范 氏

高等代數學題解

范 氏

高等代數學題解

青 年 科 學 社

范氏高等代數學題解

定價國幣

外埠酌加寄費

編演者　青年科學社

發行者　青年科學社

經售處　新亞書店
上海河南路一五九號

各埠各大書局均有經售

中華民國三十七年九月十二版

例　言

范氏高等代數學一書，說理明顯便於學習，故各中學多用以為教本．惟高等代數學之算理較為深奥，課本內所附習題，在初學者自行演算時，每有艱於索解，不能全部應付自如．本社應學者之需要特輯是編，以備課餘自習時之參考．

本書題解，坊間早有數種出見，然檢其內容，無不訛誤百出，弊害殊非淺鮮．本題解編演者，憑其教授范氏高等代數學十餘年之經驗逐題演算，準確不誤，其精到實遠非坊間同樣之題解書所能及，至於排校精良，尤其餘事而已．

為讀原本書者翻檢時便利起見，本書每一習題下附注英文原本之頁數，

范氏高等代數學題解

習　題　I　　　第89頁

1.　$x^2yz^3+2x^5y^4z^6+3x^7y^2z^8$ 之次數就 x, y, z 言各若何?就 y 及 z 者言又若何?就 x, y, 及 z 三者言又若何?

〔解〕　$x^2yz^3+2x^5y^4z^6+3x^7y^2z^8$ 式中,關於 x 爲 7 次,關於 y 爲 4 次,於 z 爲 8 次;關於 y 與 z 爲 10 次;關於 x, y, z 爲 17 次。

2.　$(x+1)(2x^2+3)(x^4-7)$ 之次數若何?

〔解〕　$(x+1)(2x^2+3)(x^4-7)$ 爲 7 次式。

3.　已與 $3x^7+x^6-4x^4+x^3-12$, 如用 § 277 之記法,則 $n, a_0, a_1, \cdots$ 之値若何?

〔解〕　以 $3x^7+x^6-4x^4+x^3-12$ 與 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots a_{n-1}x+a_n$ 比較得

$$n=7,\ a_0=3,\ a_1=1,\ a_2=0,\ a_3=-4,$$
$$a_4=1,\ a_5=0,\ a_6=0,\ a_7=-12.$$

4.　若 $f(x)=2x^3-x^2+3$, 試求 $f(0), f(-1), f(3), f(8)$.

〔解〕　$f(0)=2(0)^3-(0)^2+3=3.$

$$f(-1)=2(-1)^3-(-1)^2+3=-2-1+3=0.$$
$$f(3)=2\times 3^3-3^2+3=54-9+3=48.$$
$$f(8)=2\times 8^3-8^2\times 3=1024-64+3=963.$$

5.　若 $f(x)=(x^2-3x+2)/(2x+5)$, 試求 $f(0), f(-2), f(6)$.

〔解〕　$f(0)=(0^2-3\times 0+2)/(2\times 0+5)=2/5.$

$$f(-2)=\{(-2)^2-3(-2)+2\}/\{2(-2)+5\}$$

$=\{4+6+2\}/\{-4+5\}=12.$

$f(6)=(6^2-3\times6+2)/(2\times6+5)$

$=(36-18+2)/(12+5)=20/17.$

6. 若 $f(x)=x+\sqrt{x}+3$, 試求 $f(1)$, $f(4)$, $f(5)$.

［解］ $f(1)=1+\sqrt{1}+3=1+1+3=5.$

$f(4)=4+\sqrt{4}+3=4+2+3=9.$

$f(5)=5+\sqrt{5}+3=8+\sqrt{5}.$

7. 若 $f(x)=2x+3$, 則 $f(x-2)$ 若何? $f(x^2+1)$ 若何?

［解］ $f(x-2)=2(x-2)+3=2x-4+3=2x-1.$

$f(x^2+1)=2(x^2+1)+3=2x^2+2+3=2x^2+5.$

8. 若 $f(x, y)=x^3+x-y+8$, 試求下列各值:

$f(0, 0)$, $f(1, 0)$, $f(0, 1)$, $f(1, 1)$, $f(-2, -3)$.

