高等学校工科数学系列丛书

复变函数与积分变换学习指导与习题精解

主　编　赵景霞　罗跃生

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

复变函数与积分变换
学习指导与习题精解

主编　赵景霞　罗跃生

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书是与哈尔滨工程大学出版社出版的《复变函数与积分变换》一书配套编写的学习辅导书。对应《复变函数与积分变换》一书的每一章，都对其知识要点做出总结，并给出一些思考题供学生分析讨论，个别思考题给出了参考答案。针对每一章的内容，都配备相应的典型例题和解答。对于其中相对复杂的问题，给出了分析思路和所需知识点等方面的总结。并且配有一定数量的同步训练题及其解答。同步训练题和解答是分开的，便于学生练习和参考。

本书可作为高校大学生学习《复变函数与积分变换》一书的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换学习指导与习题精解/赵景霞，罗跃生主编. —哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2011.9

ISBN 978-7-5661-0251-5

Ⅰ.①复… Ⅱ.①赵… ②罗… Ⅲ.①复变函数-高等学校-数学参考资料 ②积分变换-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O174.5 ②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 177599 号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 黑龙江省地质测绘印制中心
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 11
字　　数 231 千字
版　　次 2011 年 9 月第 1 版
印　　次 2011 年 9 月第 1 次印刷
定　　价 23.00 元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

高等学校工科数学系列丛书编审委员会

前言

本书是由哈尔滨工程大学出版社出版的《复变函数与积分变换》一书配套编写的学习辅导书。对应《复变函数与积分变换》一书的每一章，对其知识要点做出总结，并给出一些思考题供学生分析讨论，个别思考题给出了参考答案。同时针对每一章的内容，都配备相应的典型例题和解答。对于其中相对复杂的问题，给出了分析思路和所需知识点等方面的总结。并且配有一定数量的同步训练题及其解答。同步训练题和解答是分开的，便于学生练习和参考。对于《复变函数与积分变换》教材中的部分习题给出了同步精选习题精解。参加编写本书的有国萃（第1章）、杨丽宏（第2章）、葛斌（第3章）、郑雄波（第4，7章）、陈涛、徐新军（第5章）、姜劲（第6章）、王淑娟（第8章）。全书由赵景霞、罗跃生统稿。由于本书编写的时间仓促、不妥甚至错误之处在所难免，敬请读者谅解并希望指出不妥之处，帮助我们完善本学习辅导书。

编　者

2011.7 于哈尔滨

目录

第 1 章　复数与复变函数 …… 1

1.1　知识要点 …… 1

1.2　典型例题 …… 6

1.3　同步训练题 …… 11

1.4　同步训练题答案 …… 12

1.5　教材同步精选习题精解 …… 13

思考题 …… 19

第 2 章　解析函数 …… 20

2.1　知识要点 …… 20

2.2　典型例题 …… 23

2.3　同步训练题 …… 28

2.4　同步训练题答案 …… 30

2.5　教材同步精选习题精解 …… 35

第 3 章　复变函数的积分 …… 39

3.1　知识要点 …… 39

3.2　典型例题 …… 41

3.3　同步训练题 …… 47

3.4　同步训练题答案 …… 49

3.5　教材同步精选习题精解 …… 52

第 4 章　级数 …… 55

4.1　知识要点 …… 55

4.2　典型例题 …… 58

4.3　同步训练题 …… 63

4.4　同步训练题答案 …… 65

4.5　教材同步精选习题精解 …… 68

第 5 章　留数定理及其应用 …… 72
5.1　知识要点 …… 72
5.2　典型例题 …… 74
5.3　同步训练题 …… 78
5.4　同步训练题答案 …… 79
5.5　教材同步精选习题精解 …… 80
思考题 …… 83
第 6 章　保形映射 …… 84
6.1　知识要点 …… 84
6.2　典型例题 …… 86
6.3　同步训练题 …… 93
6.4　同步训练题答案 …… 95
6.5　教材同步精选习题精解 …… 98
第 7 章　傅立叶变换 …… 100
7.1　知识要点 …… 100
7.2　典型例题 …… 103
7.3　同步训练题 …… 109
7.4　同步训练题答案 …… 110
7.5　教材同步精选习题精解 …… 113
第 8 章　拉普拉斯变换及其应用 …… 115
8.1　知识要点 …… 115
8.2　典型例题 …… 117
8.3　同步训练题 …… 128
8.4　同步训练题答案 …… 131
8.5　教材同步精选习题精解 …… 143
哈尔滨工程大学本科生考试试卷 …… 152
复变函数与积分变换参考答案与评分标准(A 卷) …… 157
复变函数与积分变换模拟试题 …… 161
复变函数与积分变换模拟试题答案 …… 163

