万学教育

海文考研

基础通关

海文考研辅导教材公开出版

2014考研数学

适合数学（一）（二）（三）

基础必做880题

客观题专项突破

万学海文考试研究中心 编

主编 高等数学 张同斌
线性代数 邬丽丽
概率统计 丁 勇

主审 赵达夫

基础通关+免费超值视频课程+客观题作答技巧指导

◆万学海文基础课程配套用书◆

- 购书送课 如师亲临答疑解惑 选择填空全掌握
- 专业指导 快速捕捉有效信息 正确答案入囊中
- 实力彰显 小题大做 大小题目举重若轻

全国百佳图书出版单位

中国时代经济出版社

万学教育

UNIVERSAL EDUCATION GROUP

海文考研

海文考

2014考研数学

适合数学（一）（二）（三）

基础必做880题

客观题专项突破

万学海文考试研究中心 编

主编 高等数学 张同斌
线性代数 邬丽丽
概率统计 丁 勇

主审 赵达夫

基础通关+免费超值视频课程+客观题作答技巧指导

◆万学海文基础课程配套用书◆

百佳

全国百佳图书出版单位

中华人民共和国新闻出版总署评定

中国时代经济出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学基础必做880题/万学海文考试研究中心编
—北京：中国时代经济出版社，2013.2
ISBN 978-7-5119-1411-8

Ⅰ.①考… Ⅱ.①万… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第026939号

书　　名：考研数学基础必做880题
作　　者：万学海文考试研究中心

出版发行：中国时代经济出版社
社　　址：北京市丰台区玉林里25号楼
邮政编码：100069
发行热线：(010)83910203
传　　真：(010)83910203
网　　址：www.cmepub.com.cn
电子邮箱：zgsdjj@hotmail.com
经　　销：各地新华书店
印　　刷：中煤涿州制图印刷厂北京分厂
开　　本：787×1092 1/16
字　　数：350千字
印　　张：21.5
版　　次：2013年2月第1版
印　　次：2013年2月第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5119-1411-8
定　　价：42.00元

本书如有破损、缺页、装订错误，请与本社发行部联系更换

目　录

Contents

客观题解题方法与技巧概述

全国硕士研究生入学统一考试数学试题中共有三种题型：选择题(8 个)、填空题(6 个)、解答题(9 个)，其中选择题、填空题即客观题 14 个题目，每小题 4 分共 56 分，占总分(150 分)的37.3%. 纵观历年考研数学考试成绩，考生在客观题部分得分率较低，导致考研数学成绩不理想，失去了竞争优势. 究其原因主要有：一是考生对数学考试大纲中规定的基本概念和基本理论的理解存在欠缺，甚至有所偏废；二是考生对基本方法掌握得不牢靠，计算的准确率较低；三是考生缺乏解答客观题的方法与技巧.

在客观题中，选择题比填空题得分率更低，是因为选择题考查的内容较广泛，有考查基本概念、基本理论的题目，也有考查基本方法的题目，还有考查基本运算能力的题目，因此解题的方法也就较多，如推理法、反例排除法、赋值法、几何图形法、利用四个选项之间的矛盾等方法. 如果不能将“三基”理解透彻，融会贯通，同时又对选择题的解题方法不熟悉，丢分也就成为自然. 填空题一般都是计算题，但由于其只看结果，不看过程，因此，如果计算的准确率不高的话，填空题也很容易丢分. 同时，同一道题如果以客观题形式出现往往会有更巧妙更简单的方法. 虽然客观题都可以用求解主观题的方法得到结果，但这些常规方法往往比简捷方法花费更长的时间. 因此，要提高求解客观题的速度与得分率，就需要考生不仅要吃透基本概念和基本理论，提高计算的准确率，更重要的是掌握求解客观题的方法与技巧. 下面就客观题解题技巧进行独创性地归纳总结，以期提高考生解答客观题的效率.

一、选择题的解题方法与技巧

全国硕士研究生入学统一考试数学试卷中的选择题是单项选择题. 所谓的单项选择题就是四个选项中只有一个选项是正确的. 常见的解题方法有以下几种.

1. 推理法

通过直接计算或由已知条件通过演绎推理得出某个选项正确，这种方法通常称为推理法.

例 1 (2011[2][3]) 已知当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则(　　).

(A)$k=1,c=4$.　　(B)$k=1,c=-4$.　　(C)$k=3,c=4$.　　(D)$k=3,c=-4$.