［解］ $f(0, 0)=0^3+0-0+8=8.$

$f(1, 0)=1^3+1-0+8=1+1-0+8=10.$

$f(0, 1)=0^3+0-1+8=0+0-1+8=7.$

$f(1, 1)=1^3+1-1+8=1+1-1+8=9.$

$f(-2, -3)=(-2)^3+(-2)-(-3)+8=-8-2+3+8=1.$

習　題　II　　　第 97 頁

1. 加 $4ax^2y$, $-6ax^2y$, $5bx^2y$, 及 $-3bx^2y$.

［解］ $4ax^2y+(-6ax^2y)+5bx^2y+(-3bx^2y)$

$=4ax^2y-6ax^2y+5bx^2y-3bx^2y$

$=-2ax^2y+2bx^2y=2x^2y(b-a).$

2. 加 $7a^2+2a-b^2$, $3a+b^2-2a^2$, 及 $b^2-4a-4a^2$.

［解］ $(7a^2+2a-b^2)+(3a+b^2-2a^2)+(b^2-4a-4a^2)$

$=7a^2+2a-b^2+3a+b^2-2a^2+b^2-4a-4a^2=a^2+a+b^2.$

3. 加 $3x^2-5x+6$, x^2+2x-8, 及 $-4x^2+3x-7$.

[解] $(3x^2-5x+6)+(x^2+2x-8)+(-4x^2+3x-7)$

$=3x^2-5x+6+x^2+2x-8-4x^2+3x-7=-9.$

4. 加 $4a^3+a^2b-5b^3$, $\frac{5}{3}a^3-6ab^2-a^2b$, $\frac{1}{3}a^3+10b^3$, 及 $6b^3-15ab^2$ $4a^2b-10a^3$.

[解] $(4a^3+a^2b-5b^3)+(\frac{5}{3}a^3-6ab^2-a^2b)+(\frac{1}{3}a^3+10b^3)$

$+(6b^3-15ab^2-4a^2b-10a^3)$

$=(4+\frac{5}{3}+\frac{1}{3}-10)a^3+(1-1-4)a^2b+(-6-15)ab^2$

$+(-5+10+6)b^3=-4a^3-4a^2b-21ab^2+11b^3.$

5. 由 $3a+b-c$ 減 $4a-2b+6c$.

[解] $(3a+b-c)-(4a-2b+6c)=3a+b-c-4a+2b-6c$

$=-a+3b-7c.$

6. 由 x^3+6x^2+5 減 $2x^2-5x+7$.

[解] $(x^3+6x^2+5)-(2x^2-5x+7)=x^3+6x^2+5-2x^2+5x-7$

$=x^3+4x^2+5x-2.$

7. a^3+5a^2b 須加何式始能得 a^3+b^3?

[解] 設 p 爲所求式,則 $(a^3+5a^2b)+p=a^3+b^3$.

$\therefore p=(a^3+b^3)-(a^3+5a^2b)=a^3+b^3-a^3-5a^2b=b(b^2-5a^2).$

8. 由 $x^3+y^3-6x+5y$ 減下二式之和:

$$-2x^2-6x+7y-8,\ x^3+2x^2-5y+9.$$

[解] $(x^3+y^3-6x+5y)-\{(-2x^2-6x+7y-8)+(x^3+2x^2-5y+9)\}$

$=x^3+y^3-6x+5y-\{x^3-6x+2y+1\}$

$=x^3+y^3-6x+5y-x^3+6x-2y-1=y^3+3y-1.$

9. 簡化 $-(a+b)+\{-a-(2a-b)\}-6(a-4b)$.

[解] $-(a+b)+\{-a-(2a-b)\}-6(a-4b)$

$=-a-b-a-2a+b-6a+24b=-10a+24b.$

10 簡化 $6x-\{4x+[2x-(3x+\overline{5x+7}-1)+3]-8\}$.

