普通高等教育"十二五"规划教材

普通高等院校数学精品教材

线性代数教程同步辅导

梅家斌　朱祥和　主编

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

华中科技大学出版社

http://www.hustp.com

线性代数教程同步辅导

主编　梅家斌　朱祥和
编委　林升旭　叶牡才　阎国辉
　　　贺丽娟　杨　戟

华中科技大学出版社
中国·武汉

内 容 提 要

本书是《线性代数教程》(林升旭、梅家斌编，华中科技大学出版社出版)的配套辅导书．全书共分五章，分别为行列式、矩阵运算、初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵与二次型．每章按节编排，分内容提要、释疑解惑、典型例题解析；各章还编有综合范例、自测题、答案与提示等，内容通俗易懂、循序渐进．

本书对于理工类在校本科生加深理解线性代数课程中的基本概念，提高逻辑推理及运算能力，定会大有裨益，对于希望进一步深造、报考研究生的同学也会有很大帮助．

图书在版编目(CIP)数据

线性代数教程同步辅导/梅家斌　朱祥和　主编．—武汉：华中科技大学出版社，2011.12
ISBN 978-7-5609-7543-6

Ⅰ．线…　Ⅱ．①梅…　②朱…　Ⅲ．线性代数-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 254876 号

线性代数教程同步辅导　　　　梅家斌　朱祥和　主编

策划编辑：周芬娜
责任编辑：王汉江
封面设计：潘　群
责任校对：朱　玢
责任监印：周治超
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)
　　　　　武昌喻家山　　邮编：430074　　电话：(027)87557437
录　　排：武汉佳年华科技有限公司
印　　刷：湖北通山金地印务有限公司
开　　本：710mm×1000mm　1/16
印　　张：16.5
字　　数：370 千字
版　　次：2011 年 12 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价：29.80 元

华中出版

本书若有印装质量问题，请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线：400-6679-118　竭诚为您服务

前　　言

凡是学过“线性代数”这门课程的读者都会有这样的感受：概念多而抽象，定理严谨难懂，方法灵活，技巧性强，尤其是一些论证问题更是不知从何下手.这的确是学习该门课程中普遍存在的问题.究其原因，作者认为主要有以下两点：其一是该课程的教学课时数偏少，几乎没有充足的教学指导和习题演练时间，导致学生对该课程基础知识掌握不牢固，知识点不能融汇贯通；其二是因本课程内在特征所致.线性代数主要是以矩阵为工具，研究线性空间的结构与特征，并通过线性变换来进一步揭示其内在的联系及规律性，其内容与中学所学的代数相比（中学代数主要是数的运算），虽然具有某些相似之处，但有较大反差，其符号抽象，运算和变换灵活多变，特别是许多概念和定理不仅抽象难懂，而且具有相当多的等价形式.因此，如果没有经过一定系统的演练和反复揣摩，是很难谈得上对该课程内容的理解和掌握，更难达到运用自如的效果.

为了尽快地学好线性代数这门课程，准确深入地理解其中的理论，释解心中的疑惑，透彻理解各种知识点及内在联系，选择最佳方案解答各种习题，是每一位读者都面临并急待解决的难题.

作者根据目前工科高等学校线性代数课程教学的基本要求，结合多年从事该课程教学实践的经验和资料积累，博采众长，编写了这本教学辅导书，以期能指导读者学习和复习考试，帮助读者拓宽思路，掌握知识结构、内在联系及解题技巧，提高解题速度和运算能力.

本书以节为单位进行编排，其结构体系大致如下.

【内容提要】 概述了每一节的基本概念、基本方法及基本定理.

【释疑解惑】 解答读者在学习过程中常出现的疑惑问题、容易混淆的错误概念及解题过程中常出现的错误运算.

【典型例题解析】 结合每节的具体内容，精选同步题型，将其归类、解析，并进行点评、总结，指出解题思路以期对读者起到画龙点睛、触类旁通的功效.在解题中尽量做到一题多解，指出最佳解法，以提高读者发散思维.对于这一部分内容，读者尤其是在校学生可顺着教学内容同步学习.