第1章　复数与复变函数

1.1　知识要点

一、复数及其运算

1. 形如$z=x+\mathrm{i}y$或$z=x+y\mathrm{i}$的数,称为复数,其中x称为复数z的实部,y称为复数z的虚部,x,y都为实数,记为$x=\mathrm{Re}z,y=\mathrm{Im}z$. $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$,称为虚单位.

2. 两个复数$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$与$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$相等,当且仅当它们的实部和虚部分别对应相等,即$x_1=x_2$且$y_1=y_2$.

3. 设复数$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1,z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$,则复数四则运算规定:

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2);$$

$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1);$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}}+\mathrm{i}\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}},(z_2\neq 0).$$

从以上的四则运算还可以看出

$$\mathrm{Re}(z_1\pm z_2)=\mathrm{Re}z_1\pm\mathrm{Re}z_2;$$

$$\mathrm{Im}(z_1\pm z_2)=\mathrm{Im}z_1\pm\mathrm{Im}z_2.$$

4. 实部相同而虚部互为相反数的两个复数$x+\mathrm{i}y$和$x-\mathrm{i}y$称为互为共轭复数,复数z的共扼复数用$\bar{z}$表示,如果$z=x+\mathrm{i}y$,则记$\bar{z}=\overline{(x+\mathrm{i}y)}=x-\mathrm{i}y$.

5. 共轭复数的性质:

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2,\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2,\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}(z_2\neq 0)$;

(2) $\bar{\bar{z}}=z$;

(3) $|z|=|\bar{z}|$;

(4) $|z|^2=z\cdot\bar{z}=(\mathrm{Re}z)^2+(\mathrm{Im}z)^2$;

(5) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}z,z-\bar{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}z$.

类似的结果也可以推广到n个复数的运算上.

二、复数的表示法

1. 复数的点表示法

我们把平面上的点(x,y)与复数$z=x+\mathrm{i}y$对应,就建立了平面上全部的点和全体复数间的一一对应关系. 通常称x轴为实轴,y轴为虚轴,这样表示复数z的平面称为复平面或z平面.

2. 复数的向量表示法

复数$z=x+\mathrm{i}y$与从原点O到点z所引的向量$\boldsymbol{Oz}$也构成一一对应关系. 因此,也可以用向量$\boldsymbol{Oz}$来表示复数$z=x+\mathrm{i}y$,其中x,y顺次等于$\boldsymbol{Oz}$沿x轴与y轴的分量.

3. 复数的三角表示式

向量$\boldsymbol{Oz}$的长度称为复数z的模,记为$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. 向量$\boldsymbol{Oz}$与实轴正向的夹角称为复数z的辐角,记为$\mathrm{Arg}\,z$. 满足

$$\tan(\mathrm{Arg}\,z)=\tan\theta=\frac{y}{x}.$$

记$\arg z$为$\mathrm{Arg}\,z$的主值或z的主辐角,满足

$-\pi<\arg z\leqslant\pi$;

$\mathrm{Arg}\,z=\arg z+2k\pi,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

辐角主值$\arg z$可以由$\arctan\frac{y}{x}$按如下关系来确定

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x}, & \text{当 } x>0 \text{ 时}\\ \frac{\pi}{2}, & \text{当 } x=0,y>0 \text{ 时}\\ \arctan\frac{y}{x}+\pi, & \text{当 } x<0,y\geqslant0 \text{ 时}\\ \arctan\frac{y}{x}-\pi, & \text{当 } x<0,y<0 \text{ 时}\\ -\frac{\pi}{2}, & \text{当 } x=0,y<0 \text{ 时}\end{cases}$$