[解] $6x-\{4x+[2x-(3x+\overline{5x+7}-1)+3]-8\}$

$=6x-4x-[2x-(3x+5x+7-1)+3]+8$

$=6x-4x-2x+(3x+5x+7-1)-3+8$

$=6x-4x-2x+3x+5x+7-1-3+8$

$=8x+11.$

或 $6x-\{4x+[2x-(3x+\overline{5x+7}-1)+3]-8\}$

$=6x-\{4x+[2x-(8x+6)+3]-8\}$

$=6x-\{4x+[-6x-3]-8\}$

$=6x-\{-2x-11\}=6x+2x+11=8x+11.$

11. 簡化 $2a-[4a-c+\{3a-(4b-c)-(b+3c)\}-6c]$.

［解］ $2a-[4a-c+\{3a-(4b-c)-(b+3c)\}-6c]$

$=2a-[4a-c+\{3a-4b+c-b-3c\}-6c]$

$=2a-[4a-c+3a-4b+c-b-3c-6c]$

$=2a-4a+c-3a+4b-c+b+3c+6c=-5a+5b+9c.$

或 $2a-[4a-c+\{3a-(4b-c)-(b+3c)\}-6c]$

$=2a-[4a-c+\{3a-5b-2c\}-6c]$

$=2a-[7a-5b-9c]=-5a+5b+9c.$

12. 由 $z-[3x+(y+5z)]$ 減 $x-(3y+2z)$.

［解］ $z-[3x+(y+5z)]-[x-(3y+2z)]$

$=z-3x-y-5z-x+3y+2z=2y-4x-2z.$

13. x^2+8x+5 須加於何式始能得 x^3-7?

［解］ 設 p 爲所求被加式，則 $p+(x^2+8x+5)=x^3-7.$

$\therefore p=x^3-7-(x^2+8x+5)=x^3-7-x^2-8x-5$

$=x^3-x^2-8x-12.$

14. x^4-9x^2+3y 須加於何式始能得 y^2+x-7?

［解］ 設 p 爲所求被加式，則 $p+(x^4-9x^2+3y)=y^2+x-7.$

$\therefore p=y^2+x-7-(x^4-9x^2+3y)=y^2+x-7-x^4+9x^2-3y$

$=y^2-3y-x^4+9x^2+x-7.$

習 題 III 第106頁

1. 以 $2x^2-3x+1$ 乘 $3x^5-2x^4-x^3+7x^2-6x+5$.

〔解〕

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
3 & -2 & -1 & +7 & -6 & +5 & & \\
2 & -3 & +1 & & & & & \\
\hline
6 & -4 & -2 & +14 & -12 & +10 & & \\
 & -9 & +6 & +3 & -21 & +18 & -15 & \\
 & & 3 & -2 & -1 & +7 & -6 & +5 \\
\hline
6 & -13 & +7 & +15 & -34 & +35 & -21 & +5
\end{array}$$

被乘式及乘式各爲 5 次及 2 次式,故其乘積爲 7 次式.

∴ 所求積爲 $6x^7-13x^6+7x^5+15x^4-34x^3+35x^2-21x+5$.

2. 以 $3x^2-ax-2a^2$ 乘 $5x^3-3ax^2+2a^2x+a^3$.

〔解〕

$$\begin{array}{rrrrrr}
5 & -3 & +2 & +1 & & \\
3 & -1 & -2 & & & \\
\hline
15 & -9 & +6 & +3 & & \\
 & -5 & +3 & -2 & -1 & \\
 & & -10 & +6 & -4 & -2 \\
\hline
15 & -14 & -1 & +7 & -5 & -2
\end{array}$$

被乘式及乘式各爲 a, x 之齊次 3 次及 2 次式,故其乘積爲 5 次齊次式.

∴ 所求積爲 $15x^5-14ax^4-a^2x^3+7a^3x^2-5a^4x-2a^5$.

