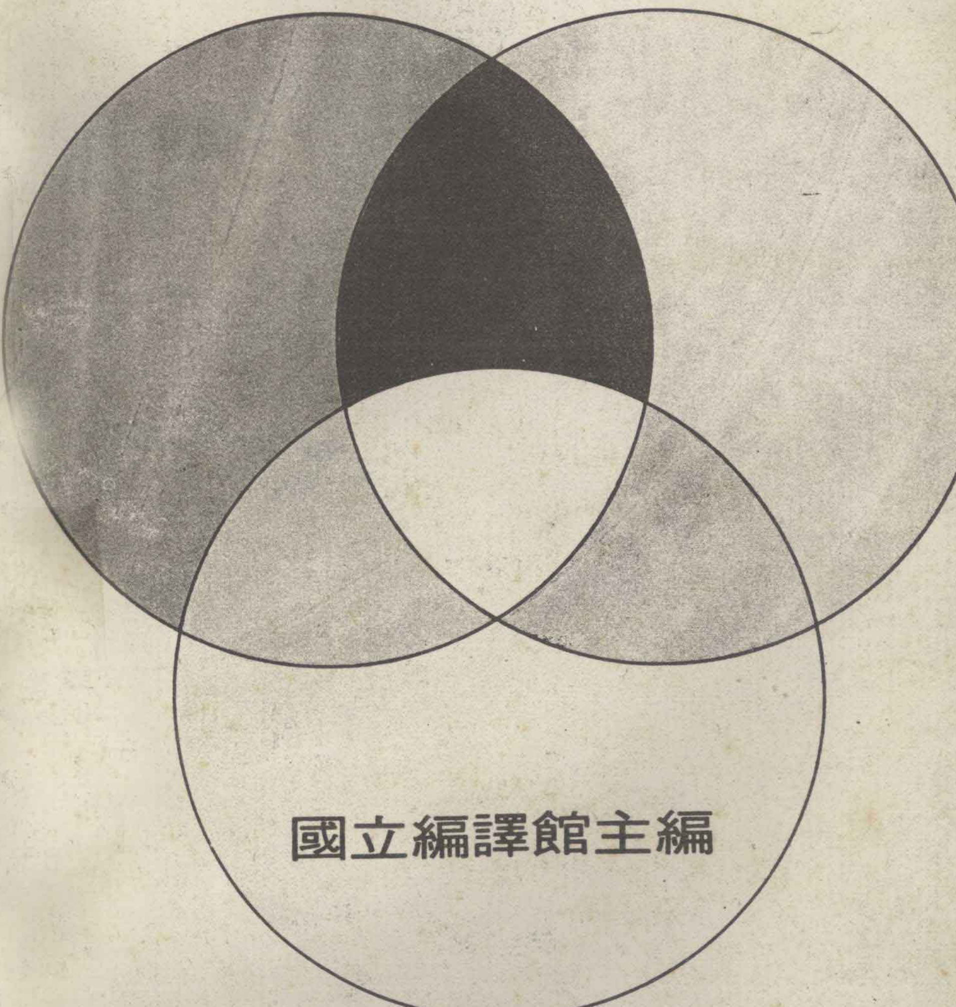
高級中學

理則學

下冊



國立編譯館主編

高級中學理則學　下冊

目　次

第十一章　眞 值 表

第一節　否定句與合取句

從上册的第六章起，我們已經知道有簡單命題和複合命題。複合命題當中，有幾種類型特別重要，我們將在本章各節，一一介紹。首先，有一種複合命題，叫做「否定句」(Negation)；底下就是幾個例子：

(1) 並非中國在歐洲。
(2) 並非中國在亞洲。
(3) 並非孔子來過臺灣。

在這三個例子當中，每一個命題都具有某種共同的形式，亦即具有共同的「語句形式」(Sentence form)：「並非……」。在這個語句形式當中，虛線的部分代表一個空位，可以用任何命題來取代。例如，如果用「中國在歐洲」來取代，它就變成第 (1) 句；如果用「孔子來過臺灣」來取代，它就是第 (3) 句。

凡是合乎「並非……」這一語句形式的命題，都叫做否

定句。爲了方便起見，我們往往用「～」來代表「並非」一詞（注一），用英文的大寫字母P, Q, R等代表虛線的部分，亦即代表命題。例如，如果我們用P代表「中國在歐洲」這一命題，那麼上面的(1)就可以寫成～P；如果用Q代表「中國在亞洲」，(2)就可以寫成～Q；同樣地，如果用R表示「孔子來過臺灣」，(3)就變成了～R。我們把～P, ～Q, ～R，分別叫做(1), (2), (3)句的「符號式」(Symbolic formula)。

