噴气发动机壳体零件强度計算

温俊峯 编

北 京 航 空 学 院

1964.3

符号說明

X y Z 直角座标

R_1 R_2 壳体中面在 Xz及yz 面上的曲率半徑或为錐壳两端之半徑。

h ℓ 壳的厚度和长度。

q P 分佈載荷之强度和压力。

E G 壳体材料之拉压彈性模数及剪切模数。

γ ν 壳体材料之比重及波桑比。

$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ 为与 X y Z 軸平行的正应力。

$\tau_{12} \tau_{13} \tau_{23}$ 直角座标中的剪应力。

u v w 中面在 X y Z 各向的位移。

ε_x ε_y ε_z 为 X y Z 方向沿壳厚任一点的正应变。

ε_1 ε_2 γ_{12} 中面在 X y 方向正应变及剪应变。

χ_1 χ_2 χ_{12} 中面在 X Z 及 y Z 面內曲率变化及扭曲率。

B D 壳体之抗拉压和抗弯剛度。

M_1 M_2 H 垂直 X 和 y 軸二截面单位长上的弯矩和扭矩。

N_1 N_2 为垂直 X 和 y 軸二截面单位长上横剪力。

T_1 T_2 S 为 X y 方向单位长上之正內力及平剪力。

Q_x Q_y Q Z 外載荷在 X y Z 方向之分量。

n m 分别为失穩时沿园周及軸向形成之波数和半波数。

B_1 B_2 加肋壳在軸向和切向之折合抗拉剛度。

ν_1 ν_2 正交各向異性壳在 X y 方向之波桑系数。

F_ℓ ℓ_ℓ 加强肋断面积及跨度。

J_ℓ J^* 分别为加强肋断面繞重心及加强肋与壳体一起繞共同重心之慣性矩。

θ φ α 分别为旋轉形壳經綫面和平行园的位置角及錐壳之半錐頂角。

ω 及 t 分别为壳体振动角頻率及时間。

說　　明

喷气发动机壳体零件强度計算　是一門新的課程。因初学水平有限及編写时間非常倉促，其中不免有錯誤和不当之处，敬請有关同志和兄弟单位多加指正。本講义可供空气喷气发动机設計专业教学或参考用。

目　录

第一章　薄壳一般理論

§1，1 前　言

本課程之目的在於利用薄壳理論对发动机壳体零件进行强度計算。薄壳理論是現代彈性力学中最具有实际意义的部分之一。由於薄壳結构具有重量輕强度好的特点。所以在建築、造船和鍋炉制造等現代工程技術中，特别在航空上得到日益广泛的应用。飞机設計中採用金属薄壳結构已有三十多年的历史。並且給飞机結构带来一次很大的更新。因为減輕重量在航空上具有更重要的意义。航空发动机大力採用薄壳結构显然成为发展的趋势，所以近年来薄壳理論在航空上之应用和发展也更加迅速。

在航空燃气渦輪发动机中，从进口整流罩、压气机渦輪机匣、喞子鼓环整个的燃燒室加力燃燒室和尾噴管部件及其他承力机匣等都是薄壳零件。冲压发动机幾乎全部採用了薄壳結构。因之，在目前噴气发动机强度計算中除了盘、軸和葉片等大零件及一些連結件和管路系統等小零件外，所有的其他零件都作为薄壳問題来处理。

薄壳結构所以在航空发动机上得到如此快的发展和广泛的应用，主要有以下幾方面的原因：

(1)发动机零件採用薄壳結构，足以保証对零件的强度和剛度等工作要求当光壳必須加强时，目前已有足够的經驗採取加强措施。在高溫工作的条件下，薄壳零件更容易減輕热应力合理承担負荷。

(2)薄壳零件为一空間結构能改善受力状态，更有利於发揮材料的效用。並且使零件承載能力更为有效。因而它能最大限度地滿足重量輕的要求。

(3)发动机工作在原理上要求形成軸对称的气流通道，因而其零件的幾何形状最适於做成旋轉形壳体，这样在零件受力方面也最合理。实际上，发动机大多数零件是园柱形或接近园柱形，亦有相当数量的零件为园錐形，或接近於园錐形，这些最簡单的旋轉形壳体，制造亦很方便。