【综合范例】 这一部分配有历年全国考研代表性题目，还选有相当数量的几何与代数相关联的例题及应用题，综合性强，方法更具技巧性.这部分内容应放在整个课程结束后学习，主要用以复习提高为目的，以期提高读者的综合分析能力和实际应用知识的能力.

【自测题、答案与提示】 这部分题型有填空题、选择题、计算题和证明题，这里也配有部分历年教学考试试题、考研试题，各试题给出了答案，部分试题给出了简单解析以供读者自测用.

本书题目覆盖面广，典型丰富. 在编排上由浅入深、循序渐进地展开，解题力求简明清晰，易学易懂. 本书是读者在学习线性代数课程及考研复习过程中的良师益友，也是年轻教师教学辅导的重要参考书.

本书共分五章. 第1、2章由华中科技大学武昌分校朱祥和老师编写，第3～5章由华中科技大学文华学院梅家斌老师编写，华中科技大学文华学院林升旭老师提供了全部自测题、答案及提示.

本书在编写过程中得到了华中科技大学文华学院林益教授及华中科技大学武昌分校刘国钧教授等人的大力帮助及悉心指导，在此表示衷心的感谢.

限于作者水平，书中错漏之处在所难免，敬请广大读者指正.

编　者

2011年8月

目　　录

第1章 行 列 式

1.1 行列式的概念

一、内 容 提 要

1. 排列的逆序数

定义 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序实数组称为一个 n 元排列. n 元排列的总个数有 $n!$ 个. 在一个 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 中,若 $i_t>i_s$,则称这两个数 i_t,i_s 构成一个逆序,一个排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中逆序的总数称为这个排列的逆序数,记作 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

2. 排列的奇偶性及对换性质

定义 一个排列的逆序数为奇(偶)数,称此排列为奇(偶)排列.

在一个排列中,交换两个数字的位置,其余数字不动,称对排列作一次对换,相邻两数字的对换称为邻换.

(i) 一次对换改变排列的奇偶性.

(ii) 任一个 n 元排列都可经过有限次数的对换变为自然排列,且所作对换的次数的奇偶性与该排列的奇偶性相同.

(iii) 全体 n 元排列的个数为 $n!$ 个,奇排列数与偶排列数各一半.

3. n 阶行列式的定义

定义 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成如下的 n 行 n 列,定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

称 D 为 n 阶行列式,也记为 $D=\det\boldsymbol{A}$($\boldsymbol{A}$ 为行列式 D 的矩阵). 这里 $\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$ 表示对所有 n 元排列求和,故 n 阶行列式等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积的代数和,共有 $n!$ 项,每一项所置的符号取决于组成该项的 n 个元素的列下标排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数(行下标按自然顺序排列),即当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时置以正号,当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时置以负号.

对角行列式、上(下)三角行列式的值为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

二、释疑解惑

问题1 确定下列五阶行列式中项 $a_{34}a_{25}a_{41}a_{12}a_{53}$ 的符号.

答 $a_{34}a_{25}a_{41}a_{12}a_{53}=a_{12}a_{25}a_{34}a_{41}a_{53}$，其列下标排列为 25413，因 $\tau(25413)=6$，故为偶排列，此项的符号为正号.

问题2 写出四阶行列式中所有包含有 a_{12}，a_{23} 的项.

答 由 n 阶行列式的定义，每项均取自于不同行不同列元素的乘积，这里要求包含有 a_{12}，a_{23}，将其行下标按自然排列后有两种情况，即 $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$，$a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$，并且需考虑项的符号，$\tau(2314)=2$，$\tau(2341)=3$，故为 $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$，$-a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$.

问题3 用定义计算：

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

解
$$\begin{aligned}\text{原式}&=(-1)^{\tau(2\,3\,\cdots\,n\,1)}1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot n\\ &=(-1)^{n-1}n!.\end{aligned}$$

问题4 计算 n 元排列的逆序数通常有哪些方法？

答 常用下面两种方法.