【解析】 应选(C).

方法 1 因为当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{cx^k}&=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x-3\cos 3x}{ckx^{k-1}}\\&=\frac{3}{ck}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-1}{x^{k-1}}+\frac{1-\cos 3x}{x^{k-1}}\right)\\&=\frac{3}{ck}\lim_{x\to 0}\left[\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^{k-1}}+\frac{\frac{1}{2}(3x)^2}{x^{k-1}}\right]=1,\end{aligned}$$

从而 $k-1=2$，即 $k=3$，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{cx^k}=\frac{1}{c}\left(-\frac{1}{2}+\frac{9}{2}\right)=\frac{4}{c}=1,\quad c=4.$$

故应选(C).

方法2　因为当 $x\to 0$ 时,

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3),\quad \sin 3x=3x-\frac{1}{3!}(3x)^3+o(x^3),$$

所以,由已知条件知

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{cx^k}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}=\lim_{x\to 0}\frac{-3\cdot\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{3!}(3x)^3+o(x^3)}{cx^k}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3+o(x^3)}{cx^k}=1,$$

于是 $k=3,c=4$. 故应选(C).

评注

即便都是推理法,如果方法采用不得当,所造成的解题速度的差异也是较大的. 方法1用的是常规方法,利用等价无穷小将问题转化为已知极限求参数;方法2虽然也是将问题转化为已知极限求参数,但由于利用泰勒公式,使得问题较为简便.

例2　(2012[1][2][3])设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$,其中 n 为正整数,则 $f'(0)=$(　　).

(A)$(-1)^{n-1}(n-1)!$.　(B)$(-1)^n(n-1)!$.　(C)$(-1)^{n-1}n!$.　(D)$(-1)^n n!$.

【解析】　应选(A).

利用导数的定义求 $f'(0)$.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)-0}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)=\lim_{x\to 0}(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!.$$

故应选(A).

评注

求一元函数 $f(x)$ 在某点 x_0 处的导数,一般应先求导函数 $f'(x)$,再求 $f'(x_0)$. 对于本题如果是这样的话,考生就会陷入命题人设置的“陷阱”. 由于函数表达式的特殊性,用导数的定义求 $f'(0)$ 非常简捷.

例3　(2012[1][2][3])曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数为(　　).

(A)0.　(B)1.　(C)2.　(D)3.

【解析】　应选(C).

应同时考虑水平渐近线、铅直渐近线与斜渐近线.

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=1$,所以 $y=1$ 是曲线的水平渐近线,同时说明曲线无斜渐近线.

又因为$\lim\limits_{x\to1}y=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x}{x-1}=\infty$，　$\lim\limits_{x\to-1}y=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{2}$，所以 $x=1$ 是曲线的铅直渐近线，$x=-1$ 不是曲线的铅直渐近线.

综上所述，应选(C).

例 4　(2009[1][2][3])设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$；$\boldsymbol{B}^*$分别为$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$的伴随矩阵.若$|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，则分块矩阵$\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$的伴随矩阵为(　　).

(A)$\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&3\boldsymbol{B}^*\\2\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$.　(B)$\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{B}^*\\3\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$.　(C)$\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&3\boldsymbol{A}^*\\2\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$.　(D)$\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{A}^*\\3\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$.

【解析】　应选(B).

本题主要考查分块矩阵的行列式、伴随矩阵的相关公式以及分块矩阵的逆矩阵.

由$\begin{vmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{vmatrix}=(-1)^{2\times2}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=6$知，矩阵$\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$可逆，从而

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}^*&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{vmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}^{-1}=(-2)^{2\times2}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}\\|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\\|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{B}^*\\3\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

故应选(B).

例 5　(2006[1][3])设 A、B 为两个随机事件，且 $P(B)>0$，$P(A|B)=1$，则必有(　　).

(A)$P(A\cup B)>P(A)$.　　(B)$P(A\cup B)>P(B)$.

(C)$P(A\cup B)=P(A)$.　　(D)$P(A\cup B)=P(B)$.

【解析】　应选(C).

本题主要考查乘法公式与加法公式.

由已知条件与乘法公式有

$$P(AB)=P(B)P(A\mid B)=P(B),$$

再由加法公式有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A).$$

故应选(C).

2. 几何图形法

根据题目条件，画出函数 $f(x)$ 的图形，再根据函数图形的特点找出正确选项的方法称为几何图形法.