「並非」一詞在日常語言中，往往用「並不是」、「不」、「沒有」等等同義詞來表達。例如，(1)句常常說成「中國並不是在歐洲」或說成「中國不在歐洲」；而(3)則往往說成「孔子沒有來過臺灣」。

其次，日常語言中，當任一個命題P是眞的時候，它的否定句～P就變成假；反過來，當P假時，～P即眞。例如，由於「中國在歐洲」假，因此它的否定句(1)即眞；由於「中國在亞洲」眞，因此(2)假。這一事實，可以用下面的表一來說明；我們把它叫做否定句的「眞值表」(Truth-table)：

	ϕ	$\sim\phi$
1.	T	F
2.	F	T

（表一）

表一中共有兩行，其中的T與F，分別是眞與假，叫做

「眞假值」(Truth-value)。希臘字母 ϕ，代表任一個命題，亦卽P, Q, R等（注二）。第1行表示：當 ϕ 命題的眞假值是T時（亦卽 ϕ 爲眞時），$\sim\phi$ 的眞假值爲F（亦卽 $\sim\phi$ 爲假）。第2行則表示：當 ϕ 得F值時（ϕ 假時），$\sim\phi$ 得T值（$\sim\phi$ 爲眞）。

因此，如果 ϕ 是P命題（例如，P代表「中國在歐洲」這一命題），那麼～P（亦卽，「中國不在歐洲」）的眞值表就變成了下面的形式：

	P	～P
1.	T	F
2.	F	T

另外一類型的複合命題，叫做「合取句」(Conjunction)。它們都具有底下的語句形式：「ϕ 而且 ψ」，亦卽「……而且——」。其中，ϕ 和 ψ（亦卽虛線和實線兩部分）是任意兩個命題（參見注一）；每一個都叫做「合取項」(Conjunct)。例如，底下就是幾個典型的合取句：

(4) 中國在亞洲而且（中國）在遠東；

(5) 孔子來過臺灣而且孟子（也）來過臺灣；

(6) 孔子是古代人而且（孔子）來過臺灣。

(4) 中的第一個合取項是「中國在亞洲」，第二個合取

項是「中國在遠東」。如果我們分別用P與Q來代表(4)中的兩個合取項，並且用「$\wedge$」來代表「而且」一詞，那麼，(4)即變成底下的符號句：$P\wedge Q$。同樣地，如果我們分別用R，V，W來代表「孔子來過臺灣」、「孟子來過臺灣」，以及「孔子是古代人」等三個命題，那麼，(5)與(6)兩個合取句，即變成底下兩個符號式：$R\wedge V$，$W\wedge R$。

日常語言中，「而且」一詞往往用「和」、「也」、「雖然……但是——」等等同義語來表達。例如(4)句有時會說成「中國在亞洲，（中國）也在遠東」；(5)句有時會說成「孔子來過臺灣，孟子也來過臺灣」，或說成「孔子和孟子都來過臺灣」。

另外，「張三雖然很聰明，但是（張三）卻很懶惰」這一個命題，我們也可以把它看成是下面這個命題的意思：「張三很聰明而且張三很懶惰」。

日常語言中，當兩個合取項ϕ和ψ都眞時，合取句$\phi\wedge\psi$即爲眞。例如，(4)中的第一個合取項——「中國在亞洲」眞，第二個合取項——「中國在遠東」也眞，因此，(4)是眞的命題。其次，當兩個合取項中有一個是假時，合取句就被認爲是假。例如，(5)中的兩個合取項都假，所以(5)爲假；(6)中的第二個合取項假，所以，儘管第一個合取項——「孔子是古代人」爲眞，整個合取句(6)仍然是假。這些日常語言中的事實，我們都可以用下表來說明；這個表叫做合取句的眞值表：

ϕ,	ψ	$\phi \wedge \psi$
1. T	T	T
2. T	F	F
3. F	T	F
4. F	F	F

（表二）

表二和表一最大的不同是它有四行，這是因爲它同時考慮了 ϕ 與 ψ 兩個命題。ϕ 有 T 與 F 兩個眞假值，ψ 也有 T 與 F 兩個眞假值，因此，全部就有 $2\times2(=4)$ 個可能的不同組合。第 1 行說，當兩個合取項 ϕ 與 ψ 都得 T 值時，合取句 $\phi\wedge\psi$ 也得 T 值。第 2 至 4 行說，只要 ϕ 與 ψ 當中有一個得 F 值時，$\phi\wedge\psi$ 就得 F 值。