(1) 分别算出排在 $1,2,\cdots,n$ 前面比它大的数码个数之和，即逐一算出 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个元素的逆序数，这 n 个元素的逆序数之总和即为所求 n 元排列的逆序数.

(2) 从左边起，分别算出排列中每个元素前面比它大的数码之和，即算出排列中每个元素的逆序数，这每个元素的逆序数之总和即为所求排列的逆序数.

问题5 怎样确定排列的奇偶性？

答 (1) 首先求出所给排列的逆序数，若逆序数为偶数，则此排列是一个偶排列；若逆序数为奇数，则此排列为奇排列.

(2) 将所给排列进行对换，如果该排列进行了 k 次对换后变成了自然顺序排列，则该排列的奇偶性与对换次数 k 的奇偶性相同，这是因为每对换一次就改变一次排列的奇偶性，而自然顺序排列的逆序数为零，所以原来排列的奇偶性与对换次数 k 的奇偶性相同.

问题6 为什么 $n(n\geqslant 4)$ 阶行列式不能按对角线展开？

答 二阶、三阶行列式可以按对角线展开，而四阶及四阶以上的行列式不能按对角线展开，因为它不符合 $n(n\geqslant 4)$ 阶行列式的定义. 例如，对于四阶行列式. 如果按对角线法则，则只能写出 8 项，这显然是错误的，按照行列式的定义可知，四阶行列式一共有 4! 项；另外，按对角线作出的项的符号也不一定正确，比如，乘积项 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$，其列排列 4123 的逆序数为 3，应取负号. 所以，在计算 $n(n\geqslant 4)$ 阶行列式时，对角线法则失效.

三、典型例题解析

例 1 行列式

$$D_1=\begin{vmatrix}1&3&1\\2&2&3\\3&1&5\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}\lambda&0&1\\0&\lambda-1&0\\1&0&\lambda\end{vmatrix}.$$

若 $D_1=D_2$，则 λ 的取值为(　　).

(A) 0,1　　(B) 0,2　　(C) 1,−1　　(D) 2,−1

解 按三阶行列式的对角线法则，有

$$D_1=10+2+27-6-30-3=0,\quad D_2=\lambda^2(\lambda-1)-(\lambda-1)=(\lambda+1)(\lambda-1)^2.$$

若 $D_1=D_2$，则 $(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0$，解得 $\lambda_1=-1$ 或 $\lambda_2=1$. 选(C).

例 2 排列 134782695 的逆序数是(　　).

(A) 9　　(B) 10　　(C) 11　　(D) 12

解 $\tau(134782695)=4+0+2+4+0+0+0+0+0+0=10$. 选(B).

例 3 下列排列中(　　)是偶排列.

(A) 4312　　(B) 51432　　(C) 45312　　(D) 654321

解 $\tau(4312)=5$，$\tau(51432)=7$，$\tau(45312)=8$，$\tau(654321)=15$，选(C).

例 4 问 i,j 取何值时，排列 $32i4j6$ 为偶排列.

解 排列 $32i4j6$ 中，i,j 可取数字为如下两种情况.

(1) $i=1,j=5$；　(2) $i=5,j=1$.

当 $i=5,j=1$，$\tau(325416)=6$，该排列为偶排列. 而当 $i=1,j=5$ 时，对应的排列为奇排列.

例 5 求下列五阶行列式的对应项所带的符号.

(1) $a_{13}a_{41}a_{52}a_{34}a_{25}$；　　(2) $a_{21}a_{43}a_{12}a_{54}a_{35}$.

解 (1) 将项的元素所处的行下标按自然顺序排列为 $a_{13}a_{41}a_{52}a_{34}a_{25}\rightarrow a_{13}a_{25}a_{34}a_{41}a_{52}$，列下标的逆序数为 $\tau(35412)=3+3+1+0+0=7$，排列为奇排列，该项带负号.