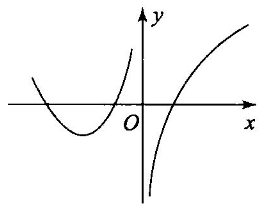

图 1

例 6　(2003[1][2])设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续，其导函数的图形如图 1 所示，则 $f(x)$ 有(　　).

(A)一个极小值点和两个极大值点.

(B)两个极小值点和一个极大值点.

(C)两个极小值点和两个极大值点.

(D)三个极小值点和一个极大值点.

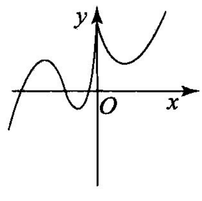

图 2

【解析】　应选(C).

本题主要考查导函数 $y=f'(x)$ 与函数 $y=f(x)$ 的图形的关系与一元函数的

极值(点).由于已知函数是抽象函数,无法用推理法及反例排除法解决.考虑用 $y=f'(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图形之间的关系画出 $y=f(x)$ 的图形,利用定性分析的方法解决该问题.

根据 $y=f'(x)$ 的图形画出 $y=f(x)$ 的图形,如图 2 所示,根据 $y=f(x)$ 的图形知,$f(x)$ 有两个极小值点和两个极大值点.故应选(C).

例 7 (2011[2])函数 $f(x)=\ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为(　　).

(A)0.　　(B)1.

(C)2.　　(D)3.

【解析】 应选(C).

因为 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}f(x)=-\infty$,所以 $x=1,x=2,x=3$ 是曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线.又 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,由此可画出 $f(x)=\ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的草图,如图 3 所示,由图形可知,存在两点 x_1,x_2,使得 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$,即 $f(x)$ 有两个驻点.故应选(C).

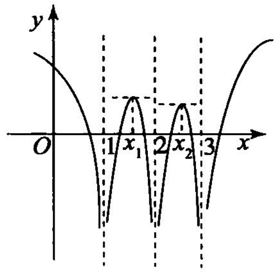

图 3

评 注

本题也可用直接计算法求解,即去掉 $f(x)$ 表达式中的绝对值符号,求 $f'(x)$,再令 $f'(x)=0$,求出 $f(x)$ 的驻点.但这种方法是以花去大量的时间为代价的,因此此类题目用图解法不失为一种好的方法.

例 8 (2006[1][2][3])设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数,且 $f'(x)>0,f''(x)>0$,Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量,Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分,若 $\Delta x>0$,则(　　).

(A)$0<\mathrm{d}y<\Delta y$.　(B)$0<\Delta y<\mathrm{d}y$.　(C)$\Delta y<\mathrm{d}y<0$.　(D)$\mathrm{d}y<\Delta y<0$.

【解析】 应选(A).

方法 1(几何图形法) 由 $f'(x)>0,f''(x)>0$ 知,函数 $f(x)$ 单调增加,曲线 $y=f(x)$ 是凹的.由此作函数 $y=f(x)$ 的图形,如图 4 所示.显然,当 $\Delta x>0$ 时,$\Delta y>\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x>0$.故应选(A).

方法 2(推理法) 由拉格朗日中值定理,得

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(\xi)\Delta x\quad(x_0<\xi<x_0+\Delta x).$$

因为 $f''(x)>0$,所以 $f'(x)$ 单调增加,从而 $f'(\xi)>f'(x_0)$,于是

$$\Delta y=f'(\xi)\Delta x>f'(x_0)\Delta x=\mathrm{d}y.$$

又因为 $f'(x)>0$,所以 $0<\mathrm{d}y<\Delta y$.故应选(A).

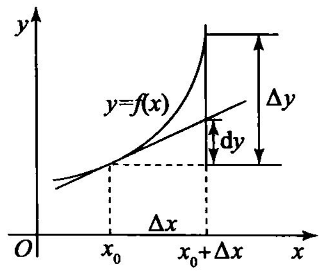

图 4

评 注

本题考查导数的几何应用及微分的几何意义,利用一阶导数的符号确定函数的单调性,利用二阶导数的符号确定函数曲线的凹凸性.方法 1 借助于函数 $y=f(x)$ 的图形快速找到正确的选项,较方法 2 而言提高了解题效率.

例 9 (1999[1])设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$,则(　　).