(4)薄壳零件最便於利用成型鈑材，既能节約使用材料，並且鈑材之机械性性能亦好。

(5)薄壳零件一般採用冲压焊接工艺方法。而代替了大量昂貴的切削加工並且不需要专門的毛胚，使生产成本大大降低。

为了进一步研究发动机构造，不断改进其設計，特别是为了薄壳零件工

作之可靠性並尽可能減輕发动机重量，研究薄壳理論是非常必要的。一般来說；薄壳零件强度計算的內容包括以下三个方面：

(1)薄壳之应力計算：其目的在於確定零件之应力值。

(2)薄壳之稳定性計算：其目的在於确定零件之临界載荷。

(3)薄壳之振动計算：其目的在於确定零件之自振頻率。

当求得以上各值时。从已知零件的极限应力、实际載荷及强迫振动頻率則可确定零件的安全系数，因此，可最后判定零件工作之可靠程度。

§1，2 基本概念与假設

(一)一些定义：

壳体 在彈塑性力学中，凡是由曲面所包住的物体，其一个方向的尺寸远远小於其他方向的尺寸者，均称为"壳体"。

壳体两表面間的距离称为厚度。亦即厚度远小於其他尺寸的物体。平鈑可看为壳体中当其曲率半徑为无穷大时的特殊情况。

中面 由距壳体两表面等距离的点所組成的面称为"中面"。壳体之幾何形状可以用中面的形状和厚度的变化規律来表示。

薄壳 当壳体之厚度与中面主曲率半徑之比值远小於1时称为"薄壳"

$$\text{即}\quad \frac{h}{R_i} \ll 1 \qquad (a)$$

上式中 h—为壳体厚度，

R_i—为中面的主曲率半徑。因曲面上任一点都有两个主曲率半徑，即为最大和最小的曲率半徑，故 $i=1,2$。

在利用薄壳理論进行实际工程計算中，当壳体厚度与中面主曲率半徑比值的最大值为：

$$\left(\frac{h}{R_i}\right)_{max} \le \frac{1}{20} \qquad (b)$$

这时 $\frac{h}{R_i}$ 和1相比而略去不計所带来的誤差不大於5%。这在工程上通常是允許的。故在以后理論計算中，将 $\frac{h}{R}$ 与1相比而忽略不計。为了確定起見，我們把滿足不等式（b）的壳体称为薄壳。目前工程技術中实际所遇到之絕大多数壳体都在下列范圍內：

$$\frac{1}{1000} \leq \frac{h}{R} \leq \frac{1}{50} \qquad (C)$$

就是說都属於薄壳之列。下面我們举两个空气噴气发动机为例：

航空发动机型别	零件名称	壁厚 h	半徑 R	比值 h／R
小型渦輪噴气发动机 Рд－10	压气机机匣	5毫米	270毫米	$\sim\frac{1}{50}$
大型冲压噴气发动机 Рд－018	燃燒室外壳	1毫米	1000毫米	$\frac{1}{1000}$

以上所举两型发动机的零件，一般来說，大致可看做目前空气噴气发动机壳体零件$\frac{h}{R}$比值的两个极限情況。这两个极限情况又都在上述薄壳的工程范圍內。可見利用薄壳理論进行航空噴气发动机壳体零件强度計算是完全允許的。因而，研究薄壳理論对航空发动机設計来說，是有很大实际意义的。

(二)基本假設

为了使問題簡化，像在材料力学中研究樑之弯曲时有平剖面假設一样，研究壳体採用了克希霍夫—勒夫假設：

(1)变形前垂直於中面的直纖維变形后还是直的，並且仍垂直於撓曲后的中面，且其长度不变。

(2)平行於中面各层間的法向应力与其他应力相比較可以忽略不計。

採用了以上这些假設，等於把壳体的問題簡化为只研究其中面的变形正如採用平剖面假設把樑的弯曲問題化为其中性軸綫的撓曲一样。以上的假設亦說明垂直中面任何平面內之剪应变及沿厚度方向之正应变为零。可以証明这些假設带来的誤差与1相比具有$\frac{h}{R}$的量級。这对薄壳来說在工程上是允許的。