3. 以 $x+y$ 乘 $x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5$.

〔解〕

$$\begin{array}{rrrrrrr}
1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & \\
1 & +1 & & & & & \\
\hline
1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & \\
 & 1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\
\hline
1 & +0 & +0 & +0 & +0 & +0 & -1
\end{array}$$

被乘式及乘式各爲 x, y 之齊次 5 次及 1 次式,故其乘積爲 6 次齊次式.

∴ 所求積爲 x^6-y^6.

4. 以 $2x^3-3x+5$ 乘 $3x^3-2x^2+7$.

〔解〕

$$\begin{array}{rrrrrrr}
3 & -2 & +0 & +7 & & & \\
2 & +0 & -3 & +5 & & & \\
\hline
6 & -4 & +0 & +14 & & & \\
 & & -9 & +6 & +0 & -21 & \\
 & & & 15 & -10 & +0 & +35 \\
\hline
6 & -4 & -9 & +35 & -10 & -21 & +35
\end{array}$$

被乘式及乘式均爲 3 次式，故其乘積爲 6 次式.

$\therefore$ 所求積爲 $6x^6-4x^5-9x^4+35x^3-10x^2-21x+35$.

5. 以 $4x-5y$ 乘 $7x-2y$, 用視察法演算.

〔解〕 $(7x-2y)(4x-5y)=28x^2-43xy+10y^2$.

6. 以 $b+x$ 乘 $a^2-ax+bx-x^2$.

〔解〕

$$\begin{array}{llll}
a^2 & -(a-b) & -1 & \\
b+1 & & & \\
\hline
a^2b & -(a-b)b & -b & \\
 & +a^2 & -(a-b) & -1 \\
\hline
a^2b & +(a^2-ab+b^2) & -a & -1
\end{array}$$

被乘式及乘式各爲 x 之 2 次及 1 次式，故其乘積爲 x 之 3 次式.

$\therefore$ 所求積爲 $a^2b+(a^2-ab+b^2)x-ax^2-x^3$.

7. 以 $3+x^2-x$ 乘 $x^4-2x+5x^2-x^3$.

〔解〕

$$\begin{array}{r}
1-1+5-2 \\
1-1+3 \\
\hline
1-1+5-2 \\
-1+1-5+2 \\
3-3+15-6 \\
\hline
1-2+9-10+17-6
\end{array}$$

被乘式及乘式各爲 4 次及 2 次式，故其乘積爲 6 次式.

$\therefore$ 所求積爲 $x^6-2x^5+9x^4-10x^3+17x^2-6x$.

8. 以 $x^{n-2}-x^{n-3}$ 乘 $2x^n-3x^{n-2}+5x^{n-3}$.

〔解〕

$$\begin{array}{r}
2+0-3+5 \\
1-1 \\
\hline
2+0-3+5 \\
-2+0+3-5 \\
\hline
2-2-3+8-5
\end{array}$$

被乘式及乘式各爲 n 及 $n-2$ 次式，故其乘積爲 $2n-2$ 次式.

$\therefore$ 所求積爲 $2x^{2n-2}-2x^{2n-3}-3x^{2n-4}+8x^{2n-5}-5x^{2n-6}$.

9. 以 $a^2+ab-3b^2$ 乘 $a^2-ab+3b^2$.

〔解〕 $(a^2-ab+3b^2)(a^2+ab-3b^2)=a^4-(ab-3b^2)^2$

$=a^4-(a^2b^2-6ab^3+9b^4)=a^4-a^2b^2+6ab^3-9b^4$.

10. 以 $x-3y+2z$ 乘 $x+3y-2z$.

［解］　$(x+3y-2z)(x-3y+2z)=x^2-(3y-2z)^2$

$=x^2-(9y^2-12yz+4z^2)=x^2-9y^2+12yz-4z^2.$

11.　以 $x-y-1$ 乘 $x^2+xy+y^2+x-y+1$.

