
GAO

DENG

SHU

XUE

山东省五所师范院校《高等
数学》教材编写组

山东省出版总社
临沂办事处

高等数学

·上·

前 言

本书是根据三年制师范专科学校物理专业《高等数学》教学大纲与我省教学需要而编写的。编写中兼顾到除可作高师二年制物理专业、三年制化学专业以及函授、进修同类专业的教材外，还可作电大、夜大同类专业的教学参考书。

本书是《高等数学》的基础部分，分上、下两册。上册包括一元函数微积分学、空间解析几何、行列式和矩阵等。下册包括多元函数微积分学、常微分方程、矢量分析与场论初步、无穷级数等。书中带*号内容，可供选用。各章配有习题，并另有附印的习题解答。

参加本书编写工作的有临沂师专吴大坤、泰安师专赵兴乐、烟台师范学院秦祥保、魏远、山东煤矿教育学院张润庠、青岛师专陈殿宣、临沂教育学院王端中等同志。

本书的审定以魏远付教授为主，还有吴大坤、张润庠、赵兴乐。参加审稿会的单位有济宁师专、山东省教育学院、济宁教育学院、青岛教育学院、潍坊教育学院、聊城教育学院、德州教育学院、济南教育学院、济南师专。

参加审稿的同志都认真审阅了部分原稿，提出了许多改进意见。在本书编印过程中，山东省教育厅以及临沂师专、泰安师专、山东煤矿教育学院等各院校的负责同志给予大力支持，对此

限于编
定然不少。

促，书中错误和不妥之处
恳请

编 者

一九八五年六月

目 录

第一章 变量与函数	(1)
§1—1 预备知识.....	(1)
§1—2 函数	(5)
§1—3 一些特殊类型的函数	(13)
§1—4 初等函数.....	(17)
第二章 极限和函数的连续性	(25)
§2—1 数列的极限.....	(25)
§2—2 函数的极限.....	(34)
§2—3 无穷小量的运算及极限的运算.....	(49)
§2—4 极限存在的准则·两个重要极限.....	(58)
§2—5 无穷小的比较.....	(70)
§2—6 函数的连续性和间断点.....	(73)
§2—7 闭区间上连续函数的性质.....	(81)
§2—8 初等函数的连续性	(84)
第三章 导数与微分	(90)
§3—1 导数的概念	(90)
§3—2 求导法则	(99)
§3—3 高阶导数.....	(121)
§3—4 微分概念.....	(126)
§3—5 微分在近似计算中的应用.....	(134)
第四章 导数在函数研究中的应用	(138)
§4—1 中值定理.....	(138)
§4—2 洛必达法则.....	(143)

§4—3 泰勒公式	(150)
§4—4 导数的应用	(157)
§4—5 函数作图	(168)
§4—6 曲线的曲率	(178)
第五章 不定积分	(185)
§5—1 不定积分的概念与性质	(185)
§5—2 不定积分的换元积分法与分部积分法	(193)
§5—3 有理函数的积分法	(208)
§5—4 三角函数有理式的积分法和几种简单无理函数 的积分法	(217)
§5—5 关于不定积分问题的几点说明	(227)
§5—6 简单微分方程举例	(231)
第六章 定积分及其应用	(236)
§6—1 定积分的概念和性质	(236)
§6—2 微积分学基本定理	(249)
§6—3 定积分的计算	(253)
§6—4 定积分的近似计算	(261)
§6—5 定积分的几何应用	(268)
§6—6 定积分的物理应用	(285)
§6—7 广义积分	(293)
第七章 空间解析几何	(305)
§7—1 空间直角坐标系	(305)
§7—2 矢量及其线性运算	(311)
§7—3 矢量的数量积、矢量积和混合积	(329)
§7—4 平面及其方程	(348)
§7—5 空间直线及其方程	(360)

§7—6 曲面与方程	(371)
§7—7 空间曲线及其方程	(378)
§7—8 常用二次曲面的标准方程	(384)
第八章 行列式和矩阵	(398)
§8—1 行列式	(398)
§8—2 矩阵	(417)
§8—3 n 维向量及其线性相关性	(439)
§8—4 线性方程组	(447)
§8—5 对称矩阵与二次型	(466)
附录: 基本积分表	(491)

第一章 变量与函数

我们以前所学的初等数学大都是研究常量的数学，它只能反映相对地不变的现象，而现实世界则是普遍存在着矛盾，运动和变化的量，初等数学无法反映变量的变化规律，而高等数学是以变量为研究对象的一门数学。