在以后各章論述中，除特别指明外，均認为壳体材料为各向同性，並且服从虎克定律，而且其各点的位移較厚度小得多，即按小变形綫性理論来研究壳体。只有当研究壳体稳定性問題时考虑了中面撓曲对平衡条件的影响，

即考虑了大变形之部分影响。当研究带有加强肋壳体稳定性問題时，認为材料是正交各向異性。当壳体超出彈性极限工作时虎克定律才不适用。

§1，3 薄壳的变形

当壳体承載时，会产生拉伸、剪切、弯曲或扭轉等变形。为了研究其变形情况並进一步分析其內力，从壳体上用两对垂直於中面並包含主曲率的相邻平面切出一无限小微体。其相对座标如图（图1）所示：x及y軸为中面O点上分别为两主曲率面內之切綫方向。Z軸为垂直於中面方向按右手准則向曲率中心为正。其中R_1 及R_2 分别为XZ及YZ平面內的主曲率半徑，而R_1' 及R_2' 为微体变形后的主曲率半徑。

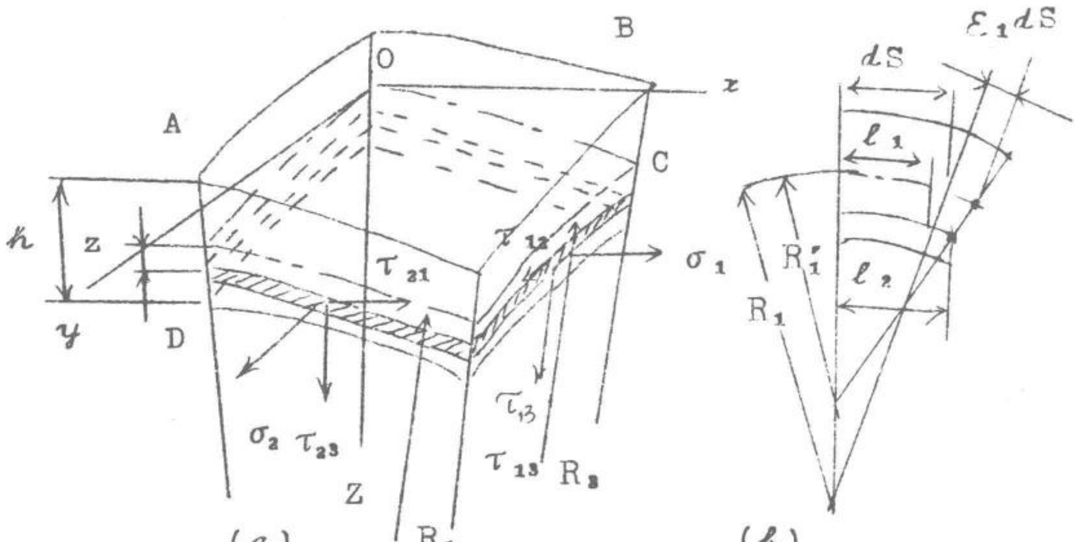

图1

若命ε_1 及ε_2 分别表示中面在X及y方向之正应变。γ_{12} 为中面之剪应变。則平行於中面並距中面为Z任一薄层上的应变ε_x ε_y 及γ_{xy} 可求得如下：

如（图1 b）所示：dS为中面在X方向的弧长，ℓ_1 及ℓ_2 分别为微体任一层在X方向变形前后的弧长。則該层在X方向的相对变形可用下式表示：

$$\varepsilon_x = \frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_1} \qquad (a)$$

从幾何相似关系可知：

$$l_1 = dS\left(1-\frac{Z}{R_1}\right)$$

$$l_2 = dS(1+\mathcal{E}_1)\left(1-\frac{Z}{R_1'}\right) \qquad (b)$$

若将 l_1 及 l_2 之值（ b ）式代入（ a ）式，經整理后則得

$$\mathcal{E}_x = \frac{dS(1+\mathcal{E}_1)\left(1-\frac{Z}{R_1'}\right)-dS\left(1-\frac{Z}{R_1}\right)}{dS\left(1-\frac{Z}{R_1}\right)}$$

$$= \frac{\mathcal{E}_1}{1-\frac{Z}{R_1}} - \frac{Z}{1-\frac{Z}{R_1}}\left(\frac{1+\mathcal{E}_1}{R_1'} - \frac{1}{R_1}\right) \qquad (C)$$