［解］　$(x^2+xy+y^2+x-y+1)(x-y-1)$

$=[(x^2+xy+y^2)+(x-y)+1][(x-y)-1]$

$=(x^2+xy+y^2)(x-y)-(x^2+xy+y^2)+(x-y)^2-1$

$=x^3-y^3-x^2-xy-y^2+x^2-2xy+y^2-1$

$=x^3-y^3-3xy-1.$

12.　以 $a+b-c$ 乘 $a^2+b^2+c^2+bc+ca-ab$.

［解］　$(a^2+b^2+c^2+bc+ca-ab)(a+b-c)$

$=[a(a-b+c)+(b^2+bc+c^2)][a+(b-c)]$

$=a[a^2-(b-c)^2]+a(b^2+bc+c^2)+(b^2+bc+c^2)(b-c)$

$=a^3-ab^2+2abc-ac^2+ab^2+abc+ac^2+b^3-c^3$

$=a^3+b^3-c^3+3abc.$

13.　以 $x-4y+6$ 乘 $3x-2y+5$.

［解］　$(3x-2y+5)(x-4y+6)$

$=3x^2-(3\times4+2\times1)xy+8y^2+(3\times6+5\times1)x$

$\quad-(2\times6+5\times4)y+30$

$=3x^2-14xy+8y^2+23x-32y+30.$

14.　以 $2x+y-8z$ 乘 $x+7y-3z$.

［解］　$(x+7y-3z)(2x+y-8z)$

$=2x^2+(1+14)xy+7y^2-(6+8)xz-(3+56)yz+24z^2$

$=2x^2+15xy+7y^2-14xz-59yz+24z^2.$

15.　求積 $(b+x)(b-x)(b^2+x^2)$.

［解］　$(b+x)(b-x)(b^2+x^2)=(b^2-x^2)(b^2+x^2)=b^4-x^4.$

16.　求積 $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$.

［解］　$(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$

$=[(x^2+1)+x][(x^2+1)-x](x^4-x^2+1)$

$$=[(x^2+1)^2-x^2](x^4-x^2+1)=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)$$
$$=[(x^4+1)+x^2][(x^4+1)-x^2]=(x^4+1)^2-x^4$$
$$=x^8+2x^4+1-x^4=x^8+x^4+1.$$

17 求積 $(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$.

［解］ $(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$
$$=[(y+z)^2-x^2][x^2-(y-z)^2]$$
$$=(y^2+2yz+z^2-x^2)(x^2-y^2+2yz-z^2)$$
$$=[2yz+(y^2+z^2-x^2)][2yz-(y^2+z^2-x^2)]$$
$$=4y^2z^2-(y^2+z^2-x^2)^2$$
$$=4y^2z^2-(y^4+z^4+x^4+2y^2z^2-2x^2y^2-2z^2x^2)$$
$$=2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2-x^4-y^4-z^4.$$

18. 作 x^2+x+1 之開首四次乘冪之係數表.

［解］ x^2+x+1 之係數爲 $1+1+1$, 其前四冪之係數可用下法求之.

$$\begin{array}{l}
1+1+1 \cdots\cdots\cdots\cdots x^2+x+1\text{之係數}\\
\underline{1+1+1(\times}\\
1+1+1\\
\quad 1+1+1\\
\qquad \underline{1+1+1(+}\\
1+2+3+2+1 \cdots\cdots\cdots\cdots (x^2+x+1)^2\text{之係數}\\
\quad 1+2+3+2+1\\
\qquad \underline{1+2+3+2+1(+}\\
1+3+6+7+6+3+1 \cdots\cdots\cdots\cdots (x^2+x+1)^3\text{之係數}\\
\quad 1+3+6+7+6+3+1\\
\qquad \underline{1+3+6+7+6+3+1(+}\\
1+4+10+16+19+16+10+4+1 \cdots (x^2+x+1)^4\text{之係數}
\end{array}$$

19. 續繼作 $a+b$ 之各次乘冪之係數表, 至其十次冪爲止.

