

GAO
DENG
SHU
XUE

山东省五所师范院校
《高等数学》教材编写组

山东省出版总社
临沂办事处

高等数学
习题解答

前 言

本书是根据三年制师范专科学校物理专业《高等数学》教学大纲与我省教学需要而编写的。编写中兼顾到除可作高师二年制物理专业、三年制化学专业以及函授、进修同类专业的教材外，还可作电大、夜大同类专业的教学参考书。

本书是《高等数学》的基础部分，分上、下两册。上册包括一元函数微积分学、空间解析几何、行列式和矩阵等。下册包括多元函数微积分学、常微分方程、矢量分析与场论初步、无穷级数等。书中带※号内容，可供选用。各章配有习题，并另有附印的习题解答。

参加本书编写工作的有临沂师专吴大坤、泰安师专赵兴乐、烟台师范学院秦祥保、魏远、山东煤矿教育学院张润庠、青岛师专陈殿宣、临沂教育学院王端中等同志。

本书的审定以魏远副教授为主，还有吴大坤、赵兴乐、张润庠。参加审稿会的单位有济宁师专、山东省教育学院、济宁教育学院、青岛教育学院、潍坊教育学院、聊城教育学院、德州教育学院、济南教育学院、济南师专。

参加审稿的同志都认真审阅了部分原稿，提出了许多改进意见。在本书编印过程中，山东省教育厅以及临沂师专、泰安师专、山东煤矿教育学院等各院校的负责同志给予大力支持，对此我们表示衷心感谢。

限于编者水平，又加编印时间仓促，书中错误和不妥之处定然不少，恳切希望读者提出批评指正。

—— 编 者

一九八五年六月

目 录

第一章 变量与函数	(1)
§ 1—1 预备知识	(1)
§ 1—2 函数	(2)
§ 1—3 一些特殊类型的函数	(8)
§ 1—4 初等函数	(11)
第二章 极限和函数的连续性	(14)
§ 2—1 数列的极限	(14)
§ 2—2 函数的极限	(16)
§ 2—3 无穷小的运算及极限的运算	(20)
§ 2—4 极限存在的准则·两个重要极限	(24)
§ 2—5 无穷小的比较	(29)
§ 2—6 函数的连续性和间断点	(32)
§ 2—7 闭区间上连续函数的性质	(36)
§ 2—8 初等函数的连续性	(37)
第三章 导数与微分	(43)
§ 3—1 变化率问题举例	(43)
§ 3—2 求导法则	(48)
§ 3—3 高阶导数	(60)
§ 3—4 微分的概念	(65)
§ 3—5 微分在近似计算中的应用	(67)
第四章 导数在函数研究中的应用	(70)
§ 4—1 中值定理	(70)
§ 4—2 罗必达法则	(73)

§ 4—3 泰勒公式·····	(79)
§ 4—4 导数的应用·····	(83)
§ 4—5 函数作图·····	(94)
§ 4—6 曲线的曲率·····	(100)
第五章 不定积分 ·····	(103)
§ 5—1 不定积分的概念与性质·····	(103)
§ 5—2 不定积分的换元积分法与分部积分法·····	(107)
§ 5—3 有理函数的积分法·····	(115)
§ 5—4 三角函数有理式的积分法和几种简单无理函数的 积分法·····	(119)
§ 5—5 积分表的使用·····	(126)
§ 5—6 简单微分方程举例·····	(128)
第六章 定积分及其应用 ·····	(133)
§ 6—1 定积分的概念和性质·····	(133)
§ 6—2 微积分学基本定理·····	(139)
§ 6—3 定积分的计算·····	(142)
§ 6—4 定积分的近似计算·····	(148)
§ 6—5 定积分的几何应用·····	(150)
§ 6—6 定积分的物理应用·····	(165)
§ 6—7 广义积分·····	(172)
第七章 空间解析几何 ·····	(179)
§ 7—1 空间直角坐标系·····	(179)
§ 7—2 矢量及其线性运算·····	(181)