在上式中考慮到薄壳理論及小变形的假設条件，並且与 1 相比忽略 $\frac{h}{R}$ 及 $\mathcal{E}_1$ 各項后。則（ C ）式成为

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_1 - Z\left(\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_1}\right) \qquad (d)$$

若命 $\mathcal{X}_1$ 及 $\mathcal{X}_2$ 分別为 X Z 及 Y Z 平面內之曲率变化，$\mathcal{X}_{12}$ 为中面扭曲率則有以下之表达式

$$\mathcal{X}_1 = \frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_1} \qquad (e)$$

將 $\mathcal{X}_1$ 之值（ e ）式代入（ d ）式，則得平行中面各层在 $\mathcal{X}$ 方向的应变沿厚度的变化公式。同理可以求得其他应变 $\mathcal{E}_y$ 及 γ_{xy} 之表达式：

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_1 - Z\mathcal{X}_1 \qquad (1,1a)$$

$$\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_2 - Z\mathcal{X}_2 \qquad (1,1b)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{12} - 2Z\mathcal{X}_{12} \qquad (1,1C)$$

§1，4　內力和內矩

如（图 1 a ）所示。由壳体切出之微元体中任一薄层的应力 σ_1 及 σ_2 分別为在 X 及 y 方向之正应力，τ_{12} 及 τ_{21} 为平行中面之剪应力。τ_{13} 及 τ_{23} 分別为 y Z 及 X Z 平面內垂直中面之剪应力。图上所指示的为各应力的正方向。在薄壳理論中利用內力和內矩比直接用应力更为方便，所以求

得內力和內矩之表达式是必要的。如（图2）所示：为作用於薄壳微体上的各內力、內矩及其方向。微体之相对座标Xy及Z如（图2 *a*）所示。在（图2 *b*）中T_1及T_2为正向力。S_1及S_2为平剪力，N_1及N_2为横剪力。在（图2 C）中M_1及M_2为弯矩。H_1及H_2为扭矩。

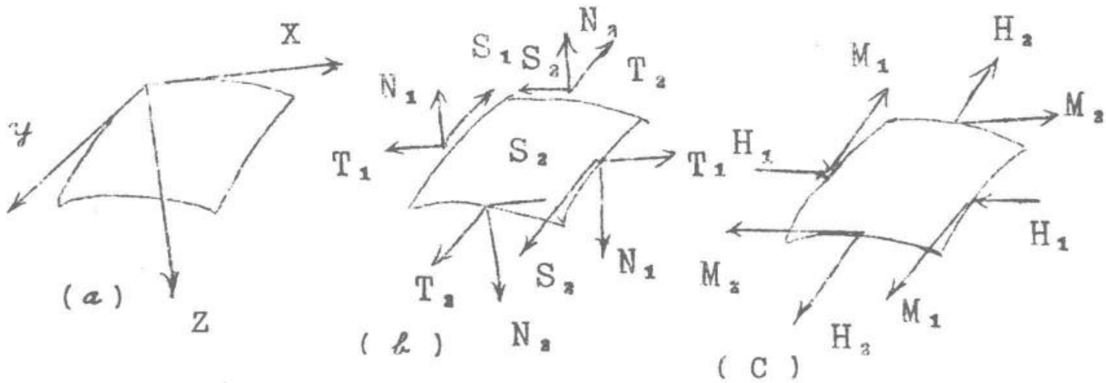

图2

以上各內力和內矩均为相对应的各应力在薄壳微体作用平面內，中面单位长度上之合力和力矩。因而，各內力和內矩可由相对应的应力在中面单位长度的壳体上沿厚度积分則得。如作用在yZ平面上之內力和弯矩为：

$$T_1=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_1\left(\frac{R_2-Z}{R_2}\right)dZ=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_1\left(1-\frac{Z}{R_2}\right)dZ \quad (a)$$

$$M_1=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_1\left(\frac{R_2-Z}{R_2}\right)ZdZ=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_1\left(1-\frac{Z}{R_2}\right)ZdZ \quad (b)$$

