GAO
DENG
SHU
XUE

山东省五所师范院校
《高等数学》教材编写组

山东省出版总社
临沂办事处

高等数学习题解答

前　　言

本书是根据三年制师范专科学校物理专业《高等数学》教学大纲与我省教学需要而编写的。编写中兼顾到除可作高师二年制物理专业、三年制化学专业以及函授、进修同类专业的教材外，还可作电大、夜大同类专业的教学参考书。

本书是《高等数学》的基础部分，分上、下两册。上册包括一元函数微积分学、空间解析几何、行列式和矩阵等。下册包括多元函数微积分学、常微分方程、矢量分析与场论初步、无穷级数等。书中带※号内容，可供选用。各章配有习题，并另有附印的习题解答。

参加本书编写工作的有临沂师专吴大坤、泰安师专赵兴乐、烟台师范学院秦祥保、魏远、山东煤矿教育学院张润庠、青岛师专陈殿宣、临沂教育学院王端中等同志。

本书的审定以魏远副教授为主，还有吴大坤、赵兴乐、张润庠。参加审稿会的单位有济宁师专、山东省教育学院、济宁教育学院、青岛教育学院、潍坊教育学院、聊城教育学院、德州教育学院、济南教育学院、济南师专。

参加审稿的同志都认真审阅了部分原稿，提出了许多改进意见。在本书编印过程中，山东省教育厅以及临沂师专、泰安师专、山东煤矿教育学院等各院校的领导同志给予大力支持，对此我们表示衷心感谢。

限于编者水平，又加编印时间仓促，书中错误和不妥之处定然不少，恳切希望读者提出批评指正。

——编　　者

一九八五年六月

目　　录

第一章　变量与函数

§1—1　予备知识

习　　题

解下列不等式

1．$0<(x-2)^2\leqslant 4$

解：开方取正号　$0<|x-2|\leqslant 2$　即$0<x-2\leqslant 2$及$-2\leqslant x-2<0$　则有$2<x\leqslant 4$　及$0\leqslant x<2$

2．$|x|>x$

解：（1）当$x>0$时，原不等式化为$x>x$矛盾

（2）当$x=0$时，原不等式化为$0>0$矛盾

（3）$x<0$时，原不等式化为$-x>x$

即$2x<0$，所以$x<0$为不等式的解。

3．$\left|\dfrac{x}{1+x}\right|>\dfrac{x}{1+x}$

解：当$\dfrac{x}{1+x}\geqslant 0$时原不等式化为矛盾不等式，所以不成立。

当　$\dfrac{x}{1+x}<0$时，即$\begin{cases}x<0\\1+x>0\end{cases}$和$\begin{cases}x>0\\1+x<0\end{cases}$（无解）

由第一个不等式组可知$-1<x<0$

所以原不等式的解为　$-1<x<0$

4．$|x^2-3x+2|>x^2-3x+2$

解：当$x^2-3x+2\geqslant 0$不等式无解。

当$x^2-3x+2<0$即$(x-1)(x-2)<0$

则 $-(x^2-3x+2)>x^2-3x+2$，

故$x^2-3x+2<0$， 解得$1<x<2$ 所以原不等式的解是$1<x<2$。

5．$|\sin x|=\sin x+2$

解 当$\sin x\geqslant 0$时，$\sin x=\sin x+2$，无解；

当 $\sin x<0$时，$-\sin x=\sin x+2$ 得 $\sin x=-1$

所以 $x=-\frac{\pi}{2}\pm 2k\pi$（$K=0, 1, 2\cdots\cdots$）

6．$|2x+3|=x^2$

解 由绝对值的定义，有

（1）$\begin{cases}2x+3=x^2\\2x+3>0\end{cases}$ （2）$\begin{cases}2x+3<0\\-2x-3=x^2\end{cases}$