§ 7—3 矢量的数量积、矢量积和混合积·····	(186)
§ 7—4 平面及其方程·····	(191)
§ 7—5 空间直线及其方程·····	(196)
§ 7—6 曲面与方程·····	(203)
§ 7—7 空间曲线及其方程·····	(205)
§ 7—8 常用二次曲面的标准方程·····	(209)
第八章 行列式与矩阵 ·····	(213)
§ 8—1 行列式·····	(213)
§ 8—2 矩阵·····	(219)
§ 8—3 n 维向量及其线性相关性·····	(229)
§ 8—4 线性方程组·····	(233)
§ 8—5 对称矩阵与二次型·····	(239)
第九章 多元函数微分学 ·····	(255)
§ 9—1 多元函数的基本概念·····	(255)
§ 9—2 偏导数·····	(261)
§ 9—3 全微分及其应用·····	(266)
§ 9—4 复合函数的微分法·····	(272)
§ 9—5 隐函数的微分法·····	(276)
§ 9—6 偏导数的几何应用·····	(282)
§ 9—7 二元函数的泰勒公式·····	(288)
§ 9—8 二元函数的极值·····	(291)
§ 9—9 条件极值—拉格朗日乘数法则·····	(294)
第十章 常微分方程 ·····	(299)
§ 10—1 微分方程的基本概念·····	(299)
§ 10—2 可分离变量的微分方程及齐次方程·····	(302)

§ 10—3 一阶线性微分方程及伯努里方程.....	(309)
§ 10—4 全微分方程.....	(313)
§ 10—5 包络, 克莱洛方程及奇解.....	(317)
§ 10—6 高阶微分方程的几个特殊类型.....	(321)
§ 10—7 二阶线性络分方程解的结构, 参数变易法	(327)
§ 10—8 二阶常系数齐次线性微分方程.....	(329)
§ 10—9 二阶常系数非齐次线性微分方程.....	(331)
§ 10—10 欧拉方程.....	(336)
§ 10—11 微分方程组解法举例.....	(339)
第十一章 重积分	(344)
§ 11—1 二重积分.....	(344)
§ 11—2 三重积分.....	(356)
§ 11—3 重积分的应用.....	(363)
第十二章 曲线积分与曲面积分	(381)
§ 12—1 第一型曲线积分.....	(381)
§ 12—2 第二型曲线积分.....	(383)
§ 12—3 格林公式, 平面曲线积分与路径无关的条件...	(391)
§ 12—4 第一型曲面积分.....	(400)
§ 12—5 第二型曲面积分.....	(404)
§ 12—6 奥一高公式、曲面积分与曲面形状无关的条件	(409)
§ 12—7 斯托克斯公式、空间曲线积分与路径无关的条件.....	(414)
第十三章 矢量分析与场论	(418)

§13—1 矢性函数的微分与积分·····	(418)
§13—2 场·····	(423)
§13—3 数量场的方向导数与梯度·····	(425)
§13—4 矢量场通过曲面的通量及散度·····	(430)
§13—5 矢量场的环量与旋度·····	(435)
§13—6 几种重要的场·····	(441)
※§13—7 关于梯度、散度和旋度的计算公式及用算子 证明公式·····	(447)
§13—8 梯度、散度、旋度在柱面坐标和球面坐标系中 的表示式·····	(449)
第十四章 无穷积数 ·····	(453)
§14—1 常数项级数的概念和性质·····	(453)
§14—2 正项级数及其收敛判别法·····	(457)
§14—3 任意项级数·····	(465)
§14—4 函数项级数·····	(467)
§14—5 幂级数·····	(470)
§14—6 函数展开成幂级数·····	(476)
§14—7 广义积分的敛散性判别法·····	(488)
§14—8 常微分方程的幂级数解法·····	(492)
§14—9 付里叶 (FOURIER) 级数) ·····	(496)