(A)$P\{X+Y\leqslant 0\}=\dfrac{1}{2}$.　　(B)$P\{X+Y\leqslant 1\}=\dfrac{1}{2}$.

(C)$P\{X-Y\leqslant 0\}=\dfrac{1}{2}$.　　(D)$P\{X-Y\leqslant 1\}=\dfrac{1}{2}$.

【解析】 应选(B).

由于独立正态分布的随机变量的线性组合仍然服从正态分布，所以

$$X+Y\sim N(1,(\sqrt{2})^2),\qquad X-Y\sim N(-1,(\sqrt{2})^2).$$

由正态分布的几何意义知，正态分布的密度函数关于均值左右对称，于是其小于均值的概率为$\frac{1}{2}$，从而

$$P\{X+Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}.$$

故应选(B).

3. 反例排除法

通过满足条件的反例，排除四个选项中的某三个选项，得到正确答案的方法称为反例排除法. 这种方法的关键是举出满足题目条件的反例(特例)，因此需要考生在复习过程中，积累一些简单的反例. 对于例 8，我们也可用反例排除法，快速找到正确选项.

取 $f(x)=x^2, x\in[0,+\infty)$，则 $f'(x)=2x>0, f''(x)=2>0$，取 $x_0=1$，则 $\mathrm{d}y=2\Delta x, \Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=(1+\Delta x)^2-1=2\Delta x+(\Delta x)^2$，由于 $\Delta x>0$，则 $0<\mathrm{d}y<\Delta y$，排除(B)、(C)、(D). 故应选(A).

例 10 (2002[1][2])设函数 $y=f(x)$在$(0,+\infty)$内有界且可导，则(　　).

(A)当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(B)当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(C)当 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$，必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$.

(D)当 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$存在时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$.

【解析】 应选(B).

取 $f(x)=\frac{\sin x^2}{x}$，则 $f'(x)=\frac{2x^2\cos x^2-\sin x^2}{x^2}$，因为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x^2}{x}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2\cos x^2-\frac{\sin x^2}{x^2}\right)\text{不存在},$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x^2}{x}=0,\quad \lim_{x\to0^+}f'(x)=\lim_{x\to0^+}\left(2\cos x^2-\frac{\sin x^2}{x^2}\right)=1,$$

排除(A)、(C)、(D). 故应选(B).

例 11 (2005[3])以下四个命题中，正确的是(　　).

(A)若 $f'(x)$在$(0,1)$内连续，则 $f(x)$在$(0,1)$内有界.

(B)若 $f(x)$在$(0,1)$内连续，则 $f(x)$在$(0,1)$内有界.

(C)若 $f'(x)$在$(0,1)$内有界，则 $f(x)$在$(0,1)$内有界.

(D)若 $f(x)$在$(0,1)$内有界，则 $f'(x)$在$(0,1)$内有界.

【解析】 应选(C).

取 $f'(x)=\frac{1}{x}$，在$(0,1)$内连续，但 $f(x)=\ln x$ 在$(0,1)$内无界，排除(A).

取 $f(x)=\frac{1}{x}$，在$(0,1)$内连续，但 $f(x)$在$(0,1)$内无界，排除(B).

取 $f(x)=\sqrt{x}$，在$(0,1)$内有界，但 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$在$(0,1)$内无界，排除(D).

故应选(C).

评注

对于像例10,例11这样的定性题目,由于很难用推理法找出正确选项,反例排除法就成了解决这类问题的有力武器.

例12 (2004[3])设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f'(a)>0$, $f'(b)<0$,则下列结论中错误的是(　　).

(A)至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使 $f(x_0)>f(a)$.　(B)至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使 $f(x_0)>f(b)$.

(C)至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使 $f'(x_0)=0$.　(D)至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使 $f(x_0)=0$.

【解析】 应选(D).

取 $f(x)=2-x^2$, $x\in[-1,1]$,则 $f'(x)=-2x$ 在 $[a,b]=[-1,1]$ 上连续,且 $f'(a)=f'(-1)=2>0$, $f'(b)=f'(1)=-2<0$,满足已知条件.

由 $f(x)=2-x^2$ 的图形可知,在 $(-1,1)$ 内, $f(x)>1$,即对任意 $x_0\in(-1,1)$,都有 $f(x_0)\neq0$.这表明(D)选项是错误的.故应选(D).

例13 (2001[3])设 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续,又 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$,则(　　).