(2) $a_{21}a_{43}a_{12}a_{54}a_{35}\rightarrow a_{12}a_{21}a_{35}a_{43}a_{54}$，列下标排列的逆序数为 $\tau(21534)=1+1+0+1+0=3$，排列为奇排列，该项带负号.

例 6 写出四阶行列式中含 a_{23} 且带负号的项.

解 在四阶行列式中，含因子 a_{23} 的项其形式为 $a_{1j_1}a_{23}a_{3j_3}a_{4j_4}$，其中 j_1,j_3,j_4 任取 1,2,4 的一个数，故对应项的列下标排列有 6 个，其逆序数为

$$\tau(1324)=1,\quad \tau(1342)=2,\quad \tau(2314)=2,$$
$$\tau(2341)=3,\quad \tau(4312)=5,\quad \tau(4321)=6,$$

故含 a_{23} 且带负号的项为

$$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44},\quad -a_{12}a_{23}a_{34}a_{41},\quad -a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}.$$

例 7 计算下列排列的逆序数，并讨论奇偶性.

(1) $n(n-1)\cdots 21$；　　(2) $135\cdots(2n-1)2n(2n-2)\cdots 42$.

解 (1) $\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0=\dfrac{n(n-1)}{2}$，该排列当 $n=4k,n=4k+1$ 时为偶排列，当 $n=4k+2,n=4k+3$ 时为奇排列.

(2) 对于排列 $13\cdots(2n-1)2n(2n-2)\cdots 42$ 中，前面 n 个数字 $13\cdots(2n-1)$ 为顺序排法，只考虑后 n 个偶数的逆序数就行了，故 $\tau(13\cdots(2n-1)2n(2n-2)\cdots 42)=0+2+4+\cdots+(2n-2)=2(1+2+\cdots+n-1)=n(n-1)$，无论 n 为奇数或偶数，$n(n-1)$ 为偶数，故该排列为偶排列.

例 8 设排列(Ⅰ) $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数为 k，求排列(Ⅱ) $i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1$ 的逆序数.

解 设排列(Ⅰ) $i_1i_2\cdots i_n$ 中，i_1 的逆序数为 k_1，由逆序数定义知，在 i_1 后面比 i_1 小的数有 k_1 个，也即有 $(n-1)-k_1$ 个顺序，则在排列(Ⅱ) $i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1$ 中，i_1 的逆序数为 $(n-1)-k_1$，同样设排列(Ⅰ)中 i_2 的逆序数为 k_2，即有 $(n-2)-k_2$ 个顺序，则在排列(Ⅱ)中 i_2 有 $(n-2)-k_2$ 个逆序数，…，依此类推，i_{n-1} 在排列(Ⅱ)中有 $[n-(n-1)]-k_{n-1}$ 个逆序数，i_n 有 $(n-n)-k_n$ 个逆序数，而 $k=k_1+k_2+\cdots+k_n$，于是排列(Ⅱ)的逆序数为

$$\begin{aligned}\tau(i_ni_{n-1}\cdots i_1)&=[(n-1)-k_1]+[(n-2)-k_2]+\cdots(1-k_{n-1})-k_n\\&=\frac{n(n-1)}{2}-(k_1+k_2+\cdots+k_n)=\frac{n(n-1)}{2}-k.\end{aligned}$$

***例 9** 用定义计算五阶行列式：

$$D_5=\begin{vmatrix}0&a_{12}&a_{13}&0&0\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\0&a_{42}&a_{43}&0&0\\0&a_{52}&a_{53}&0&0\end{vmatrix}$$

其中第 2,3 行及第 2,3 列上的元素都不等于零.

解 D_5 中各行非零元素的列标分别可取以下各值：

$$p_1=2,3;\quad p_2=1,2,3,4,5;\quad p_3=1,2,3,4,5;\quad p_4=2,3;\quad p_5=2,3.$$

在上述可能取的数值中，不能组成任何一个五元排列 $p_1p_2p_3p_4p_5$，即 D_5 的每项 5 个元素中，必至少含有一个零元素，由行列式的定义可知，$D_5=0$.