第一章 变量与函数

§ 1 — 1 预备知识

习 题

解下列不等式

1. $0 < (x-2)^2 \leq 4$

解：开方取正号 $0 < |x-2| \leq 2$ 即 $0 < x-2 \leq 2$
及 $-2 \leq x-2 < 0$ 则有 $2 < x \leq 4$ 及 $0 \leq x < 2$

2. $|x| > x$

解：(1) 当 $x > 0$ 时，原不等式化为 $x > x$ 矛盾

(2) 当 $x = 0$ 时，原不等式化为 $0 > 0$ 矛盾

(3) $x < 0$ 时，原不等式化为 $-x > x$

即 $2x < 0$ ，所以 $x < 0$ 为不等式的解。

3. $\left| \frac{x}{1+x} \right| > \frac{x}{1+x}$

解：当 $\frac{x}{1+x} \geq 0$ 时原不等式化为矛盾不等式，所以不成立。

当 $\frac{x}{1+x} < 0$ 时，即 $\begin{cases} x < 0 \\ 1+x > 0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x > 0 \\ 1+x < 0 \end{cases}$ (无解)

由第一个不等式组可知 $-1 < x < 0$

所以原不等式的解为 $-1 < x < 0$

4. $|x^2 - 3x + 2| > x^2 - 3x + 2$

解：当 $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ 不等式无解。

当 $x^2 - 3x + 2 < 0$ 即 $(x-1)(x-2) < 0$

则 $-(x^2 - 3x + 2) > x^2 - 3x + 2$,

故 $x^2 - 3x + 2 < 0$, 解得 $1 < x < 2$ 所以原不等式的解是 $1 < x < 2$ 。

$$5. |\sin x| = \sin x + 2$$

解 当 $\sin x \geq 0$ 时, $\sin x = \sin x + 2$, 无解;

当 $\sin x < 0$ 时, $-\sin x = \sin x + 2$ 得 $\sin x = -1$

所以 $x = -\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi (k=0, 1, 2, \dots)$

$$6. |2x+3| = x^2$$

解 由绝对值的定义, 有

$$(1) \begin{cases} 2x+3 = x^2 \\ 2x+3 > 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x+3 < 0 \\ -2x-3 = x^2 \end{cases}$$

解 (1) 得 $\begin{cases} (x+1)(x-3) = 0 \\ x > -\frac{3}{2} \end{cases}$ 所以 $x = -1$ 和 $x = 3$;

(2) 在实数范围内无解。

§ 1—2 函 数

习 题

1. 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{2x}{x^2 - 3x + 2} \quad (2) y = \frac{1}{x} - \sqrt{1 - x^2}$$

$$(3) y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

$$(4) y = \lg(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x})$$

$$(5) y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16 - x^2}$$

$$(6) y = \frac{1}{\sqrt{\cos x}} \quad (7) y = \arccos \sqrt{2x}$$

$$(8) y = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$(9) y = \sqrt{3-x} + \arccos \frac{x-2}{3}$$

$$(10) y = \lg[\cos(\lg x)]$$

$$(11) y = \arcsin(1-x) + \lg(\lg x)$$

$$(12) y = \operatorname{ctg} \pi x + \arccos(2^x)$$

解 (1) $\therefore x^2 - 3x + 2 \neq 0$

即 $(x-1)(x-2) \neq 0 \quad x \neq 1, x \neq 2$

所以函数的定义域为: $(-\infty, 1), (1, 2), (2, \infty)$

(2) 函数的定义域为 $\frac{1}{x}$ 与 $\sqrt{1-x^2}$ 定义域的公共部分

即 $x \neq 0$ 且 $1-x^2 \geq 0$ 解之得 $x \neq 0, -1 \leq x \leq 1$,

则函数的定义域为 $(-1, 0), (0, 1)$ 。

(3) $\because x^2 - 4x + 3 \geq 0, \quad \text{即} (x-1)(x-3) \geq 0$

可得 $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases}$ 及 $\begin{cases} x-1 \leq 0 \\ x-3 \leq 0 \end{cases}$