§1—1 预备知识

一、实数与数轴

实数的全体组成的集合，称为实数集。在一直线上确定一点为原点，指定一个方向为正方向，并规定了一个长度单位，称这样的直线为数轴。实数集和数轴上的所有点有一一对应关系。这就是说：任一实数都对应数轴上唯一的一点，反过来，数轴上每一点也都唯一的代表一个实数。正由于此，在今后的叙述中，我们将对数与点不加区别，常常把“数 a ”说成“点 a ”，反之亦然。

二、绝对值不等式

设 a 为一实数， a 的绝对值表示为

$$|a| = \begin{cases} a & \text{当 } a \geq 0 \\ -a & \text{当 } a < 0 \end{cases}$$

由此可知 $|a|$ 总是正数或零，且有

$$|a| = \sqrt{a^2}$$

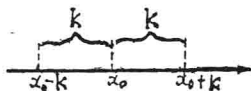
就几何意义来说， $|a|$ 在数轴上表示点 a 与原点 0 之间的距离。根据绝对值的定义，容易知道下面关系式成立：

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

由此性质可以推出不等式 $|a| \leq k (k \geq 0)$ 与 $-k \leq a \leq k$ 是等价的。

$|x - x_0|$ 在数轴上表示点 x 与点 x_0 的距离。那末不等式 $|x - x_0| \leq k (k \geq 0)$ 表示在数轴上的点 x 与点 x_0 的距离小于或等于 k 。由此可推出以下等价不等式：

$-k \leq x - x_0 \leq k$ 从而有 $x_0 - k \leq x \leq x_0 + k$ 这一等价不等式在数轴上的几何表示如图 1-1。



从图上可以看出，点 x 与点 x_0 的距离不超过 k ，或动点 x 介于点 $x_0 - k$ 与点 $x_0 + k$ 之间。反之亦然。

当 $x_0 = 0$ 时，即 x_0 点为原点，便得到上述等价不等式的特殊情况。

绝对值不等式的运算

定理1. 和的绝对值不大于各项绝对值的和，即

$$|a + b + \dots + k| \leq |a| + |b| + \dots + |k|$$

证， 因 $-|a| \leq a \leq |a|$ ，

$$-|b| \leq b \leq |b|，$$

.....

$$-|k| \leq k \leq |k|，$$

逐项相加得

$$\begin{aligned} -(|a| + |b| + \dots + |k|) &\leq a + b + \dots + k \\ &\leq |a| + |b| + \dots + |k|. \end{aligned}$$