爲了方便稱呼起見，我們把「並非」、「而且」這樣的語詞，每一個都叫做「邏輯結合詞」(Logical connective)，或簡稱爲「結合詞」。它們的特色是，把一個或兩個比較簡單的命題，結合而成較爲複雜的命題。例如，簡單命題「中國在亞洲」，用「並非」這一結合詞結合之後，即成複合句「中國不在亞洲」。又如，簡單命題「孔子來過臺灣」和「孟子來過臺灣」，用「而且」這一結合詞結合之後，即成上文中的複合命題 (5)。

日常語言中，除了「並非」和「而且」之外，還有許多邏輯結合詞，我們將在本章以下幾節陸續介紹。

【作　　業】

一、試將下列各命題寫成否定句的標準形——「並非……」：

1. 今天不是星期天。
2. 張三不想來。
3. 紅樓夢的作者不是胡適。
4. 老師沒來上課。
5. 張三並不是站在李四的後面。

二、試將下列各命題寫成合取句的標準形——「……而且——」：

1. 李白和杜甫都是唐朝的詩人。
2. 國民小學以及國民中學教育都是國民教育。
3. 新疆人，還有西藏人，都是屬於邊疆民族。
4. 紅色很鮮豔，黃色也很鮮豔。
5. 不但貓會叫，狗也會叫。
6. 雖然有些花是紅的，但是也有一些花是白的。

三、在底下的縮寫中，左邊的英文字母代表右邊的各個命題：

P：春天是溫暖的；

Q：夏天是炎熱的；

R：春天是美麗的季節；

S：夏天共有三個月。

1. 試依據上面的縮寫，將下列各命題譯成符號式：

(1) 春天是美麗的季節，也是溫暖的。

(2) 夏天共有三個月，並且是炎熱的。

(3) 春天是溫暖的，而（且）夏天是炎熱的。

(4) 夏天並沒有三個月。

(5) 春天不是溫暖的。

2. 試依據上面的縮寫，將下列各符號式寫成通順的中文：

(1) $P \wedge Q$

(2) $Q \wedge P$

(3) $Q \wedge S$

(4) $\sim R$

(5) $\sim Q$

3. 試畫出上題中 (1) 至 (5) 各符號式的眞值表。

四、試指出下列各命題的邏輯結合詞：

1. 不但夏天，連秋天都很炎熱。
2. 孔子並沒有見過老子。
3. 臺灣並不在東南亞。
4. 臺北是大都市，高雄也是大都市。
5. 張三很窮，但他的太太卻很富有。

第二節 選 取 句

日常語言中，除了上節所介紹的「並非」、「而且」是邏輯結合詞之外，「或」也是一個邏輯結合詞。這個結合詞，把兩個命題結合起來，而成一個複合語句，叫做「選取句」(Disjunction)。因此，一個選取句必定合乎下面的語句形式：「ϕ 或 ψ」，亦即「……或——」。例如：

(1) 火星上有生物或火星上沒有生物；

(2) 孔子是中國人或孔子是日本人；

(3) 孫悟空是小說中的人物或豬八戒是小說中的人物；

(4) 論語是王維所著或論語是王羲之所著。

在 (1) 中，「火星上有生物」和「火星上沒有生物」這兩個命題，用結合詞「或」結合起來，而成一個選取句。我們把這兩個命題，叫做「選取項」(Disjunct)。其他 (2)至(4) 也是一樣。值得注意的是，(1) 中的第二個選取項——「火星上沒有生物」，是一個否定句，它可以改寫而成否定句的標準形：並非火星上有生物。

我們用「$\vee$」來代表結合詞「或」，並把 (1) 中的兩個選取項，分別用P與Q來代替，(1) 就可以譯成符號式：$P \vee Q$。而且，由於 (1) 的第二個選取項就是第一個選取項的否定句，因此，Q就是 $\sim P$。這樣一來，(1) 也可以寫成底下這個符號式：$P \vee \sim P$。