解之得 $x \geq 3$ 及 $x \leq 1$

所以, 函数的定义域为 $[-\infty, 1], [3, +\infty]$

(4) $\because \begin{cases} x-4 \geq 0 \\ 6-x > 0 \end{cases}$ 及 $\begin{cases} x-4 > 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases}$

解之得 $4 \leq x < 6$ 及 $4 < x \leq 6$ 故函数的定义域为 $[4, 6]$

(5) $\because$ 函数的定义域是 $\sqrt{\sin x}$ 与 $\sqrt{16-x^2}$

定义域的公共部分, 有 $\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ 16-x^2 \geq 0 \end{cases}$

解之得 $2n\pi \leq x \leq 2n\pi + \pi \quad (n=0, \pm 1, \pm 2 \dots)$

且 $-4 \leq x \leq 4$, 取其公共部分

$$0 \leq x \leq \pi \quad -4 \leq x \leq -\pi$$

故函数的定义域为 $[-4, -\pi]$, $[0, \pi]$.

(6) 因为 $\cos x > 0$,

$$\text{所以 } 2n\pi - \frac{\pi}{2} < x < 2n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{即 } \frac{4n-1}{2}\pi < x < \frac{4n+1}{2}\pi$$

($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$(7) \text{ 由于 } 0 \leq \sqrt{2x} \leq 1 \quad \text{即} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

故定义域为 $[0, \frac{1}{2}]$.

$$(8) \text{ 由 } x + \sqrt{x^2 + 1} > 0 \quad \text{即 } \sqrt{x^2 + 1} > -x$$

为绝对不等式。故函数的定义域为 $(-\infty, \infty)$ 。

(9) 由于定义域同时满足 $3 - x \geq 0$

$$\text{与 } -1 \leq \frac{x-2}{3} \leq 1 \quad \text{解得 } x \leq 3 \text{ 且 } -1 \leq x \leq 5$$

故函数的定义域为公共部分 $[-1, 3]$ 。

(10) 当 $\cos(\lg x) > 0$ 时, y 值确定,

$$\text{解之得 } (2k - \frac{1}{2})\pi < \lg x < (2k + \frac{1}{2})\pi$$

从而函数的定义域为

$$10^{(2k - \frac{1}{2})\pi} < x < 10^{(2k + \frac{1}{2})\pi}$$

($k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$)

(11) 当 $-1 \leq 1 - x \leq 1$, 即 $0 \leq x \leq 2$ 时, 第一个函数有意义,

当 $\lg x > 0$, 即 $x > 1$ 时, 第二个函数有意义。由此得函数的定义域为: $1 < x \leq 2$

(12) 当 $\sin \pi x \neq 0$ 时, 第一项有意义, 即

$x \neq k \ (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 。

当 $0 \leq 2^x \leq 1$ 时，第二项有意义，即 $x \leq 0$ ，由此得函数的定义域为

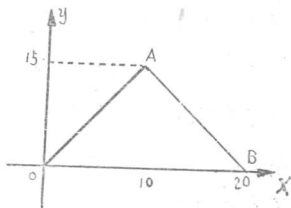
$$x < 0, \ x \neq n \ (n=1, 2, \dots),$$

2. 脉冲发生器产生一个三角形波如图 (1—1) 写出函数关系式 $u=u(t)$

$$(0 \leq t \leq 20)$$

解：直线OA的方程为

$$u = \frac{15}{10}t = \frac{3}{2}t$$



直线AB的方程，由两点式

可得：

图 1—1

$$\frac{u-15}{t-10} = \frac{0-15}{20-10} \quad \text{即} \quad u = -\frac{3}{2}t + 30$$

$$\text{故有 } u = \begin{cases} \frac{3}{2}t & 0 \leq t \leq 10 \\ -\frac{3}{2}t + 30 & 10 < t \leq 20 \end{cases}$$

3. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} 2+x & x \leq 0 \\ 2^x & x > 0 \end{cases} \quad \text{求：}$$

$$(1) f(-3), f(0), f(1)$$

$$(2) f(\Delta x) - f(0), f(-\Delta x) - f(0) (\Delta x > 0)$$

$$\text{解：} f(-3) = 2 - 3 = -1, \quad f(0) = 2 + 0 = 2$$

$$f(1) = 2^1 = 2$$

$$f(0 + \Delta x) - f(0) = 2^{0 + \Delta x} - (2 + 0)$$

$$= 2^{\Delta x} - 2 \quad f(0 - \Delta x) - f(0) = 2^{0 - \Delta x} - (2 + 0) = 2^{-\Delta x} - 2$$

4. 试作下列函数的图象

$$(1) f(x) = \begin{cases} 3x & |x| > 1 \\ x^2 & |x| < 1 \\ 3 & |x| = 1 \end{cases}$$

$$(2) f(x) = |x| \quad (3) f(x) = |x^2 - 1|$$

解: (1) 当 $|x| > 1$ 时 $f(x) = 3x$ 是直线
当 $|x| < 1$ 时 $f(x) = x^2$ 是抛物线
当 $|x| = 1$ 时 $f(x) = 3$ 是两点

作如图 1-2

(2) 因为 $f(x) =$

$$= \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

作函数图象如图 1-3.

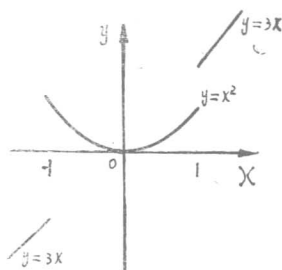


图 1-2

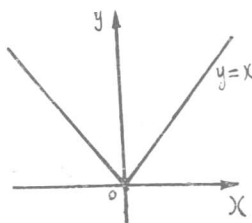


图 1-3

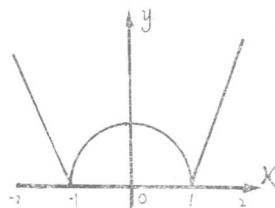


图 1-4

(3) 列表

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2 - 1 $	3	0	1	0	3

作函数图象如图 1-4。

5. 求下列函数的定义域及值域:

$$(1) y = \sqrt{2+x-x^2}$$

$$(2) y = \arccos \frac{2x}{1+x^2} \quad (3) y = \arcsin \left(\lg \frac{x}{10} \right)$$

$$(4) y = (-1)^x$$

解: (1) 当 $2+x-x^2 \geq 0$ 时, y 值确定。解之, 得函数的定义域 $-1 \leq x \leq 2$ 。

$$\text{又因为 } y = \sqrt{\frac{9}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{3}{2},$$

所以, 函数的值域为 $0 \leq y \leq \frac{3}{2}$ 。

(2) 当 $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1$ 时, y 值确定, 而对于 $-\infty < x < +\infty$ 来说, 始终有 $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1$, 所以, 函数的定义域为全体实数, 即 $(-\infty, \infty)$ 。

(3) 当 $-1 \leq \lg \frac{x}{10} \leq 1$ 时的即当 $\frac{1}{10} \leq \frac{x}{10} \leq 10$, 或 $1 \leq x \leq 100$ 时, y 值确定, 且在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上变化, 所以, 存在域为闭区间 $[1, 100]$, 函数的值域为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 。

(4) 定义域为数 $x: x = \frac{p}{2q+1}$

(P, q 为整数)而函数的值域为: $y = (-1)^2$
即由 $-1, 1$ 。

§ 1-3 一些特殊类型的函数

习 题

1. 判断下列函数的奇偶性:

$$(1) y = x^2 e^{-x^2} \quad (2) y = x + \sin x$$

$$(3) y = \operatorname{tg} x \quad (4) y = \sin x + \cos x$$

解: (1) 因为 $f(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)^2}$
 $= x^2 e^{-x^2} = f(x)$ 所以, 原来函数是偶函数

(2) 因为 $f(-x) = (-x) + \sin(-x)$
 $= -(x + \sin x) = -f(x)$ 所以, 原来函数是奇函数。

(3) 因为 $f(-x) = \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x = -f(x)$
所以, 原来函数是奇函数。

$$(4) y = \sin x + \cos x$$

(4) 因为 $f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x$
 $+ \cos x$ 故原来函数 $y = \sin x + \cos x$ 是非奇非偶函数。