［解］ 依 §312 之方法, 得:

1+1, 1+2+1, 1+3+3+1, 1+4+5+4+1, 1+5+10+10+5+1, 1+6+15+20+15+6+1, 1+7+21+35+35+21+7+1, 1+8+28+56+70+56+28+8+1, 1+9+36+84+126+126+84+36

$+9+1$, $1+10+45+120+210+252+210+120+45+10+1$.

20. 求 $(4x-3y)^2$ 及 $(4x-3y)^3$.

［解］ $(4x-3y)^2=(4x)^2+2(4x)(-3y)+(-3y)^2$

$=16x^2-24xy+9y^2$.

$(4x-3y)^3=(4x)^3+3(4x)^2(-3y)+3(4x)(-3y)^2+(-3y)^3$

$=64x^3-144x^2y+108xy^2-27y^3$.

21. 求 $(x+2y+3z-4u)^2$.

［解］ $(x+2y+3z-4u)^2=[(x+2y)+(3z-4u)]^2$

$=(x+2y)^2+2(x+2y)(3z-4u)+(3z-4u)^2$

$=x^2+4xy+4y^2+6xz+12yz-8xu-16yu+9z^2-24zu+16u^2$.

22. 求 $(x+2y+3z)^3$ 及 $(x+2y-3z)^3$.

［解］ $(x+2y+3z)^3=[(x+2y)+3z]^3$

$=(x+2y)^3+3(x+2y)^2(3z)+3(x+2y)(3z)^2+(3z)^3$

$=x^3+3x^2(2y)+3x(2y)^2+(2y)^3+3(x^2+4xy+4y^2)(3z)$

$+3(x+2y)(9z^2)+27z^3$

$=x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3+9x^2z+36xyz+36y^2z$

$+27xz^2+54yz^2+27z^3$.

$(x+2y-3z)^3=[(x+2y)-3z]^3$

$=(x+2y)^3-3(x+2y)^2(3z)+3(x+2y)(3z)^2-(3z)^3$

$=x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3-9x^2z-36xyz-36y^2z$

$+27xz^2+54yz^2-27z^3$.

23. 以 $(a-2b)^2$ 乘 $(a+2b)^2$.

［解］ $(a+2b)^2(a-2b)^2=\{a^2-4b^2\}^2=a^4-8a^2b^2+16b^4$.

24. 求下積中 x^{29} 及 x^{15} 之係數：$(a_0x^{27}+a_1x^{26}+\cdots\cdots+a_{26}x+a_{27})$ $(b_0x^{19}+b_1x^{18}+\cdots\cdots+b_{18}x+b_{19})$.

［解］ 此乘積之次數為 $27+19=46$, 而與項之次數之差為 $46-29=17$.

故 x^{29} 之係數爲 $a_0b_{17}+a_1b_{16}+\cdots\cdots+a_{16}b_1+a_{17}b_0$.

同理 $46-15=31$ 及 $31-19=12$.

故 x^{15} 之係數爲 $a_{12}b_{19}+a_{13}b_{18}+\cdots\cdots+a_{27}b_4$.

25. 求下積中 x^6, x^8, 及 x^4 之係數: $(2x^6-3x^5+4x^4-7x^3+2x-5)(3x^5-x^3+2x^2+3x-8)$.

〔解〕 x^6 之係數爲 $2(-8)+3(-3)+4\times2+(-7)(-1)+2\times3+(-5)0=-16-9+8+7+6+0=-4$.

x^8 之係數爲 $0(-8)+0\times3+2\times2+(-3)(-1)+4\times0+(-7)3+2\times0+(-5)0=0+0+4+3+0-21+0+0=-14$.

x^4 之係數爲 $4(-8)+(-7)3+0\times2+2(-1)+(-5)\times0=-32-21+0-2+0=-55$.

26. 證明下列各恆等式:

1. $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=3(y+z)(z+x)(x+y)$.

2. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(bx-ay)^2$.