類似地，如果我們依照底下的縮寫，把右邊的每一個命題，分別縮寫成爲左邊的英文字母：

A：孔子是中國人，

B：孔子是日本人，

C：孫悟空是小說中的人物，

U：豬八戒是小說中的人物，

V：論語是王維所著，

W：論語是王羲之所著，

那麼，(2) 至 (4) 就可分別寫成底下的符號式：$A \vee B$，$C \vee U$，$V \vee W$。

日常語言中，結合詞「或」常常用其他的同義語來表達；底下就是幾個常見的同義語：

不是……，就是——；

要麼……，要麼——；

或者……，或者——。

例如，(1) 句往往說成「不是火星上有生物，就是火星上沒有生物」，有時也說成「要麼火星上有生物，要麼火星上沒有生物」。又如，(4) 句常常說成「論語不是王維所著，就是王羲之所著」。

日常語言中，選取項 ϕ 和 ψ 都假時，選取句 $\phi \vee \psi$ 卽爲假。例如，由於「論語是王維所著」以及「論語是王羲之所著」這兩個命題都是假，因此 (4) 句亦爲假。其次，當 ϕ 與 ψ 當中有一個爲眞時（包括 ϕ，ψ 皆眞的情形），$\phi \vee \psi$ 卽爲眞。例如，(2) 爲眞，因爲它的第一個選取項——「孔子是中國人」爲眞；(3) 也眞，因爲它的兩個選取項都眞。這些事實，

我們可以用下面的表三來說明：

	ϕ,	ψ	$\phi \vee \psi$
1.	T	T	T
2.	T	F	T
3.	F	T	T
4.	F	F	F

（表三）

我們把表三叫做選取句的眞值表。表中的第 1 行表示，當 ϕ 與 ψ 這兩個選取項的眞假值都是T時，選取句 $\phi \vee \psi$ 得到的眞假值也是T。2 與 3 行告訴我們，不管第一個選取項或第二個選取項得T值，$\phi \vee \psi$ 都得T值。而第 4 行則說，當兩個選取項都得F時，選取句也會得F值。

表三中的 ϕ 與 ψ 代表任意的兩個命題。例如，當它們分別是P與Q時，$P \vee Q$ 的眞值表就變成了下表（注三）：

	P，	Q	$P \vee Q$
1.	T	T	T
2.	T	F	T
3.	F	T	T
4.	F	F	F

【作　　業】

一、試將下列各選取句寫成標準形——「……或——」：

1. 月亮不是在農曆十五日圓，就是在十六日圓。
2. 花要麼都是紅色的，要麼都是白色的。
3. 他不是一個人來，就是和太太一起來。
4. 王維和王羲之當中，有一個是論語的作者。
5. 或者星期六，或者星期日，我會來拜訪你。

二、試將下列各命題，依照下面的縮寫，譯成符號式：

P： $1+1$ 是奇數；

Q： $1+1$ 是偶數；

R： 3 是質數；

U： 4 可以被 2 整除；

V： $2>3$；

W： $2=3$。

1. $1+1$ 要麼是奇數，要麼是偶數。
2. 要麼 3 是質數，要麼 3 不是質數。
3. $2\geq 3$。
4. $2\not> 3$ 或 $2\neq 3$。
5. $1+1$ 不是奇數就是偶數。

三、試依照第二大題中的縮寫，將下列各符號式改寫成通順的數學命題：

1. $Q\vee P$
2. $V\wedge W$
3. $W\vee V$
4. $U\vee\sim U$
5. $R\vee U$

四、試畫出第三大題中各小題的眞值表。

第三節　條件句與等值句

日常語言中，還有一種重要的複合命題，叫做「條件句」(Conditional)（注四）。凡是合於「如果 ϕ，那麼 ψ」這一語句形式的命題，都叫做條件句。其中，「如果……，那麼——」一詞，也是邏輯結合詞，因爲它把虛線中的命題和實線中的命題，結合起來而成一個複合命題。底下就是幾個條件句的例子：

(1) 如果杜甫是中國人，那麼杜甫是亞洲人；
(2) 如果杜甫是唐朝人，那麼杜甫是清朝人；
(3) 如果杜甫是西藏人，那麼杜甫是亞洲人；
(4) 如果杜甫是東京人，那麼杜甫是日本人。

我們可以用「→」來代表結合詞「如果……，那麼——」，並用 P, Q, R, S, W, U, V, 分別代表底下的各個命題：杜甫是中國人，杜甫是亞洲人，杜甫是唐朝人，杜甫是清朝人，杜甫是西藏人，杜甫是東京人，杜甫是日本人。這樣一來，(1) 至 (4) 就分別可譯成底下的符號式：$P \rightarrow Q$，$R \rightarrow S$，$W \rightarrow Q$，$U \rightarrow V$。