特别地,一对共轭复数z和$\bar{z}$在复平面的位置是关于实轴对称的,所以若z不在原点和负实轴上,就有

$$\arg\bar{z}=-\arg z$$

通过直角坐标与极坐标的关系,我们可以用复数的模与辐角来表示非零复数z,有

$$z=x+\mathrm{i}y=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta).$$

则称上式为非零复数z的三角表示式. 其中

$$\begin{cases} r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \tan(\operatorname{Arg} z) = \dfrac{y}{x} \\ x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \end{cases}$$

4. 复数的指数表示式

在 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ 的基础上，z 又可以表示为

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

即 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$. 称上式为非零复数 z 的指数表示式.

三、无穷远点与复球面

取一个在原点 O 与复平面相切的球面. 过原点作一条垂直于复平面的直线与球面交于另一点 N，N 称为北极，原点 O 记为点 S，S 称为南极. 在复平面上任取一点 z，用直线段将 N 与复球面上的一点 z 相连，此线段交球面于 P. 这样就建立球面上（不包括北极 N）的点与复平面上的点一一对应. 上述球面即为复球面. N 点称为无穷远点.

四、复数的乘幂与方根

1. 复数 z_1 与 z_2 的乘积和商满足以下公式

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \ (z_2 \neq 0);$$

$$\operatorname{Arg} z_1 z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2;$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

2. 若记 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$，则

$$z^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta);$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1).$$

五、区域

1. 邻域：设 $z_0 \in C$，其中 C 为复数域，$\varepsilon \in (0, +\infty)$. z_0 的 ε - 邻域 $U(z_0, \varepsilon)$ 定义为

$$\{z \mid |z - z_0| < \varepsilon, z \in C\},$$

称集

$$\{z \mid |z - z_0| \leqslant \varepsilon, z \in C\}$$

为以 z_0 为中心，ε 为半径的闭圆盘，记为 $\overline{U}(z_0, \varepsilon)$.

2. 内点:若存在 $r>0$,使得 $U(z_0,r)\subset E$,则称 z_0 为 E 的内点.所有点为内点的集合称为开集.

3. 边界点:若对任意 $r>0$,$U(z_0,r)$ 中都有 E 中的点和不属于 E 中的点,则称 z_0 为 E 的边界点.E 的边界点全体称为 E 的边界.

4. 区域:复平面上的非空集合 D,如果 D 是开集并且 D 中任意两点可以用属于 D 的折线连起来,则称 D 是一个区域.

区域 D 内及其边界上全部点所组成的集称为闭区域;如果存在 $M>0$,使得 D 内的每一个点 z_0 都满足 $|z_0|<M$,则称 D 是有界区域,否则为无界区域.

5. 连续曲线:设已给

$$z=z(t),(a\leqslant t\leqslant b),$$

如果 $\mathrm{Re}z(t)$ 和 $\mathrm{Im}z(t)$ 都在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则称集合 $\{z(t)\mid t\in[a,b]\}$ 为一条连续曲线.

6. 若当曲线:如果对 $[a,b]$ 上任意不同两点 t_1 及 t_2,但不同时是 $[a,b]$ 的端点,我们有 $z(t_1)\neq z(t_2)$,那么上述集合称为一条简单连续曲线,或若当曲线.若还有 $z(a)=z(b)$,则称为一条简单连续闭曲线,或若当闭曲线.

7. 光滑曲线:如果 $\mathrm{Re}z(t)$ 和 $\mathrm{Im}z(t)$ 都在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且有连续的导函数,在 $[a,b]$ 上,$z'(t)\neq 0$ 则称集合 $\{z(t)\mid t\in[a,b]\}$ 为一条光滑曲线;类似地,可以定义分段光滑曲线.

8. 若当定理:任意一条若当闭曲线 C 把整个复平面分成两部分:一部分是有界的,称为 C 的内部;另一部分是无界的,称为 C 的外部.C 是这两部分的共同边界.