定理2, 差的绝对值不小于各项绝对值的差，

即 $|a - b| \geq |a| - |b|。$

证 因 $|a| = |(a-b)+b|$ 由定理1得

$$|a| \leq |a-b| + |b|$$

于是 $|a| - |b| \leq |a-b|$

定理3, 积的绝对值等于各项绝对值的积, 即

$$|abc \cdots k| = |a| \cdot |b| \cdot |c| \cdots |k|$$

定理4, 商的绝对值当除数的绝对值不为零时等于被除数及除数的绝对值的商, 即

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$$

根据乘法与除法的定义, 上面两个定理显然成立。

三、区间和邻域

区间是指介于两个实数之间的全体实数, 两个实数叫区间的端点。

1. 有限区间

设 a 与 b 为两个实数, 且 $a < b$, 满足不等式

$$a < x < b$$

的一切实数 x 的全体叫做开区间, 用记号 (a, b) 表示。

满足不等式

$$a \leq x \leq b$$

的一切实数 x 的全体叫做闭区间, 用记号 $[a, b]$ 表示。

满足不等式

$$a < x \leq b \text{ 或 } a \leq x < b$$

的一切实数的全体, 叫做半开区间。用记号 (a, b) 或 $[a, b)$ 表示。

上面三种区间的长度都是 $b-a$ 。它们在数轴上的几何表示如图1-2 (a), (b), (c), (d)。

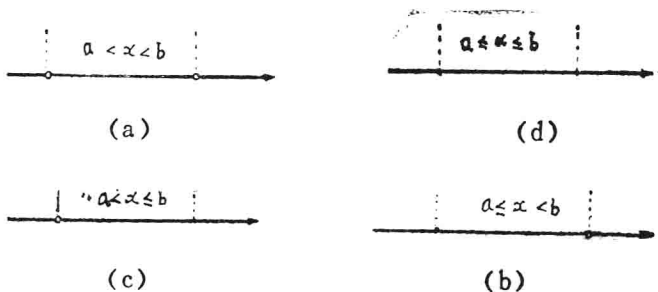


图1-2

2. 无限区间

满足不等式 $a \leq x < \infty$ 的全体实数, 用记号 (a, ∞) 表示。

满足不等式 $-\infty < x \leq b$ 的全体实数, 用记号 $(-\infty, b)$ 表示。

满足不等式 $-\infty < x < \infty$ 的全体实数, 用记号 $(-\infty, +\infty)$ 表示。

这里引用的“ ∞ ”和“ $-\infty$ ”是记号, 不是数。

3. 邻域

设 a 与 δ 是两个实数, 且 $\delta > 0$, 以点 a 为中心, 长度等于 2δ 的开区间, 称为点 a 的 δ 邻域, 点 a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径。

点 a 的 δ 邻域用不等式表示为

$$|x - a| < \delta.$$

用记号表示为 $(a - \delta, a + \delta)$,

其几何表示如图1-3。

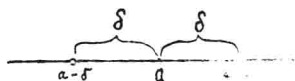


图1-3

习 题

解下列不等式

1. $0 < (x - 2)^2 \leq 4$

$$2. |x| > x$$

$$3. \left| \frac{x}{1+x} \right| > \frac{x}{1+x}$$

$$4. |x^2 - 3x + 2| > x^2 - 3x + 2$$

$$5. |\sin x| = \sin x + 2$$

$$6. |2x + 3| = x^2$$

§1—2 函数

一、常量与变量

在物理学及其他各种自然科学中，我们常遇到两种量，一种量是在事物的运动或变化过程中数值保持不变的量，另一种是在事物运动或变化的过程中可取不同数值的量，如自由落体的下降速度和与地面的距离就不断改变，而落体的质量在这一过程中则保持不变。又如将一个密封容器内的气体加热，气体的体积和分子数是不变的，而气体的温度和压力则不断地变化。

定义1. 在某一过程中，数值保持不变的量称为常量，数值不断变化的量称为变量。

一个量是常量还是变量，应根据具体问题具体分析。有些量在某一过程中是常量，而在另一过程中又可能是变量。

如汽车在两车站间行驶时，乘客的数目是常量，汽车与车站间的距离是变量；当汽车停靠车站时乘客的数目可能成了变量，而汽车与车站间的距离成了常量。

二、函数概念

在同一自然现象或技术过程中，往往同时存在几个变量，通常彼此间并不是孤立的，而是相互联系相互依赖并遵

循着一定规律变化的。从以下几例可以看到这种关系。

例1. 质量一定的气体，在一定温度下，它的压力 P 与体积 V 的关系是

$$P = \frac{k}{V} \quad (k \text{ 为常数})$$

例2. 在初速为零的落体运动中，路程 S 和时间 t 是两个变量，当时间 t 变化时，所经历的路程也跟着改变，它们之间有下列关系

$$S = \frac{1}{2}gt^2 \quad (t \geq 0, g \text{ 是重力加速度、常量}).$$

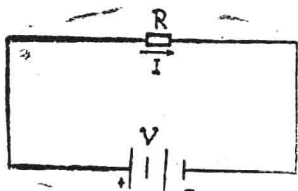
例3. 在电阻两端加直流电压 V ，电阻中有电流 I 通过， V 改变时， I 随之改变。若电阻 $R = 2(\text{欧})$ ，求 I 随 V 变化的规律。

解 由欧姆定律

$$I = \frac{V}{R}$$

当 $R = 2(\text{欧})$ 时

$$I = \frac{V}{2} \quad (1)$$



当电压 V 改变时，电流 I 按(1)式 图1-4

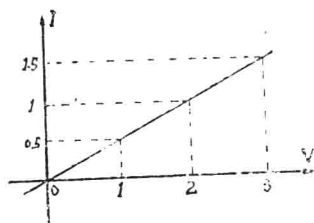
相应改变；并且加反向电压（即电源反接，这时 V 取负值）电流也反向（即 I 取负值），它们的数值可按公式(1)算出，列表如下

$V(\text{伏})$		-2	-1	0	1	2	3	4	5	
$I(\text{安})$		-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	