2. 证明:

(1) 奇函数与奇函数之和仍为奇函数;

(2) 偶函数与偶函数之和仍为偶函数;

(3) 奇函数与偶函数的乘积是奇函数;

(4) 奇函数与奇函数之积是偶函数;

(5) 偶函数与偶函数之积是偶函数。

证: (1) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为奇函数,
 且 $F(x) = f(x) + g(x)$
 则 $F(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x)$
 $= -[f(x) + g(x)] = -F(x)$
 故 $F(x)$ 是奇函数。

(2) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为偶函数,
 且 $F(x) = f(x) + g(x)$
 则 $F(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = F(x)$
 故偶函数之和为偶函数。

(3) 设 $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数,
 且令 $F(x) = f(x) \cdot g(x)$
 则 $F(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = -f(x) \cdot g(x)$
 $= -[f(x) \cdot g(x)] = -F(x)$
 故之积 $F(x)$ 为奇函数。

(4) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是奇函数,
 且令 $F(x) = f(x) \cdot g(x)$
 则 $F(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = [-f(x)] \cdot [-g(x)]$
 $= f(x) \cdot g(x) = F(x)$
 故两奇函数之积 $F(x)$ 为偶函数。

(5) 设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 是偶数, 且令 $F(x)$
 $= f(x) \cdot g(x)$ 则 $F(-x) = f(-x) \cdot g(-x)$
 $= f(x) \cdot g(x) = F(x)$ 故两偶函数之积 $F(x)$ 为偶函数

9. 设 $f(x)$ 是定义在 $[-L, L]$ 上的任意函数, 证明:

$f(x) + f(-x)$ 为偶函数, $f(x) - f(-x)$ 为奇函数

证: 因为 x 在 $(-L, L)$ 内, 则 $-x$ 也在 $(-L, L)$ 内。

令 $F(x) = f(x) + f(-x)$

$$\begin{aligned} \text{则 } F(-x) &= f(-x) + f[-(-x)] = f(-x) \\ &+ f(x) = f(x) + f(-x) = F(x) \end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 为偶函数, 即 $f(x) + f(-x)$ 为偶函数。

$$\text{令 } G(x) = f(x) - f(-x)$$

$$\begin{aligned} \text{则 } G(-x) &= f(-x) - f[-(-x)] \\ &= f(-x) - f(x) = -[f(x) - f(-x)] = -G \end{aligned}$$

所以, $f(x) - f(-x)$ 为奇函数。

4. 求下列函数的周期:

$$(1) y = \cos^2 x \quad (2) y = 2 \operatorname{tg} 3x$$

$$(3) y = \cos \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{3} \quad (4) y = \sin 2x + \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

解: (1) 因为 $y = \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ 。而 $\cos 2x$

的周期为 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, $y(x + \pi) = \frac{1}{2}[1 + \cos 2(\pi + x)] = \cos^2 x$ 所以, $y = \cos^2 x$ 是周期为 π 的周期函数。

$$(2) \text{ 因为 } y = 2 \operatorname{tg}(3x + \pi) = 2 \operatorname{tg} 3x$$

$$\text{但 } 2 \operatorname{tg}(3x + \pi) = 2 \operatorname{tg} 3(x + \frac{\pi}{3})$$

故 $y = 2 \operatorname{tg} 3x$ 是周期为 $\pi/3$ 的周期函数。

$$(3) \text{ 因为 } \cos \frac{x}{2} \text{ 的周期为 } T_1 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi.$$

$$\text{而 } 2 \sin \frac{x}{3} \text{ 的周期为 } T_2 = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi.$$

所求函数的周期为这两个函数周期的最小公倍数, 故 4π 与 6π 的最小公倍数为 12π , 所以原来函数的周期为 12π 。

$$(4) y = \sin 2x + \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$