日常語言中，結合詞「如果……，那麼——」往往用其他同義的結合詞來表達，例如：「若……，則——」；「當……

時，就——」；「在……條件下，就——」；「在……情形時，就——」；「只要……，就——」。例如，(1) 句有時說成「若杜甫是中國人，則杜甫（也）是亞洲人」；(2) 句可以說成「當杜甫是唐朝人時，杜甫就是清朝人」；(3) 句可以說成「在杜甫是西藏人的情形（條件）下，杜甫就是亞洲人」；而 (4) 句也往往說成「只要杜甫是東京人，杜甫就是日本人」。

爲了方便起見，條件句 $\phi\rightarrow\psi$ 中的 ϕ，我們稱爲「前項」(Antecedent)；而 ψ 則叫做「後項」(Consequent)。（注五）我們發現，(1) 的前項——「杜甫是中國人」是一眞的命題，而 (1) 的後項——「杜甫是亞洲人」也是眞的命題。我們還發現，條件句 (1) 也是眞命題。這一事實告訴我們，當前項與後項都眞時，條件句也是眞。

其次，我們發現，(2) 的前項——「杜甫是唐朝人」是眞，但後項——「杜甫是清朝人」爲假；而整個條件句 (2) 則爲假。這一事實告訴我們，如果條件句的前項眞而後項假，那麼條件句則假。

再看，(3) 的前項假而後項眞，整個條件句 (3) 也眞。這說明，前項假和後項眞的條件句是眞。(4) 的前、後項都假，但整個 (4) 卻眞。這說明，前後項都假的條件句爲眞。

以上這些事實，可以用底下的眞值表來說明；這個眞值表，叫做條件句的眞值表：

	ϕ,	ψ	$\phi \rightarrow \psi$
1.	T	T	T
2.	T	F	F
3.	F	T	T
4.	F	F	T

（表四）

本章要介紹的最後一個邏輯結合詞是「只要而且只有」（注六）。凡是由這個結合詞所結合起來的複合命題，都叫做「等值句」(Equivalence)（注七）。因此，一個等值句必定具有底下的語句形式：「ϕ，只要而且只有 ψ」。底下是幾個等值句的例子：

(5) 岳武穆是忠臣，只要而且只有岳飛是忠臣；
(6) 貝多芬是作曲家，只要而且只有愛因斯坦是作曲家；
(7) 孟子是孔子的老師，只要而且只有孟子主張性善；
(8) 3 是偶數，只要而且只有 3 可被 2 整除。

事實上，「ϕ，只要而且只有 ψ」是底下這一語句形式的簡寫：「ϕ，只要 ψ；而且，ϕ，只有 ψ」。其中，前半部的「ϕ，只要 ψ」，就是「只要 ψ，就 ϕ」的倒裝句形。另外，後半部的「ϕ，只有 ψ」，則爲「只有 ψ 時，才是 ϕ」的倒裝

句形。因此，下面的 (a) 與 (b) 是相同的兩個語句形式:

(a) ϕ，只要而且只有 ψ；

(b) 只要 ψ，就 ϕ；而且，只有 ψ 時，才會 ϕ。

(b) 的第一個合取項——「只要 ψ，就 ϕ」，前文說過，就是「如果 ψ，那麼 ϕ」的意思。而 (b) 的第二個合取項——「只有 ψ 時，才會 ϕ」，我們也同樣把它了解成爲條件句——「如果 ϕ，那麼 ψ」。例如，當我們說「只有（現在）天黑，（現在）才會是下雨」，意思是：「如果（現在）下雨，那麼（現在）天黑」。（注八）

由上面的分析，我們知道，(b) 的意思就是底下的 (c)；因此，(a)、(b)、(c) 三個語句形式是相同的:

(c) 如果 ψ，那麼 ϕ；而且，如果 ϕ，那麼 ψ。

(c) 可以譯成符號式：$(\psi\rightarrow\phi)\wedge(\phi\rightarrow\psi)$。其中的兩對括弧是不可省略的，因爲它們告訴我們，$\psi\rightarrow\phi$ 和 $\phi\rightarrow\psi$ 是兩個各自獨立的單元，不可分割。爲了簡單起見，我們把 $(\psi\rightarrow\phi)\wedge(\phi\rightarrow\psi)$ 縮寫成爲：$\phi\leftrightarrow\psi$。因此，(a) 的符號式是：$\phi\leftrightarrow\psi$。也就是說，我們用「$\leftrightarrow$」，做爲結合詞「只要而且只有」的縮寫。

日常語言中，(c) 往往說成：「如果 ψ，那麼 ϕ；反之亦