以 V 为横坐标， I 为纵坐标，在平面直角坐标系中描出

各点，这些点连成一条直线，这条直线也表示I随V变化的规律如图1—5。

抽去上面几个不同例子的实际意义，就给出了函数概念



定义2. 设在某一变化过程

中有两个变量 x 和 y ，若 x 在其变化范围内任意取定一个值， y 按照一定的规律都有唯一确定的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数。 x 叫做自变量，函数 y 又叫因变量，记作

$$y = f(x)$$

变化范围 D 称为函数 $f(x)$ 的定义域， $f(x)$ 也表示与 x 值相对应的函数值，全体函数值构成 $y = f(x)$ 的值域 R 。记号 $y = f(x)$ 中的 f 表示 y 与 x 相对应的对应规律。函数可以记作 $y = f(x)$ ，也可记作 $y = \varphi(x)$ 或 $y = g(x)$ 。但一个函数在讨论中应取定一种记法；同一问题中涉及多个函数时，则应取不同的符号分别表示它们各自的对应规律。

函数是由定义域及对应规律所确定的，因此研究函数时必须注意它的定义域。

1. 在实际问题中，函数的定义域是由所研究的问题的实际意义来确定的。

2. 若没有指明因变量的实际意义，而抽象地研究用解析式表达的函数时，则我们约定这个函数的定义域是使这个解析式有意义的自变量的一切实数值的集合。

3. 若表示一个函数的解析式是由几个式子组合而成的，则这个函数的定义域就必须取这几个式子允许值范围的公共

图1—5

部分。

下面我们举例说明如何求函数的定义域。

例4. 求下列函数的定义域：

$$(1) f(x) = \sqrt{x-2} + \frac{1}{x-3} + \lg(5-x)$$

$$(2) f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6} + \arcsin \frac{2x-1}{7}$$

解 (1) 因为二次根式内的代数式的值必须大于等于零，分式的分母不等于零，对数的真数必须大于零。

所以函数的定义域适合下列不等式组的解：

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \\ 5-x > 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 3 \\ x < 5 \end{cases}$$

得 $2 \leq x < 3$ 或 $3 < x < 5$ 如图1—6

$$(2) \text{ 因为 } x^2 - x - 6 \geq 0$$

即 $(x-3)(x+2) \geq 0$ 而这个不等式与下面两个不等式组同解：

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \quad (1) \quad \begin{cases} x-3 \leq 0 \\ x+2 \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

解此两个不等式组得 $x \geq 3$ 或 $x \leq -2$ 。对于 $\arcsin \frac{2x-1}{7}$ ，

则要求解不等式 $\left| \frac{2x-1}{7} \right| \leq 1$ ，即 $-7 \leq 2x-1 \leq 7$ ，

解得 $-3 \leq x \leq 4$ 。

取解的公共部分，得定义域为 $[-3, -2]$ 或 $[3, 4]$ ，如图1—7。

例2. 设 $y = f(x)$ 的定义域

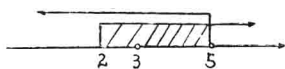


图1—6



图1—7

是 $[0, 1]$,

求: (1) $f(x^2)$ (2) $f(\sin x)$ (3) $f(x+a)+f(x-a)$
($a>0$)的定义域.

解 (1)欲使 $f(x^2)$ 有意义, 必须使 $0 \leq x^2 \leq 1$,

即 $|x| \leq 1$ 亦即 $-1 \leq x \leq 1$.

(2) 欲使 $f(\sin x)$ 有意义, 必须使 $0 \leq \sin x \leq 1$,

即 $f(\sin x)$ 的定义域为 $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, (k 为整数).

(3) 欲使 $f(x+a)+f(x-a)$ ($a>0$)有意义, 必须
 $0 \leq x+a \leq 1$ 与 $0 \leq x-a \leq 1$ 同时成立,

即 $-a \leq x \leq 1-a$ 与 $a \leq x \leq 1+a$ 同时成立. 因为 $a>0$,
要使两不等式有公共部分, 必须 $a \leq 1-a$.

所以, $a \leq \frac{1}{2}$, 即当 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时,

定义域为 $(a, 1-a)$.

当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 定义域不存在.

例3. $y^2 = x$ 表示 $y = \sqrt{x}$ 与 $y = -\sqrt{x}$ 两个函数, 它们的定义域都是 $x \geq 0$.

对于 $y^2 = x$ 给定一个正数值 x , y 有两个值与之对应. 今后, 一般地, 若变量 x 在其定义域 D 内任取一值时, 变量 y 有两个或两个以上的值与之对应, 则称 y 为 x 的多值函数. 遇到这种情况时, 我们都把它当作多个同时出现的函数来处理.