考虑到薄壳理論中Z与1相比可以忽略，則上式可写为內力和內矩与应力間之近似等式。同理，亦可求得作用在其他平面內之內力和內矩。

$$T_1=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_1 dZ \qquad T_2=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_2 dZ$$

$$S_1=\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{12} dZ \qquad S_2=\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{21} dZ,$$

$$N_1=\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{13} dZ \qquad N_2=\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{23} dZ_1$$

$$M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 Z dZ, \qquad M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 Z dZ$$

$$H_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12} Z dZ \qquad H_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{21} Z dZ$$

虽然在壳体理論中，平行於中面的各剪应力仍然是成对而相等的。即为

$$\tau_{12} = \tau_{21} \qquad (C)$$

但其平剪力及扭矩实际上是不等的。这是因为当壳体两主曲率不同时，单位中面长度微体的梯形面积在 X 及 y 方向不同。这是与平鈑的結果不同之点。但是对薄壳来說。以上差别与 1 相比可忽略不計，故仍可近似地認为相等即

$$S = S_1 = S_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12} \, dZ \qquad (1,3a)$$

$$H = H_1 = H_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{21} \, Z dZ \qquad (1,3b)$$

当內力和內矩已知时，則壳体任一点的应力可用以下公式来計算

$$\sigma_1 = \frac{T_1}{h} + \frac{12 M_1}{h^3} Z$$
$$\sigma_2 = \frac{T_2}{h} + \frac{12 M_2}{h^3} Z \qquad (1,4a)$$
$$\tau_{12} = \frac{S}{h} + \frac{12 H}{h^3} Z$$

由上式可以看出，当 $Z = \pm \frac{h}{2}$ 时。σ_1 σ_2 及 τ_{12} 为最大或最小。所以，壳体各点应力沿厚度之变化在表面层产生 X 及 y 方向的最大正应力及最大剪应力。当 $Z = \frac{h}{2}$ 或 $Z = -\frac{h}{2}$ 时

$$\sigma_1 = \frac{T_1}{h} \pm \frac{6 M_1}{h^2}$$
$$\sigma_2 = \frac{T_1}{h} \pm \frac{6 M_2}{h^2} \qquad (1,4b)$$
$$\tau_{12} = \frac{S}{h} \pm \frac{6 H}{h^2}$$

§1，5 内力内矩与应变的关系

欲解彈性理論中的問題，必須首先知道应力与应变間的关系。而这些关系式是利用虎克定律来求得。根據基本假設知：平行於中面各层間之法向应力可以忽略不計。即

$$\sigma_z = 0 \qquad (a)$$

因此，平面应力状态的虎克定律可写成

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_2}{E} \qquad (b)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_2}{E} - \nu\frac{\sigma_1}{E} \qquad (c)$$

由上两式联立解得应力之表达式为

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \qquad (1，5a)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \qquad (1，5b)$$

从彈性力学可知 $\tau_{12} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}$ (1，5C)

上式中 E及G—分别为材料之彈性模数及剪切模数；

ν—为波桑系数。

若將(1，1a)及(1，1b)式代入(1，5a)式中，則得

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}[\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2 - Z(\chi_1 + \nu\chi_2)] \qquad (d)$$

再將(d)式代入(1，2)式中之σ_1，积分后則得

$$T_1 = \int_{-h/2}^{h/2}\frac{E}{1-\nu^2}[\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2 - Z(\chi_1 + \nu\chi_2)]dZ$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2}\left[(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2)Z\Big|_{-h/2}^{h/2} - (\chi_1 + \nu\chi_2)\frac{Z^2}{2}\Big|_{-h/2}^{h/2}\right]$$

$$= \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \qquad (1，6a)$$

④

同理，可求得所有内力、内矩通过中面应变表示的关系式

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \qquad (1,6a)$$

$$T_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) \qquad (1,6b)$$

$$S = S_1 = S_2 = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{12} \qquad (1,6C)$$