例 10 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&a_{1n}\\0&0&\cdots&a_{2,n-1}&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&a_{n-1,2}&\cdots&0&0\\a_{n1}&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}.$$

解一 定义法.

$$D=(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 21)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

解二 邻换法. 把 D 的 n 列，$n-1$ 列，…，2 列，1 列依次经 $n-1,n-2,\cdots,2,1$ 次邻换成新的行列式的 1 列，2 列，…，$n-1$ 列，n 列，即

$$D=(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1}\begin{vmatrix} a_{1n} & & & \\ & a_{2,n-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{1n} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

解三 对换法.当 n 为奇数时,把 D 的 1 列与 n 列对换,2 列与 $n-1$ 列对换,…,共经过$\dfrac{n-1}{2}$次对换,变成对角行列式,即

$$D=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\begin{vmatrix} a_{1n} & & & \\ & a_{2,n-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n1} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

当 n 为偶数,经$\dfrac{n}{2}$次对换,使

$$D=(-1)^{\frac{n}{2}}\begin{vmatrix} a_{1n} & & & \\ & a_{2,n-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n1} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

两式合并为 $$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

同理有 $$D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

例 11 用行列式的定义求下列行列式中 x^4,x^3 的系数.

$$(1)\begin{vmatrix} 3x & 2 & -4 & 1 \\ -x & x & -1 & 3 \\ 7 & 5 & 2x & 2 \\ x & 2 & 1 & x \end{vmatrix};\qquad (2)\begin{vmatrix} x+1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & x+2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & x+3 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & x+4 \end{vmatrix}.$$

解 (1) 四阶行列式的一般项为$(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$,要求 x^4 的系数,则必须每个 $a_{ip_i}(i=1,2,3,4)$都要含有 x,这样的项只有

$$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=(-1)^0\cdot 3x\cdot x\cdot 2x\cdot x=6x^4.$$

于是 $f(x)$中 x^4 的系数为 6.

要求 x^3 的系数,则必须 4 个 $a_{ip_i}(i=1,2,3,4)$中有 3 个含有 x,这样的项有

$$(-1)^{\tau(2134)}a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}\cdot a_{44}=4x^3,\quad (-1)^{\tau(4231)}a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}=-2x^3,$$

故 $f(x)$中 x^3 的系数是 2.

(2) 考虑行列式的第 1 行元素,含 $a_{11}=x+1$ 的项只有主对角线上元素之积$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$中才有 x^3,x^4,$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=x^4+10x^3$

$+35x^2+50x+24$,其余项所含 x 的次数不大于 2.

对于含 $a_{12}=5$ 的项中因不含主对角线元素 $a_{11}=x+1$,$a_{22}=x+2$,故含 a_{12} 的项中 x 的次数皆不大于 2. 同理含 a_{13},a_{14} 的项中,x 的次数也皆不大于 2,故行列式中 x^3 的系数为 10,x^4 的系数为 1.

1.2 行列式的性质

一、内 容 提 要

1. 转置

$D^{\mathrm{T}}=D$.

2. 数乘

用数 k 乘行列式等于将行列式的某一行(列)的元素都乘 k 倍,或者说行列式中的一行(或列)有公因数 k,则把 k 提到行列式外面来.

3. 对换

把行列式任两行(列)对换,则行列式变号.

4. 拆项

行列式的 i 行(列)的每个元素都为两个元素之和,则该行列式可表示为两个行列式之和.

5. 消元

将行列式一行(列)的 k 倍加到另一行(列),其值不变.

推论 1 如果行列式中有两行(列)相同,则行列式为零.

推论 2 如果行列式中有两行(列)成比例,则行列式为零.

理解并能较熟练地运用行列式的性质,是化简行列式和计算行列式最重要的一环.