9. 连通区域:设 D 是一个区域,在复平面上,如果 D 内任何简单闭曲线的内部仍属于 D,则称 D 是单连通区域,否则称 D 是多连通区域.

六、复变函数的概念、极限及其连续性

1. 复变函数:设 D 为复平面上一个非空复数集合.如果有一个法则 f,使得任意 $z=x+\mathrm{i}y\in D$,存在 $w=u+\mathrm{i}v$ 与之对应,则称 f 为 D 上的一个复变函数,记为

$$w=f(z).$$

其中 z 叫做自变量,w 叫做因变量,集合 D 叫做函数的定义域.

值得注意的是:此定义与传统的定义不同,它没有明确指出是否只有一个 w 和 z 对应;此外,此定义还说明单值复变函数 $w=f(z)$ 等价于两个实变量的实值函数,即若

$$z=x+\mathrm{i}y,$$

则

$$w=\mathrm{Re}f(z)+\mathrm{i}\mathrm{Im}f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y).$$

故 $w=f(z)$ 等价于两个二元实变函数 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$,它们是关于实变量 x 和 y 的函数.

2. 复变函数的几何表示——映射

我们这里定义的函数 f 也称为从 D 到复平面上的一个映射或映照. 把集合 D 表示在一个复平面上,称为 z 平面;把相应的函数值 $w=f(z)$ 表示在另一个复平面上,称为 w 平面.

我们从集合论的观点可以这样理解,令 $A=\{f(z)\mid z\in D\}$,记作 $A=f(D)$,我们称映射 $w=f(z)$ 把任意的 $z_0\in D$ 映射成为 $w_0=f(z_0)\in A$,把集合 G 映射成集合 A. 称 w_0 及 A 分别为 z_0 和 D 的象,而称 z_0 和 D 分别为 w_0 及 A 的原象.

若 $w=f(z)$ 把 D 中不同的点映射成 A 中不同的点,则称它是一个从 D 到 A 的双射.

3. 复变函数的极限

设函数 $w=f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\rho$ 内有定义,如果存在一个确定的数 A,对于任给 $\varepsilon>0$,可以找到一个与 ε 有关的正数 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得当 $0<|z-z_0|<\delta\leqslant\rho$ 时,恒有

$$|f(z)-A|<\varepsilon.$$

则称 A 为函数 $f(z)$ 当 z 趋于 z_0 时的极限,记作

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=A \text{ 或 } f(z)\to A(z\to z_0).$$

复变函数的极限定义中 $z\to z_0$ 的方式是任意的,这比一元函数 x 仅从左右两个方向趋于 x_0 时存在极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(z)$ 的要求更高.

4. 极限计算有以下两个定理

定理 1.1 $w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 $0<|z-z_0|<\rho$ 内有定义,其中 $z=x+\mathrm{i}y$,$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$,那么 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A=u_0+\mathrm{i}v_0$ 的充要条件是

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)=u_0,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)=v_0$$

这个定理告诉我们,求复变函数的极限可以转化为求该函数实部和虚部的极限,即两个二元函数的极限.

定理 1.2 若 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$,$\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=B$,那么

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\cdot g(z)]=A\cdot B$;

(3) $\lim\limits_{z\to z_0}[\dfrac{f(z)}{g(z)}]=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

5. 复变函数的连续性

设函数 $w=f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\rho$ 内有定义,如果 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$. 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续;如果 $f(z)$ 在 E 中每一点连续,则称 $f(z)$ 在 E 上连续.

关于连续性有以下两个定理.

定理 1.3 如果 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$,$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$,则 $f(z)$ 在 z_0 处连续的充要条件为

$$\lim_{x\to x_0,y\to y_0}u(x,y)=u(x_0,y_0),\quad \lim_{x\to x_0,y\to y_0}v(x,y)=v(x_0,y_0).$$

即一个复变函数的连续性等价于两个实变二元函数的连续性.

这里复变函数连续性的定义与一元实变函数连续性的定义相似,我们可以仿照证明下述结论.

定理 1.4 如果两个函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 均在 $z=z_0$ 处连续,那么这两个复变函数的加、减、乘、除(分母不等于零)也在 $z=z_0$ 处连续.