(A) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

(B) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

(C) $(a,f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(a,f(a))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

【解析】 应选(B).

方法1(推理法) 由 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续及 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$,得 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=f'(a)=0$,即 $x=a$ 是 $f(x)$ 的驻点.从而

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=f''(a)=-1<0,$$

所以 $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

方法2(反例排除法) 取 $f(x)=-\dfrac{1}{2}(x-a)^2$,则 $f'(x)=-(x-a)$, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$,满足已知条件.由 $f(x)$ 的图形知, $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点,排除(A)、(D), $(a,f(a))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点,排除(C),故应选(B).

例14 (2003[3])设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数,且 $f'(0)$ 存在,则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$(　　).

(A)在 $x=0$ 处左极限不存在.　(B)有跳跃间断点 $x=0$.

(C)在 $x=0$ 处右极限不存在.　(D)有可去间断点 $x=0$.

【解析】 应选(D).

方法1(推理法) 因为 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数,所以 $f(0)=0$,又 $f'(0)$ 存在.所以

$$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0),$$

故 $x=0$ 是 $g(x)$ 的可去间断点.应选(D).

方法2 取 $f(x)=x$,则 $f(x)$ 是不恒等于零的奇函数,且 $f'(x)=1$,即 $f'(0)$ 存在. $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}=1$.显然(A)、(B)、(C)均不正确,故应选(D).

评 注

例 13、例 14 用推理法与排除法都能快速找到正确的选择. 如果能够吃透基本知识、基本理论,熟练掌握基本方法,用推理法是较好的选择. 否则的话,反例排除法不失为一种快速找到正确答案的方法.

例 15 (2005[1][2])设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t$,其中函数 φ 具有二阶导数,ψ 具有一阶导数,则必有( ).

(A)$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (B)$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (C)$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (D)$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

【解析】 应选(B).

取 $\varphi(x)=x^2,\psi(x)=0$,则

$$u(x,y)=(x+y)^2+(x-y)^2=2x^2+2y^2.$$

于是 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=4x,\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=4y,\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4,\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=4.$

由此可知,选项(A)、(C)、(D)都不正确. 故应选(B).

评 注

虽然本题可以通过直接计算偏导数找到正确选项,但由于计算量偏大,不如本方法简便.

例 16 (2005[3])设 $a_n>0,n=1,2,\cdots$,若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛,则下列结论正确的是( ).

(A)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 发散. (B)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 发散.

(C)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛. (D)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$ 收敛.

【解析】 应选(D).

取 $a_n=\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 收敛,但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}$ 发散,排除(A);

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$ 发散,排除(B);

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2n-1}+\dfrac{1}{2n}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n-1}{(2n-1)2n}$,而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{4n-1}{(2n-1)2n}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\dfrac{1}{n}}{2\left(2-\dfrac{1}{n}\right)}=1,$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,由比较审敛法的极限形式,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n-1}{(2n-1)2n}$ 发散,排除(C). 故应选(D).

评注

由于收敛级数任意加括号后所形成的级数仍然收敛，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$加括号后可写成$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$，收敛，故应选(D).

虽然用推理法也能较快找到正确的选项，推理法是从已知条件推出正确的结论，但由于还不知道四个选项中哪一个正确，所以进行推理时，快速找到推理的切入点就成了解题的关键. 否则反例排除法就是解决这类问题行之有效的方法. 一般地，关于与抽象级数相关的单项选择题，下面几个常见的级数是举反例的首选：

①$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$发散；

②$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$(条件)收敛；

③$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$(条件)收敛.

例 17 (2002[3])设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{B}$是$n\times m$矩阵，则线性方程组$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$(　　).

(A)当$n>m$时仅有零解.　　(B)当$n>m$时必有非零解.

(C)当$m>n$时仅有零解.　　(D)当$m>n$时必有非零解.

【解析】 应选(D).

方法1(推理法) 因为当$n<m$时，齐次线性方程组$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$有非零解，从而线性方程组$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$有非零解，故应选(D).

方法2 (反例排除法) 当$m>n$时，取$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=(3,4)$，则$|\boldsymbol{AB}|=\begin{vmatrix}3&4\\6&8\end{vmatrix}=0$，线性方程组$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$有非零解，排除(C).

当$n>m$时，取$\boldsymbol{A}=(1,2)$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$，则$|\boldsymbol{AB}|=0$，线性方程组$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$有非零解，排除(A).