三、函数的表示法:

函数的表示法常用的有三种:

1. 解析法（也叫公式法）

把两个变量之间的函数关系直接用解析式表出，并注明函数的定义域，这种方法叫解析法。数学分析中所涉及的函数大多数用此法表出。如自由落体公式 $S = \frac{1}{2}gt^2$ ，

以及压力 P 与体积 V 的关系 $P = \frac{k}{V}$ 等，都是用解析法表示的。

有时需要用几个式子表示一个函数。如研究空气温度 T 与高度 h 的关系就是这样的。

我们知道，离地面越高气温越低，按照地球的中纬度地区平均大气状态，国际上规定了温度 T 与高度 h 的变化规律是

$$T = \begin{cases} 15 - 6.5h & h < 11 \text{ 千米} \\ -56.5 & 11 \leq h \leq 80 \text{ 千米} \end{cases}$$

式中温度的单位是摄氏温度。随着高度的增加，气温逐渐下降，但高度超过11千米而在80千米以下时，气温保持在 -56.5°C ，这一高度的大气层叫同温层（图1—8）。

这个函数在自变量取值的不同范围内是用不同的式子分段表示的，称这样的函数为“分段函数”。

例1. 作分段函数

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & x < -1 \\ \sqrt{1-x^2} & -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$$

的图象，并求 $f(-2)$ ， $f(\frac{1}{2})$ ，

$f(3)$ 。

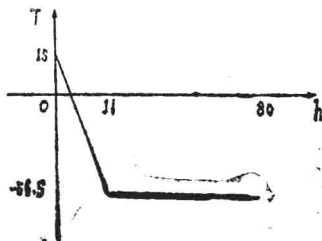


图1—8

解 在三个不同范围内分别作出直线，半圆和抛物线的

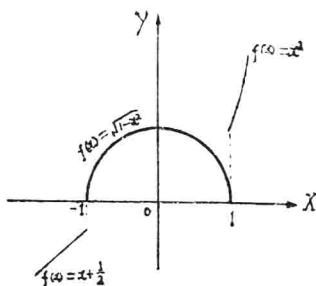
一段得图象（图1—9）。

$$f(-2) = -2 + \frac{1}{2} = -1\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$f(3) = 3^2 = 9$$

2. 列表法 就是把自变量 x



与因变量 y 的一些对应值用表格列

图1—9

出来，以表示函数关系，在实际应用中多用此法。如数学用表一平方表、立方表、对数表、三角函数表等。

列表法的优点是用起来方便，缺点是数据有限，不能查出函数的任意值。

3. 图象法 把自变量 x 和因变量 y 当作直角坐标平面内的点的坐标， y 与 x 的函数关系就可用这平面内的曲线表示出。

如自动记录温度计，记录了某地区一昼夜气温变化情况，横轴表示时间 t ，纵轴表示温度 $T^{\circ}\text{C}$ ，曲线上任一点 $P(a, b)$ 表示在时刻 $t = a$ 时，相应的气温 $T = b$ 。

图象法的优点是直观性强，缺点是不便于作理论推导与演算。由图1—10可以看出气温函数的定义域为。

$$0 \leq t \leq 24$$

气温在4时左右最低等。

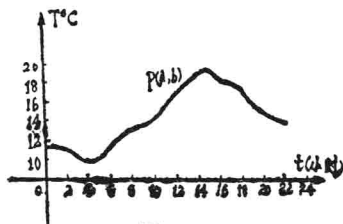


图1—10

习 题

1. 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{2x}{x^2 - 3x + 2} \quad (2) y = \frac{1}{x} - \sqrt{1 - x^2}$$

$$(3) y = \sqrt{x^2 - 4x + 3} \quad (4) y = \lg(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x})$$

$$(5) y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16 - x^2} \quad (6) y = \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$$

$$(7) y = \arccos \sqrt{2x} \quad (8) y = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$(9) y = \sqrt{3-x} + \arccos \frac{x-2}{3}$$

$$(10) y = \lg[\cos(\lg x)]$$

$$(11) y = \arcsin(1-x) + \lg(\lg x)$$

$$(12) y = \operatorname{ctg} \pi x + \arccos(2^x)$$

2. 脉冲发生器产生一个三角形波如图1-11写出函数关系式

$$u = u(t)$$

$$(0 \leq t \leq 20)$$

3. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} 2+x & x \leq 0 \\ 2^x & x > 0 \end{cases}$$

求: (1) $f(1)$, $f(-3)$, $f(0)$.

图1-11

(2) $f(\Delta x) - f(0)$, $f(-\Delta x) - f(0)$, ($\Delta x > 0$).

4. 试作下列函数的图象

$$(1) f(x) = \begin{cases} 3x & |x| > 1 \\ x^2 & |x| < 1 \\ 3 & |x| = 1. \end{cases}$$