解 （1）得$\begin{cases}(x+1)(x-3)=0\\x>-\frac{3}{2}\end{cases}$ 所以$x=-1$和$x=3$；

（2）在实数范围内无解。

§1—2 函 数

习 题

1．求下列函数的定义域：

（1）$y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$ （2）$y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$

（3）$y=\sqrt{x^2-4x+3}$

（4）$y=\lg(\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x})$

（5）$y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$

(6) $y=\frac{1}{\sqrt{\cos x}}$　　(7) $y=\arccos\sqrt{2x}$

(8) $y=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$

(9) $y=\sqrt{3-x}+\arccos\frac{x-2}{3}$

(10) $y=\lg[\cos(\lg x)]$

(11) $y=\arcsin(1-x)+\lg(\lg x)$

(12) $y=\operatorname{ctg}\pi x+\arccos(2^x)$

解　(1) $\because x^2-3x+2\neq 0$

即 $(x-1)(x-2)\neq 0$　$x\neq 1$，$x\neq 2$

所以函数的定义域为：$(-\infty,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ \infty)$

(2) 函数的定义域为$\frac{1}{x}$与$\sqrt{1-x^2}$定义域的公共部分

即$x\neq 0$且$1-x^2\geqslant 0$　解之得$x\neq 0$，$-1\leqslant x\leqslant 1$，

则函数的定义域为$(-1,\ 0)$，$(0,\ 1)$。

(3) $\because x^2-4x+3\geqslant 0$，　即$(x-1)(x-3)\geqslant 0$

可得$\begin{cases}x-1\geqslant 0\\x-3\geqslant 0\end{cases}$　及　$\begin{cases}x-1\leqslant 0\\x-3\leqslant 0\end{cases}$

解之得$x\geqslant 3$及$x\leqslant 1$

所以，函数的定义域为$[-\infty,\ 1]$，$[3,\ +\infty]$

(4) $\because\begin{cases}x-4\geqslant 0\\6-x>0\end{cases}$　及　$\begin{cases}x-4>0\\6-x\geqslant 0\end{cases}$

解之得$4\leqslant x<6$及$4<x\leqslant 6$　故函数的定义域为$[4,6]$

(5) $\because$函数的定义域是$\sqrt{\sin x}$与$\sqrt{16-x^2}$

定义域的公共部分，有$\begin{cases}\sin x\geqslant 0\\16-x^2\geqslant 0\end{cases}$

解之得$2n\pi\leqslant x\leqslant 2n\pi+\pi$　$(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2\cdots)$

且$-4\leqslant x\leqslant 4$，取其公共部分

$0\leqslant x\leqslant\pi \qquad -4\leqslant x\leqslant -\pi$

故函数的定义域为〔-4，$-\pi$〕，〔0，π〕。

（6）因为$\cos x>0$，

所以$2n\pi-\frac{\pi}{2}<x<2n\pi+\frac{\pi}{2}$

即 $\frac{4n-1}{2}\pi<x<\frac{4n+1}{2}\pi$

（$n=0$，±1，±2，……）

（7）由于$0\leqslant\sqrt{2x}\leqslant1$ 即 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$

