PP_2 異向,故 r 爲負.所以看分比 r 的正

負,便可斷定他是內分,還是外分.

分點定理 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ **之分點** $P(x, y)$ **的坐標量,可決定如下:**

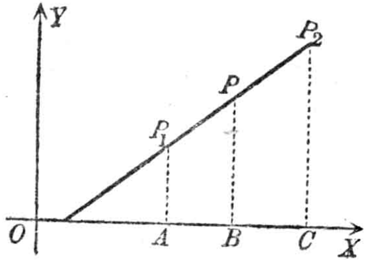
$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}, \quad y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}. \qquad (IV)$$

證 作 P_1A, PB, P_2C,平行於 y 軸.

依定義 $r=\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{AB}{BC}$.

但 $AB=x-x_1$, $BC=x_2-x$,

$\therefore \quad r=\frac{x-x_1}{x_2-x}$.



解之得 $x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}$.

依同理,作 P_1, P, P_2 的横坐標,

就得 $y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}$.

推論. 中點. **若** $P(x, y)$ **爲** $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ **的中點,則** $r=1$, **所以他的坐標是:**

$$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2), \quad y=\frac{1}{2}(y_1+y_2). \qquad (V)$$

例 題

已知 $P_1(3, 2), P_2(0, 4)$,分比 $r=\frac{1}{3}$,求分點 $P(x, y)$ 的坐標.

解 $x_1=3$, $x_2=0$, $y_1=2$, $y_2=4$.

由公式 $x=\frac{3+0}{1+\frac{1}{3}}=2.25$, $y=\frac{2+\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}}=2.5$.

習題三

1. 已知分比 r,求下列兩點連綫的分點:

(a) $(-3, -1), (4, 5), \quad r=\frac{1}{3}.$

(b) $(2, 3), (4, 1), \quad r=\frac{2}{3}.$

(c) $(-2, -5), (5, -4), \quad r=\frac{3}{4}.$

(d) $(-5, 4), (3, -2), \quad r=1.$

2. 求證直三角形斜邊中點,同三頂點等距離.

3. 求證三角形兩邊中點的連綫,必與第三邊平行,且等於他的二分之一.

4. 求證連接梯形不平行的兩邊中點,必與上下底平行,且等於上下底的半和.

5. 求證平行四邊形的兩個對角綫,互相平分.

6. 已知三角形的三邊中點是$(-1, 1), (4, -1), (-2, -5)$,求他的三頂點.

7. 求三角形 $A(x_1 y_1)$, $B(x_2 y_2)$, $C(x_3 y_3)$內三中綫的交點.

【提示】 求三中綫上距頂點為全長$\frac{2}{3}$處的點之坐標,而證其相合.

8. 證明任何四邊形中,(一)兩對對邊中點的連綫,必互相平分,(二)兩個對邊中點的連綫和兩個對角綫中點的連綫,也互相平分.

8. <u>面積</u> 若已知多邊形的頂點坐標,就能算出他的面積.今先述三角形的面積求法如次:

定理一 設 $P_0(0,0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 爲三角形的三頂點,他的面積就是 $\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$.

證 設 $\alpha = \angle XOP_1$, $\beta = \angle XOP_2$, $\theta = \angle P_1OP_2$,

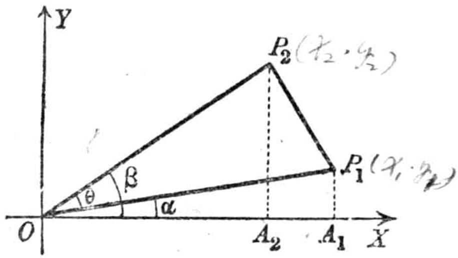
$$\therefore \quad \theta = \beta - \alpha.$$

由三角形面積公式

$$\triangle P_1P_2O = \frac{1}{2}OP_1 \cdot OP_2 \sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}OP_1 \cdot OP_2 \sin(\beta - \alpha)$$

$$= \frac{1}{2}OP_1 \cdot OP_2 \{\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta\}.$$



$$\sin\alpha = \frac{P_1A_1}{OP_1}, \qquad \sin\beta = \frac{P_2A_2}{OP_2},$$

$$\cos\alpha = \frac{OA_1}{OP_1}, \qquad \cos\beta = \frac{OA_2}{OP_2}.$$

代入上式,即得

$$\triangle P_1P_2O = \frac{1}{2}OP_1 \cdot OP_2 \left\{\frac{x_1y_2}{OP_1 \cdot OP_2} - \frac{x_2y_1}{OP_1 \cdot OP_2}\right\}.$$

$$\therefore \quad \triangle P_1P_2O = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1). \qquad (VI)$$