二、释 疑 解 惑

问题 1 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & a_2+b_3 \\ a_3+b_1 & a_3+b_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

解 (1)
$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & a_2+b_3 \\ a_3+b_1 & a_3+b_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 \\ a_2 & a_2+b_2 & a_2+b_3 \\ a_3 & a_3+b_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 \\ b_1 & a_2+b_2 & a_2+b_3 \\ b_1 & a_3+b_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 \\ a_2 & b_2 & b_3 \\ a_3 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & a_1 \\ b_1 & a_2 & a_2 \\ b_1 & a_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

(2) $\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\3&0&1&1\\3&1&0&1\\3&1&1&0\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{vmatrix}$

$=-3.$

问题 2 求方程 $\begin{vmatrix}1+\lambda&1&1&1\\1&1+\lambda&1&1\\1&1&1+\lambda&1\\1&1&1&1+\lambda\end{vmatrix}=0$ 的根.

解 $\begin{vmatrix}1+\lambda&1&1&1\\1&1+\lambda&1&1\\1&1&1+\lambda&1\\1&1&1&1+\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4+\lambda&1&1&1\\4+\lambda&1+\lambda&1&1\\4+\lambda&1&1+\lambda&1\\4+\lambda&1&1&1+\lambda\end{vmatrix}$

$$=(4+\lambda)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1+\lambda&1&1\\1&1&1+\lambda&1\\1&1&1&1+\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(4+\lambda)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&\lambda&0&0\\0&0&\lambda&0\\0&0&0&\lambda\end{vmatrix}=(4+\lambda)\lambda^3=0,$$

故方程的根为 $\lambda_1=-4,\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$.

三、典型例题解析

例 1 计算下列行列式:

(1) $D_1=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\3&4&5&6\\5&4&8&1\end{vmatrix}$; (2) $D_2=\begin{vmatrix}1&p&q&r+s\\1&q&r&p+s\\1&r&s&p+q\\1&s&q&p+r\end{vmatrix}$.

解 (1) 利用消元性质,将第 1 行的 -3 倍加到第 3 行上,再由第 3 行与第 2 行成比例,得

$$D_1=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&-2&-4&-6\\5&4&8&1\end{vmatrix}=(-2)\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&1&2&3\\5&4&8&1\end{vmatrix}=0.$$

(2) 根据行列式的特点,将第 2,3 列加到第 4 列上,再由第 4 列与第 1 列成比例,得

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & p & q & p+q+r+s\\1 & q & r & p+q+r+s\\1 & r & s & p+q+r+s\\1 & s & q & p+q+r+s\end{vmatrix}=(p+q+r+s)\begin{vmatrix}1 & p & q & 1\\1 & q & r & 1\\1 & r & s & 1\\1 & s & q & 1\end{vmatrix}=0.$$

例 2 设 $abcd=1$，计算行列式 $D=\begin{vmatrix}a^2+\frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1\\b^2+\frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1\\c^2+\frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1\\d^2+\frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1\end{vmatrix}$.

解 $D=\begin{vmatrix}a^2 & a & \frac{1}{a} & 1\\b^2 & b & \frac{1}{b} & 1\\c^2 & c & \frac{1}{c} & 1\\d^2 & d & \frac{1}{d} & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1\\\frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1\\\frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1\\\frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1\end{vmatrix}$

$$=abcd\begin{vmatrix}a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a}\\b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b}\\c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c}\\d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d}\end{vmatrix}+(-1)^3\begin{vmatrix}a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a}\\b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b}\\c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c}\\d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d}\end{vmatrix}=0.$$

例 3 计算行列式：

$$D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\1 & -1 & 1+x & -1\\1 & x-1 & 1 & -1\\1+x & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}.$$

解 行列式每行元素之和都为 x，故把第 2、3、4 列都加到第 1 列上，提取因子.

$$D=\begin{vmatrix}x & -1 & 1 & x-1\\x & -1 & 1+x & -1\\x & x-1 & 1 & -1\\x & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\1 & -1 & 1+x & -1\\1 & x-1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix},$$

将第 1 行的 -1 倍加到各行上，得