$$M_1 = -D(\mathcal{X}_1 + \nu\mathcal{X}_2) \qquad (1,6d)$$

$$M_2 = -D(\mathcal{X}_2 + \nu\mathcal{X}_1) \qquad (1,6e)$$

$$H = H_1 = H_2 = -(1-\nu)D\mathcal{X}_{12} \qquad (1,6f)$$

上式中 $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

D常称为抗弯刚度。以上（1，6）各关系式亦称作物理方程。在今后处理应力問題、稳定性問題及振动問題时解稳定静不定方程組是必須用到的。

論

第 二 章 园柱薄壳应力計算

由於噴气发动机上大多数壳体零件为园柱或可近似地简化为园柱形。因而研究园柱薄壳的应力計算是有实际意义的。在本章里将首先求得园柱薄壳之基本方程式。然后对无矩应力状态、轴对称变形状态及变厚度园柱壳进行具体分析計算。最后对温度变化产生之变形及热应力問題亦将作初步討論。

§2，1 平衡方程式

从受載园柱壳上切取一微体，其相对座标和各切面上作用的內力和內矩及其方向如（图3）所示。其中R为园柱壳半徑，h为壳体厚度，通过中面任一点O的X軸为母綫方向。y軸为切綫方向。Z軸为按右手座标向心为正壳体任一点O之位置可由距壳体端之距离及对通过中心綫某一定平面的轉角φ来确定。若壳体承受均布外载。其在各方向之单位强度分量Q_x Q_y Q_z。

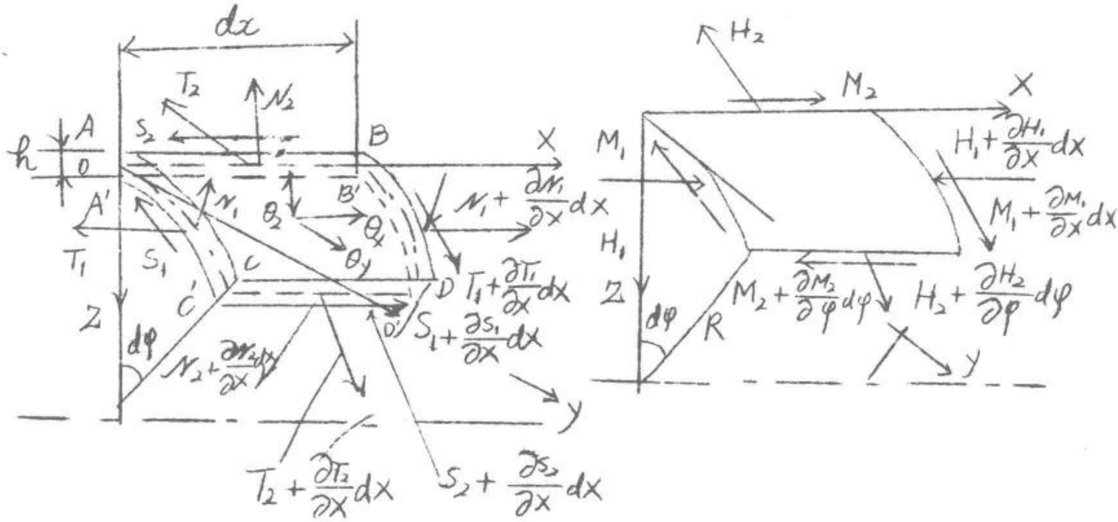

图 3

壳体各点之內力和內距在一般情况下是不等的，並且認为是連續变化的。如已知切面AA′ BB′ 上之內力为T_2 則轉$d\varphi$角后其相邻切面CC′ DD′上之內力可由泰勒定理展成級数而求得：

$$T_2{}_{(\varphi_1+d\varphi)} = T_2{}_{(\varphi=\varphi_1)} + \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 T_2}{\partial \varphi^2} d\varphi^2 + \cdots +$$

$$+\frac{1}{n!}\frac{\partial^n T_2}{\partial\varphi^n}d\varphi^n+\cdots \qquad (a)$$