故定义域为〔0，$\frac{1}{2}$〕。

（8）由$x+\sqrt{x^2+1}>0$ 即$\sqrt{x^2+1}>-x$

为绝对不等式。故函数的定义域为（$-\infty$，∞）。

（9）由于定义域同时满足 $3-x\geqslant0$

与$-1\leqslant\frac{x-2}{3}\leqslant1$ 解得$x\leqslant3$且$-1\leqslant x\leqslant5$

故函数的定义域为公共部分〔-1，3〕。

（10）当$\cos(\lg x)>0$时，y值确定，

解之得$(2k-\frac{1}{2})\pi<\lg x<(2k+\frac{1}{2})\pi$

从而函数的定义域为

$10^{(2k-\frac{1}{2})\pi}<x<10^{(2k+\frac{1}{2})\pi}$

（$k=0$，±1，±2，±3，…）

（11）当$-1\leqslant1-x\leqslant1$，即$0\leqslant x\leqslant2$时，第一个函数有意义，

当$\lg x>0$，即$x>1$时，第二个函数有意义。由此得函数的定义域为： $1<x\leqslant2$

（12）当$\sin\pi x\neq0$时，第一项有意义，即

$x \neq k$（$k=0$，± 1，± 2，……）。

当 $0 \leqslant 2^{x} \leqslant 1$ 时，第二项有意义，即 $x \leqslant 0$，由此得函数的定义域为

$$x < 0,\ x \neq n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots),$$

2．脉冲发生器产生一个三角形波如图（1——1）写出函数关系式 $u=u(t)$

（$0 \leqslant t \leqslant 20$）

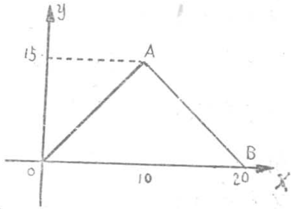

图 1—1

解：直线OA的方程为

$$u=\frac{15}{10}t=\frac{3}{2}t$$

直线AB的方程，由两点式可得：

$$\frac{u-15}{x-10}=\frac{0-15}{20-10} \qquad \text{即} \quad u=-\frac{3}{2}t+30$$

$$\text{故有 } u=\begin{cases} \frac{3}{2}t & 0 \leqslant t \leqslant 10 \\ -\frac{3}{2}t+30 & 10 < t \leqslant 20 \end{cases}$$

3．设函数

$$f(x)=\begin{cases} 2+x & x \leqslant 0 \\ 2^{x} & x > 0 \end{cases} \qquad \text{求：}$$

（1）$f(-3)$，$f(0)$，$f(1)$

（2）$f(\triangle x)-f(0)$，$f(-\triangle x)-f(0)(\triangle x > 0)$

解：$f(-3)=2-3=-1$，$f(0)=2+0=2$

$f(1)=2^{1}=2$

$f(0+\triangle x)-f(0)=2^{0+\triangle x}-(2+0)$

$=2^{\triangle x}-2 \qquad f(0-\triangle x)-f(0)=2^{0-\triangle x}$

$-(2+0)=2^{-\triangle x}-2$

4．试作下列函数的图象

（1）$f(x)=\begin{cases} 3x & |x|>1 \\ x^2 & |x|<1 \\ 3 & |x|=1 \end{cases}$

（2）$f(x)=|x|$ （3）$f(x)=|x^2-1|$

解：（1）当$|x|>1$时$f(x)=3x$是直线

当$|x|<1$时$f(x)=x^2$是抛物线 当$|x|=1$时$f(x)=3$是两点

作如图1—2

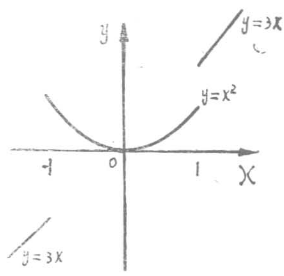

图1—2

（2）因为$f(x)$

$=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$

作函数图象如图1—3．

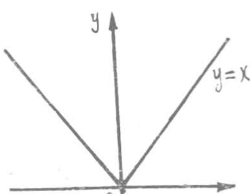

图1—3

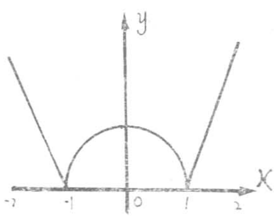

图1—4

（3）列表

x	-2	-1	0	1	2
$y=\|x^2-1\|$	3	0	1	0	3

作函数图象如图1—4.

5．求下列函数的定义域及值域：

（1）$y=\sqrt{2+x-x^2}$

（2）$y=\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$　　　（3）$y=\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$

（4）$y=(-1)^x$

解：（1）当$2+x-x^2\geqslant 0$时，y值确定。解之，得函数的定义域$-1\leqslant x\leqslant 2$.