当$n>m$时，取$\boldsymbol{A}=(1,2)$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，则$|\boldsymbol{AB}|=3\neq0$，线性方程组$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$只有零解，排除(B).

故只有(D)正确.

4. 赋值法

当选择题的选项含任意常数时，可以取一些特殊值去排除某些选项，从而选出正确选项的方法称为赋值法.

例 18 (2002[2])设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，向量$\boldsymbol{\beta}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，而向量$\boldsymbol{\beta}_2$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，则对任意常数$k$，必有(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$线性无关.　　(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$线性相关.

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$线性无关.　　(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$线性相关.

【解析】 应选(A).

因为$\boldsymbol{\beta}_2$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2$线性无关.

取$k=0$，由(B)知，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2$线性相关，与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2$线性无关矛盾，排除(B).

取$k=0$，由(C)知，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1$线性无关，则$\boldsymbol{\beta}_1$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，与已知条件矛盾，排除(C).

取$k=1$，由(D)知，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$线性相关，因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，所以$\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$可由$\boldsymbol{\alpha}_1$,

$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，而 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，于是 $\boldsymbol{\beta}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，与已知条件矛盾，排除(D). 故应选(A).

5. 利用题目选项中的矛盾找出正确选项

例 19 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,c_1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,c_2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,c_3,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(1,0,0,8)^{\mathrm{T}}$，则下列结论正确的是(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 必线性相关.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 必线性无关.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 必线性相关.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 必线性无关.

【解析】 应选(D).

若(C)正确，即 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，即(A)正确，排除(C).

若(B)正确，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，即(D)正确，排除(B).

若(A)正确，则(C)、(D)可能正确，排除(A). 故应选(D).

二、填空题的解题方法与技巧

填空题一般都是计算题，除了用求解解答题的方法外，掌握一些填空题的技巧对提高解题效率有重要的促进作用.

1. 利用几何意义

例 1 (2000[1]) $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=$ ________.

【解析】 应填 $\frac{\pi}{4}$.

方法 1 由定积分的几何意义，$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$ 表示由直线 $x=0,x=1,y=0$ 与曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 所围成的图形的面积，如图 5 所示，所以 $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}S=\frac{\pi}{4}$ (其中 S 为单位圆 $(x-1)^2+y^2\leqslant 1$ 的面积).

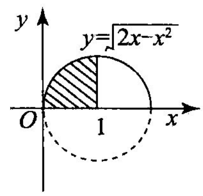

图 5

方法 2 $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$.

令 $x-1=\sin\theta,\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$，则

$$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^0(1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{4}+\left[\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0=\frac{\pi}{4}.$$

评注

方法 1 能在较短时间内，快速找到正确的答案，但如果能够结合求解答题的方法，融会贯通，对于进一步提高解题能力有较大的帮助，以 2012 年数学 1 考题 $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=$ ________ 为例：

方法 1 令 $x-1=\sin\theta,\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，则

$$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[(1+\sin\theta)\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\right]\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin\theta)\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}.$$

方法 2 $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2(2x-2+2)\sqrt{2x-x^2}\,dx$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^2(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}d(2x-x^2)+\int_0^2\sqrt{2x-x^2}\,dx$$

$$=-\frac{1}{3}[(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}]_0^2+\int_0^2\sqrt{2x-x^2}\,dx=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

例 2 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy=$ ________.

【解析】 应填$\frac{2}{3}\pi R^3$.

由二重积分的几何意义，$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$表示以$x^2+y^2\leqslant R^2$为底，以$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$为曲顶所构成的曲顶柱体的体积，如图 6 所示，即是球体$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$的体积的一半，所以

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy=\frac{2}{3}\pi R^3.$$

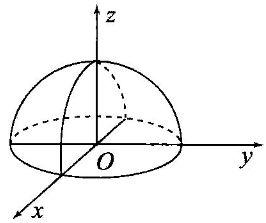

图 6

2. 利用形心坐标

设 D 是平面区域，其形心坐标为$(\bar{x},\bar{y})$，则

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\,d\sigma}{\iint\limits_D d\sigma},\quad \bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\,d\sigma}{\iint\limits_D d\sigma},$$

于是$\iint\limits_D x\,d\sigma=\bar{x}\sigma$，$\iint\limits_D y\,d\sigma=\bar{y}\sigma$，其中 σ 是平面区域 D 的面积.