1.2 典型例题

例 1 求下列复数的模与辅角主值:

(1) $\sqrt{3}+i$;　　(2) $\dfrac{1}{3+2i}$;

(3) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n$;　　(4) $i^8-4i^{21}+i$.

解 (1) $|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}=2, \arg z=\arctan\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\pi}{6}$.

(2) $\dfrac{1}{3+2i}=\dfrac{3-2i}{(3-2i)(3+2i)}=\dfrac{3}{13}+\left(\dfrac{-2}{13}\right)i$,

$$|z|=\sqrt{\left(\frac{3}{13}\right)^2+\left(\frac{-2}{13}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{13}}, \arg z=-\arctan\frac{2}{3}.$$

(3) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n=(e^{i\pi/3})^n=\cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$,

$$|z|=1, \arg z=\frac{n\pi}{3}+2k\pi\left(-\pi<\frac{n\pi}{3}+2k\pi\leqslant\pi \text{ 的} k\right).$$

(4) $i^8-4i^{21}+i=(-1)^4-4i+i=1-3i$,

$$|z|=\sqrt{1+(-3)^2}=\sqrt{10}, \arg z=-\arctan 3.$$

例 2 求满足下列条件的复数 z.

(1) $z+|z|=2+i$;

(2) $z=3+ai$,且 $|z-2|<2$;

(3) $(1+2i)\bar{z}=4+3i$.

解 (1) 设 $z=x+iy$,则 $x+iy+\sqrt{x^2+y^2}=2+i$.

由 $x+\sqrt{x^2+y^2}=2, y=1$,得 $x=\dfrac{3}{4}$,故 $z=\dfrac{3}{4}+i$.

(2) 因为 $|z-2|=|3+ai-2|=\sqrt{1+a^2}<2$,所以 a 的值可取 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ 间任一实数,z 有无穷多个.

（3）因为 $\bar{z}=\dfrac{4+3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=2-\mathrm{i}$，所以 $z=2+\mathrm{i}$.

例 3 求下列复数的三角表示式与指数表示式.

（1）$1-\sqrt{3}\mathrm{i}$；

（2）$-\sqrt{12}-2\mathrm{i}$；

（3）$\dfrac{(\cos4\varphi-\mathrm{i}\sin4\varphi)^2}{(\cos3\varphi-\mathrm{i}\sin3\varphi)^3}$.

解 （1）因为 $|1-\sqrt{3}\mathrm{i}|=2$，$\mathrm{Arg}(1-\sqrt{3}\mathrm{i})=-\dfrac{\pi}{3}$，所以

$$1-\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}.$$

（2）因为 $|-\sqrt{12}-2\mathrm{i}|=\sqrt{12+4}=4$，$\arctan(-\sqrt{12}-2\mathrm{i})=-\dfrac{5}{6}\pi$，所以

$$-\sqrt{12}-2\mathrm{i}=4\left(\cos\frac{5}{6}\pi-\mathrm{i}\sin\frac{5}{6}\pi\right)=4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}5\pi/6}.$$

（3）先将分子、分母分别用指数式表出，则

$$\frac{(\cos4\varphi-\mathrm{i}\sin4\varphi)^2}{(\cos3\varphi-\mathrm{i}\sin3\varphi)^3}=\frac{(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}4\varphi})^2}{(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\varphi})^3}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi.$$

例 4 设 $z_1=1+\mathrm{i}$，$z_2=\sqrt{3}+\mathrm{i}$，求 z_1z_2.

解 直接计算

$$\begin{aligned}z_1z_2&=(1+\mathrm{i})(\sqrt{3}+\mathrm{i})=\sqrt{3}+\mathrm{i}+\sqrt{3}\mathrm{i}-1\\&=(\sqrt{3}-1)+\mathrm{i}(1+\sqrt{3})\end{aligned}$$

化为指数式，$z_1=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$，$z_2=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$. 所以

$$z_1z_2=(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4})(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6})=2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/12}$$

显然，指数式运算更简单.

例 5 计算 $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$.