3. $(a^2-b^2)(x^2-y^2)=(ax+by)^2-(bx+ay)^2$.

4. $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(c+a)+3c^2(a+b)+6abc$.

〔解〕 1. $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)$

$$=(x+y)^3+3z(x+y)^2+3z^2(x+y)+z^3-x^3-y^3-z^3$$
$$=3xy(x+y)+3z(x+y)^2+3z^2(x+y)$$
$$=3(x+y)[xy+z(x+y)+z^2]$$
$$=3(x+y)(y+z)(z+x).$$

2. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=a^2x^2+b^2y^2+b^2x^2+a^2y^2$

$$=a^2x^2+2abxy+b^2y^2+b^2x^2-2abxy+a^2y^2$$
$$=(ax+by)^2+(bx-ay)^2.$$

3. $(a^2-b^2)(x^2-y^2)=a^2x^2+b^2y^2-b^2x^2-a^2y^2$

$$=a^2x^2+2abxy+b^2y^2-b^2x^2-2abxy-a^2y^2$$
$$=(ax+by)^2-(bx+ay)^2.$$

4. $(a+b+c)^3=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3$

$=a^3+3a^2(b+c)+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$

$=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(a+c)+3c^2(a+b)+6abc.$

27. 簡化下列各乘冪：

$(2a^2x^3y^7)^5$, $(-x^5y^8z^9)^7$, $(a^2b^mc^3)^{2n}$, $(a^mb^nc^{2n})^n$.

〔解〕 $(2a^2x^3y^7)^5=32a^{10}x^{15}y^{35}.$

$(-x^5y^8z^9)^7=-x^{35}y^{56}z^{63}.$

$(a^2b^mc^3)^{2n}=a^{4n}b^{2mn}c^{6n}.$

$(a^mb^nc^{2n})^n=a^{mn}b^{n^2}c^{2n^2}.$

28. 簡化下列各積：

$(-ab^2c^3)(a^3b)^2(-ac^3)^5$, $(-2^2xy^4)^3(ax^5y^{11})^2$.

〔解〕 $(-ab^2c^3)(a^3b)^2(-ac^3)^5=(-ab^2c^3)(a^6b^2)(-a^5c^{15})=a^{12}b^4c^{18}.$

$(-2x^2y^4)^3(ax^5y^{11})^2=(-8x^6y^{12})(a^2x^{10}y^{22})=-8a^2x^{16}y^{34}.$

習　題　IV　　第110頁

1. 以 $10ab^2c^2$ 除 $15a^3bc^2$.

〔解〕 $15a^3bc^2/10ab^2c^2=3a^2/2b.$

2. 以 $-100ax^7z^9$ 除 $75x^2y^4z^{10}$.

〔解〕 $75x^2y^4z^{10}/-100ax^7z^9=-3y^4z/4ax^5.$

3. 以 $28x^my^{m+n}$ 除 $-35x^{2m}y^n$.

〔解〕 $-35x^{2m}y^n/28x^my^{m+n}=-5x^m/4y^m.$

4. 以 $-18\{a(b^2c)^2\}^3$ 除 $-54\{(ab^2)^2c\}^5$.

〔解〕 $-54\{(ab^2)^2c\}^5/-18\{a(b^2c)^2\}^3$

$=-54a^{10}b^{20}c^5/-18a^3b^{12}c^6=3a^7b^8/c.$

5. 以 x^2-y^2 除 x^2y-xy^2.

〔解〕 $\dfrac{x^2y-xy^2}{x^2-y^2}=\dfrac{xy(x-y)}{(x-y)(x+y)}=\dfrac{xy}{x+y}.$

6. 以 $(x-y)(x^2-xy+y^2)$ 除 $(x^3-y^3)(x^3+y^3)$.

〔解〕 $\dfrac{(x^3-y^3)(x^3+y^3)}{(x-y)(x^2-xy+y^2)}=\dfrac{(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x-y)(x^2-xy+y^2)}$

$=(x+y)(x^2+xy+y^2)$.