在我們所取的微元体中 dx 及 $d\varphi$ 均可取为任意小量，因此将上式中以后各高阶項忽略不計，最后則得

$$T_{2(\varphi_1+d\varphi)}=T_2+\frac{\partial T_2}{\partial\varphi}d\varphi \qquad (b)$$

同理，可以求得当切面位置变化 dx 或 $d\varphi$ 上其他各內力和內矩。这些量及其其正方向均表示在（图3）上。

当已知微体上作用的內力，內矩和外載荷后，則可在各个方向和繞各軸求內力和內矩之平衡方程式，現在先求在X軸方向力的平衡，即所有力在X方向之投影总和应为零：

$$-T_1Rd\varphi+(T_1+\frac{\partial T_1}{\partial x}dx)Rd\varphi-S_2dx+$$

$$+(S_2+\frac{\partial S_2}{\partial\varphi}d\varphi)dx+Q_xdxRd\varphi=0$$

上式經整理后並各項除以 $dxd\varphi$ 則得

$$R\frac{\partial T_1}{\partial x}+\frac{\partial S_2}{\partial\varphi}+RQ_x=0 \qquad (2,1a)$$

如进一步求在y和Z方向力的平衡及繞X軸和y軸力矩之平衡，則共可得到五个平衡方程式。当求沿壳体切向之平衡关系时，因微体为任意小这时可認为 $\sin d\varphi\approx d\varphi$，$\cos d\varphi\approx 1$。当求力矩之平衡时，因外力产生之之矩是高阶无穷小。故不考虑外力矩之作用。現将所求得之平衡方程列写如下：

$$R\frac{\partial T_1}{\partial x}+\frac{\partial S_2}{\partial\varphi}+RQ_x=0 \qquad (2,1a)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial\varphi}+R\frac{\partial S_1}{\partial x}-N_2+RQ_y=0 \qquad (2,1b)$$

$$R\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial\varphi}+T_2+RQ_z=0 \qquad (2,1c)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial\varphi}+R\frac{\partial H_1}{\partial x}-RN_2=0 \qquad (2,1d)$$

$$R\frac{\partial M_1}{\partial x}+\frac{\partial H_1}{\partial \varphi}-RN_1=0 \qquad (2,1e)$$

从繞Z軸之内矩平衡。除了求得已知之恒等关系 $S_1=S_2$ 外，我們再得不出任何其它新的关系式。必须指出，在求以上各平衡方程时，我們未考虑中面变形对平衡之影响，即所求得之方程为壳体变形前之平衡关系。这对研究壳体应力状态时在工程上是允許的。方程組（2，1）即称为园柱薄壳之平衡方程。其中有 T_1 T_2 S_1 S_2 N_1 N_2 M_1 M_2 H_1 H_2 共10个未知数，如考虑到 $S=S_1=S_2$ 及 $H=H_1=H_2$ 的关系，仍有8个未知数。但只有五个方程式。故为静不定問題。欲解此方程式必須利用壳体变形之关系式。

§2，2 位移与变形的关系

从壳体的基本概念及应变关系式（1,1）可知：壳体的幾何形状由其厚度变化及中面之形状而确定，並且欲知壳体任一点之应变只須知道中面之应变及其曲率变化后則可求得。在这节里将研究中面变形与位移之关系。若命u V W分别表示壳体中面任一点A之位移。中面应变及曲率变化仍採用以前之符号，切取壳体中面之微体ABCD如（图4）所示，則其应变可求得如下：

微体中面在X方向之正应变

因壳体变形是連續的，沿X軸方向之位移A点为u，而B点則为 $u+\frac{\partial u}{\partial x}dx$ 因而微体沿X軸方向之变形为：

$$u+\frac{\partial u}{\partial x}dx-u=\frac{\partial u}{\partial x}dx \qquad (a)$$

故壳体中面A点在X方向之正应变为：

$$\varepsilon_1=\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (2,2a)$$

微体中面在y方向之正应变

中面A点沿y方向之位移为 v。而D点位移为 $v+\frac{\partial v}{\partial \varphi}d\varphi$ 因而，由於位移 v 之变化在y方向产生之正应变：