例 3 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2x-4y}(3x+2y)\,dxdy=$ ________.

【解析】 应填-5π.

积分区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 2x-4y\}=\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+(y+2)^2\leqslant 5\}$，其形心坐标为$\bar{x}=1$，$\bar{y}=-2$，积分区域的面积 $\sigma=5\pi$，于是

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2x-4y}(3x+2y)\,dxdy=3\iint\limits_D x\,dxdy+2\iint\limits_D y\,dxdy$$

$$=3\cdot 1\cdot 5\pi+2\cdot(-2)\cdot 5\pi=-5\pi.$$

3. 利用被积函数的奇偶性与积分范围的对称性

如果 $f(x)$是连续函数，则 $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=\begin{cases}2\int_0^a f(x)\,dx, & \text{当 } f(x) \text{ 是偶函数时},\\ 0, & \text{当 } f(x) \text{ 是奇函数时}.\end{cases}$

类似于二重积分，(数学 1 要求的)三重积分、第一类曲线积分、第一类曲面积分也有相应的简化计算公式.

例 4 (2001[2]) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x\,dx=$ ________.

【解析】 应填$\frac{\pi}{8}$.

$$\text{原式}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^3\cos^2 x\,dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 x\,dx=0+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 x\,dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x(1-\sin^2 x)\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx$$

$$=2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{8}.$$

评 注

本题用到了公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 1, & \text{当 } n \text{ 为奇数时},\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数时}.\end{cases}$$

本题也可以这样计算：

$$\text{原式}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{8}-\left[\frac{1}{16}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{8}.$$

例 5 （2012[2]）设区域 D 是由曲线 $y=\sin x$，$x=\pm\frac{\pi}{2}$，$y=1$ 围成，则 $\iint\limits_D (x^5y-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

【解析】 应填 $-\pi$.

方法 1 $\text{原式}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}(x^5y-1)\,\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}x^5-1-\frac{1}{2}x^5\sin^2 x+\sin x\right)\mathrm{d}x$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(-1)\,\mathrm{d}x=-\pi.$$

方法 2 如图 7 所示，按照对被积函数与积分区域的可加性，

$$\text{原式}=\iint\limits_{D_1}x^5y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}x^5y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

由于 D_1 关于 x 轴对称，x^5y 关于 y 为奇函数，所以 $\iint\limits_{D_1}x^5y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$；又由于 D_2 关于 y 轴对称，x^5y 关于 x 为奇函数，所以 $\iint\limits_{D_2}x^5y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，于是

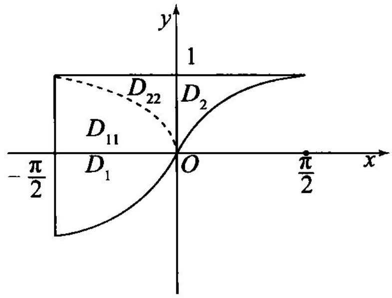

图 7

$$\text{原式}=-\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint\limits_{D_{11}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\iint\limits_{D_{22}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-2\left(\iint\limits_{D_{11}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_{22}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)=-2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1=-\pi.$$

4. 利用轮换对称性

例 6 （2008[3]）设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，则 $\iint\limits_D (x^2-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

【解析】 应填 $\frac{\pi}{4}$.

因为积分区域 D 关于 x 轴对称，函数 y 关于 y 是奇函数，所以 $\iint\limits_D y\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. 由轮换对称性以及极坐标下二重积分的计算方法，有

$$\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

故 $$\iint\limits_D (x^2-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}.$$

例 7 $\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant R^2\\x\geqslant 0,y\geqslant 0}} \dfrac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________，其中 $f(x)$ 是大于零的连续函数.

【解析】 应填$\dfrac{1}{8}(a+b)\pi R^2$.

方法 1 由轮换对称性，$\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant R^2\\x\geqslant 0,y\geqslant 0}} \dfrac{f(x)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant R^2\\x\geqslant 0,y\geqslant 0}} \dfrac{f(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，所以，

$$原式=a\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant R^2\\x\geqslant 0,y\geqslant 0}} \frac{f(x)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+b\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant R^2\\x\geqslant 0,y\geqslant 0}} \frac{f(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{a+b}{2}\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant R^2\\x\geqslant 0,y\geqslant 0}}\left[\frac{f(x)}{f(x)+f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)+f(y)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a+b}{2}\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant R^2\\x\geqslant 0,y\geqslant 0}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{8}(a+b)\pi R^2.$$

方法 2(特殊函数法) 取 $f(x)=1$，则原式$=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant R^2\\x\geqslant 0,y\geqslant 0}}\dfrac{a+b}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{1}{8}(a+b)\pi R^2$.