解 因为 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$，所以

$$\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}=\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)/4},\quad k=0,1,2,3.$$

其四个根为

$$w_1=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}\right);$$

$$w_2=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{16}\right);$$

$$w_3=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{16}\right);$$

$$w_4=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{25\pi}{16}\right).$$

这四个根是以原点为中心、半径为$\sqrt[8]{2}$的圆内接正四边形的四个顶点，w_1 的辐角 $\theta=\frac{\pi}{16}$.

例 6 满足下列条件的点集是什么，如果是区域，是单连通域还是多连通域？

(1) $\mathrm{Im}(z)=3$;　　(2) $|z-\mathrm{i}|\leqslant|z+\mathrm{i}|$;

(3) $|z|<1,\mathrm{Re}(z)\leqslant\frac{1}{2}$;　　(4) $0<\arg(z-1)<\frac{\pi}{4},2<\mathrm{Re}(z)<3$.

解 (1) 是过点 3i 且平行于实轴的一条直线，不是区域.

(2) $|z-\mathrm{i}|\leqslant|z+\mathrm{i}|$是包含实轴的上半平面，是单连通区域.

(3) 是以原点为圆心、1 为半径的圆内部，直线 $x=\frac{1}{2}$(含直线)左边，是单连通域.

(4) 是以直线 $x=2$ 和 $x=3$ 为平行边，直线 $\arg(z-1)=\frac{\pi}{4}$和实轴为两腰的梯形内部，是单连通域.

例 7 下列方程表示什么样的曲线？

(1) $z=1+\mathrm{i}t,0\leqslant t\leqslant1$;

(2) $z=1+\mathrm{i}t+t^2,0\leqslant t\leqslant1$;

(3) $|z+a|+|z-a|=b,a,b$ 均为正实数;

(4) $|z-a|=\mathrm{Re}(z-b),a,b$ 均为正实数.

解 (1) 由 $z=x+\mathrm{i}y$，得 $x=1,y=t(0\leqslant t\leqslant1)$，是由点 $z_1=1$ 到点 $z_2=1+\mathrm{i}$ 的直线段.

(2) 由 $z=x+\mathrm{i}y$，得 $x=1+t^2,y=t(0\leqslant t\leqslant1)$，是抛物线 $y^2=x-1$ 上由点 $z_1=1$ 到点 $z_2=2+\mathrm{i}$ 的一段弧.

(3) 由 $z=x+\mathrm{i}y$，得

$$\sqrt{(x+a)^2+y^2}=-\sqrt{(x-a)^2+y^2}+b,$$

两边化简，得

$$\frac{4x^2}{b^2}+\frac{4y^2}{b^2-4a^2}=1.$$

当 $b>2a$ 时，z 的轨迹为一椭圆；当 $b=2a$ 时，z 的轨迹缩为一点.

(4) 原式化为 $\sqrt{(x-a)^2+y^2}=x-b$，两边平方，得

$$(x-a)^2+y^2=(x-b)^2,$$

即

$$y^2-(b^2-a^2)=2(a-b)x.$$

是一条开口向右的抛物线.

例 8 在映射 $w=z^2$ 下，下列 z 平面上的图形映射为 w 平面上的什么图形？

(1) $0<r<2,\theta=\dfrac{\pi}{4}$;

(2) $0<\theta<\dfrac{\pi}{4},0<r<2$;

(3) $x^2-y^2=C_1,2xy=C_2$.

解 $w=z^2$ 对应两个二元实函数:$u=x^2-y^2,v=2xy$. 通过关于乘法的模与辐角的定理知，映射 $w=z^2$ 使 z 的辐角增加一倍. 因此

(1) 记 $w=\rho e^{i\varphi}$,则 $0<r<2,\theta=\dfrac{\pi}{4}$映射为 w 平面内虚轴上自点 0 到 4i 的一段,即

$$0<\rho<4,\varphi=\frac{\pi}{2}.$$

(2) 记 $w=\rho e^{i\varphi}$,则 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4},0<r<2$ 映为 w 平面上扇形域,即

$$0<\varphi<\frac{\pi}{2},0<\rho<4.$$

(3) 将 $x^2-y^2=C_1,2xy=C_2$ 映为 w 平面上两族平行直线 $u=C_1,v=C_2$.