7. 簡化 $\dfrac{(a-b)^2(b-c)^3(c-a)^4}{(b-a)(c-b)^2(a-c)^3}$

〔解〕 $\dfrac{(a-b)^2(b-c)^3(c-a)^4}{(b-a)(c-b)^2(a-c)^3}=\dfrac{(a-b)^2(b-c)^3(c-a)^4}{-(a-b)(b-c)^2[-(c-a)^3]}$

$=(a-b)(b-c)(c-a)$.

8. 簡化 $\dfrac{30a^2b^3c^4-25a^3b^2c^5+20a^4b^4c^7}{-5ab^2c^3}$.

〔解〕 $\dfrac{30a^2b^3c^4-25a^3b^2c^5+20a^4b^4c^7}{-5ab^2c^3}=-6abc+5a^2c^2-4a^3b^2c^4$.

9. 簡化 $\dfrac{3(x-y)^4-2(x-y)^3+5(x-y)^2}{(y-x)^2}$.

〔解〕 $\dfrac{3(x-y)^4-2(x-y)^3+5(x-y)^2}{(y-x)^2}$

$=\dfrac{(x-y)^2[3(x-y)^2-2(x-y)+5]}{(x-y)^2}=3(x-y)^2-2(x-y)+5$.

10. 簡化 $4a^7\times(3ab^3c^2)^2\div(abc)^2\div 6bc$.

〔解〕 $4a^7\times(3ab^3c^2)^2\div(abc)^2\div 6bc$

$=4a^7\times 9a^2b^6c^4\div a^2b^2c^2\div 6bc=6a^7b^3c$.

11. 下式 (1) 依所示之順序演算，(2) 先去括號，以簡化之.

$a^7\div\{a^5\div(a^4\div a^2\times a)\times(a^3\times a\div a^2)\}$.

〔解〕 $a^7\div\{a^5\div(a^4\div a^2\times a)\times(a^3\times a\div a^2)\}=a^7\div\{a^5\div a^3\times a^2\}$

$=a^7\div a^4=a^3$.

或 $a^7\div\{a^5\div(a^4\div a^2\times a)\times(a^3\times a\div a^2)\}$

$=a^7\div\{a^5\div a^4\times a^2\div a\times a^3\times a\div a^2\}$

$=a^7\div a^5\times a^4\div a^2\times a\div a^3\div a\times a^2=a^3$.

12. $2a(x^2y^3)^2$ 須乘何式始能得 $-4a^2(x^3y^2)^2$?

［解］ $\dfrac{-4a^2(x^3y^2)^2}{2a(x^2y^3)^2}=\dfrac{-4a^2x^6y^4}{2ax^4y^6}=-\dfrac{2ax^2}{y^2}.$

習 題 V

第 119 頁

解下列各方程式:

1. $15-(7-5x)=2x+(5-3x).$

［解］ 原式去括弧,

$$15-7+5x=2x+5-3x,$$

整理

$$8+5x=5-x,$$

$$6x=-3,$$

$$\therefore\ x=-\tfrac{1}{2}.$$

2. $x(x+3)-4x(x-5)=3x(5-x)-16.$

［解］ 原式去括弧,

$$x^2+3x-4x^2+20x=15x-3x^2-16,$$

整理

$$-3x^2+23x=15x-3x^2-16,$$

$$8x=-16,$$

$$\therefore\ x=-2.$$

3. $(x+1)(x+2)-(x+3)(x+4)=0.$

［解］ 原式去括弧,

$$x^2+3x+2-x^2-7x-12=0,$$

整理

$$-4x=10,$$

$$\therefore\ x=-\frac{10}{4}=-\frac{5}{2}.$$

4. $x=1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{4}+\dfrac{x}{8}+\dfrac{x}{16}.$

［解］ 移項, $x-\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{4}-\dfrac{x}{8}-\dfrac{x}{16}=1,$

整理

$$\frac{x}{16}=1,$$

$$\therefore\ x=16.$$