例 8 (2009[1]) 设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$，则$\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ ________.

【解析】 应填$\dfrac{4}{15}\pi$.

利用轮换对称性，有

$$\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

再利用球坐标下三重积分的计算有

$$原式=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1(r^2\cdot r^2)\mathrm{d}r=\frac{1}{3}\cdot 2\pi\cdot\Big[-\cos\varphi\Big]_0^{\pi}\cdot\left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^1=\frac{4}{15}\pi.$$

评 注

本题还可以用截面法、柱坐标、直接利用球坐标等三种计算方法.但上面解法计算量相对较小.

例 9 (2007[1]) 设曲面 Σ: $|x|+|y|+|z|=1$，则$\oiint\limits_{\Sigma}(x+|y|)\mathrm{d}S=$ ________.

【解析】 应填$\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$.

因为 Σ 关于 yOz 平面对称，x 关于 x 为奇函数，所以$\oiint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}S=0$.由轮换对称性，

$$\oiint\limits_{\Sigma}|y|\mathrm{d}S=\oiint\limits_{\Sigma}|x|\mathrm{d}S=\oiint\limits_{\Sigma}|z|\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}(|x|+|y|+|z|)\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=\frac{1}{3}S,$$

其中 S 是 Σ 的表面积，记 Σ 在第一卦限部分的面积为 S_1.如图 8 所示，则

$$S_1=\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故　原式$=\oiint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}S+\oiint\limits_{\Sigma}|y|\mathrm{d}S=0+\dfrac{1}{3}S=\dfrac{1}{3}\cdot 8S_1=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$.

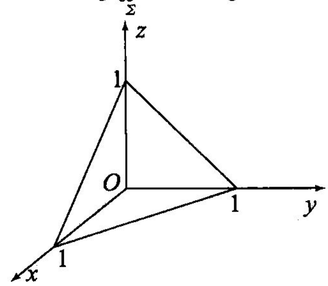

图 8

精编习题

第一部分 高等数学

选择题

1. 设当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限存在，而 $g(x)$ 的极限不存在，则下列命题正确的是(　　).

(A) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ 不存在.

(B) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x)\neq 0)$ 不存在.

(C) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)^{f(x)}(g(x)>0)$ 不存在.

(D) $\lim\limits_{x\to x_0}[af(x)+bg(x)]$($a,b$ 是非零常数)不存在.

2. 设 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 不是无穷大量，则下述结论正确的是(　　).

(A)当 $x\to x_0$ 时，$g(x)$ 是无穷小量，则 $f(x)g(x)$ 必是无穷小量.

(B)当 $x\to x_0$ 时，$g(x)$ 不是无穷小量，则 $f(x)g(x)$ 必不是无穷小量.

(C)设在 $x=x_0$ 的某邻域 $g(x)$ 无界，则当 $x\to x_0$ 时，$f(x)g(x)$ 必是无穷大量.

(D)设在 $x=x_0$ 的某邻域 $g(x)$ 有界，则当 $x\to x_0$ 时，$f(x)g(x)$ 必不是无穷大量.

3. (2012[1][2])设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导，则(　　).

(A)当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

(B)当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

(C)当 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=0$.

(D)当 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=0$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 则 $x=0$ 是间断点的函数是(　　).

(A) $\max\{f(x),g(x)\}$.　　(B) $\min\{f(x),g(x)\}$.

(C) $f(x)-g(x)$.　　(D) $f(x)+g(x)$.

5. 下列命题中不正确的是(　　).

(A)数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+l}=a$，其中 l 为某个确定的正整数.

(B)数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1}=a$.

(C)数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，则 $\{a_n\}$ 有界.

(D)设 $x_n\leqslant a_n\leqslant y_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

6. 下列命题中正确的是(　　).

(A)有界函数乘无界函数仍是无界函数.　　(B)无界函数乘无穷大量仍是无穷大量.

(C)无穷小量乘任一个实数仍是无穷小量.　　(D)两个无穷大量之和仍是无穷大量.

7. (2003[1][2])设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\infty$，则必有(　　).