例 9 在映射 $w=\dfrac{1}{z}$下,下列曲线映为 w 平面上的什么图形?

(1) $x^2+y^2=4$;

(2) $(x-1)^2+y^2=1$.

解 (1) $u+iv=\dfrac{1}{z}=\dfrac{x}{x^2+y^2}-i\dfrac{y}{x^2+y^2}$,得

$$u=\frac{x}{x^2+y^2},v=\frac{-y}{x^2+y^2}\Rightarrow u^2+v^2=\frac{1}{x^2+y^2}.$$

所以,$x^2+y^2=4$ 映为 w 平面上 $u^2+v^2=\dfrac{1}{4}$,是 w 平面上以原点为圆心 、半径为$\dfrac{1}{2}$的圆.

(2) 换一种方法. 因为 $w=1/z,z=1/w,\bar{z}=1/\bar{w}$,而$(x-1)^2+y^2=1$,整理得 $x^2+y^2-2x=0$. 即 $z\bar{z}-z-\bar{z}=0$,代入得

$$\frac{1}{w}\cdot\frac{1}{\bar{w}}-\frac{1}{w}-\frac{1}{\bar{w}}=0$$

或

$$w+\bar{w}=1\Rightarrow u=1/2$$

是 w 平面上的直线 $u=1/2$.

例 10 证明:函数 $f(z)=\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\bar{z}}-\dfrac{\bar{z}}{z}\right)$当 $z\to 0$ 时极限不存在.

证明 $f(z)=\dfrac{1}{2i}\dfrac{z^2-\bar{z}^2}{z\bar{z}}=\dfrac{2\mathrm{Re}(z)\cdot 2i\mathrm{Im}(z)}{2i|z|^2}$

$$=\frac{2\mathrm{Re}(z)\cdot\mathrm{Im}(z)}{|z|^2}=\frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

令 z 沿直线 $y=kx$ 趋向于零,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} u(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{2kx^2}{x^2(1+k^2)}=\frac{2k}{(1+k^2)}.$$

显然,当 k 取不同值时,$u(x,y)$ 趋向于不同的值. 所以,$\lim\limits_{z\to 0}f(z)$ 不存在.

例 11 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1}{1+z^2}$;

(2) $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z-i}{z(1+z^2)}$;

(3) $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z\bar{z}+2z-\bar{z}-2}{z^2-1}$.

解 (1) 令 $z=\dfrac{1}{t}$,则 $z\to\infty$ 时,$z\to 0$,于是

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1}{1+z^2}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{1+t^2}=0.$$

(2) 因为 $\dfrac{z-i}{z(1+z^2)}=\dfrac{z-i}{z(z-i)(z+i)}=\dfrac{1}{z(z+i)}$,所以

$$\lim_{z\to i}\frac{z-i}{z(1+z^2)}=\lim_{z\to i}\frac{1}{z(z+i)}=-\frac{1}{2}.$$

(3) 因为 $\dfrac{z\bar{z}+2z-\bar{z}-2}{z^2-1}=\dfrac{(\bar{z}+2)(z-1)}{(z+1)(z-1)}=\dfrac{(\bar{z}+2)}{(z+1)}$,所以

$$\lim_{z\to 1}\frac{z\bar{z}+2z-\bar{z}-2}{z^2-1}=\lim_{z\to 1}\frac{(\bar{z}+2)}{(z+1)}=\frac{3}{2}.$$

例 12 证明函数 $\arg z$ 在原点与负实轴上不连续.

证明 当 z_0 为负实轴上点 $z_0=x_0(x_0<0)$ 时,有

$$\lim_{x\to x_0}(\arg z)=\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0^+}}[\arctan(y/x+\pi)]=\pi\\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0^-}}[\arctan(y/x-\pi)]=-\pi\end{cases}$$

所以,$\lim\limits_{x\to x_0}(\arg z)$ 不存在,函数在负实轴上不连续. 在原点,由于辐角不确定,$\mathrm{Arg}\, z$ 无意义,所以不连续. 综上所述可知,$\mathrm{Arg}\, z$ 在除原点和负实轴外的全平面都连续.