又因为　$y=\sqrt{\dfrac{9}{4}-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2}\leqslant\dfrac{3}{2}$,

所以，函数的值域为　$0\leqslant y\leqslant\dfrac{3}{2}$.

（2）当$\left|\dfrac{2x}{1+x^2}\right|\leqslant 1$时，$y$值确定，而对于

$-\infty<x<+\infty$来说，始终有$\left|\dfrac{2x}{1+x^2}\right|\leqslant 1$，所以，函数的定义域为全体实数，即$(-\infty,\infty)$.

（3）当$-1\leqslant\lg\dfrac{x}{10}\leqslant 1$时的即当$\dfrac{1}{10}\leqslant\dfrac{x}{10}\leqslant 10$，或

$1\leqslant x\leqslant 100$时，$y$值确定，且在$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上变化，所以，存在域为闭区间〔1，100〕，函数的值域为

$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$。　（4）定义域为数　$x:x=\dfrac{P}{2q+1}$

（P，q为整数）而函数的值域为：$y=(-1)^{2}$ 即由－1，1。

§1－3　一些特殊类型的函数

习　　题

1．判断下列函数的奇偶性：

（1）$y=x^{2}e^{-x^{2}}$　　（2）$y=x+\sin x$

（3）$y=\mathrm{tg}x$　　（4）$y=\sin x+\cos x$

解：（1）因为$f(-x)=(-x)^{2}e^{-(-x)^{2}}$ $=x^{2}e^{-x^{2}}=f(x)$所以，原来函数是偶函数

（2）因为$f(-x)=(-x)+\sin(-x)$ $=-(x+\sin x)=-f(x)$所以，原来函数是奇 函 数。

（3）因为$f(-x)=\mathrm{tg}(-x)=-\mathrm{tg}x=-f(x)$ 所以，原来函数是奇函数。

（4）$y=\sin x+\cos x$

（4）因为$f(-x)=\sin(-x)+\cos(-x)=-\sin x+\cos x$故原来函数$y=\sin x+\cos x$是非奇非偶函 数。

2．证明：

（1）奇函数与奇函数之和仍为奇函数；

（2）偶函数与偶函数之和仍为偶函数；

（3）奇函数与偶函数的乘积是奇函数；

（4）奇函数与奇函数之积是偶函数；

（5）偶函数与偶函数之积是偶函数。

证：（1）设$f(x)$与$g(x)$为奇函数，

且$F(x)=f(x)+g(x)$

则$F(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)$

$=-[f(x)+g(x)]=-F(x)$

故$F(x)$是奇函数。

（2）设$f(x)$与$g(x)$为偶函数，

且$F(x)=f(x)+g(x)$

则$F(-x)=f(-x)++g(-x)=f(x)+g(x)=F(x)$

故偶函数之和为偶函数。

（3）设$f(x)$为奇函数，$g(x)$为偶函数，

且令　$F(x)=f(x)\cdot g(x)$

则$F(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=-f(x)\cdot g(x)$

$=-[f(x)\cdot g(x)]=-F(x)$

故之积$F(x)$为奇函数。

（4）设$f(x)$与$g(x)$都是奇函数，

且令　$F(x)=f(x)\cdot g(x)$

则$F(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=[-f(x)]\cdot[-g(x)]$

$=f(x)\cdot g(x)=F(x)$

故两奇函数之积$F(x)$为偶函数。

（5）设$f(x)$及$g(x)$是偶数，且令$F(x)$
$=f(x)\cdot g(x)$则$F(-x)=f(-x)\cdot g(-x)$
$=f(x)\cdot g(x)=F(x)$故两偶函数之积$F(x)$为偶函数

9．设$f(x)$是定义在$[-L,L]$上的任意函数，证明：
$f(x)+f(-x)$为偶函数，$f(x)-f(-x)$为奇函数

证：因为x在$(-L,L)$内，则$-x$也在$(-L,L)$内。

令$F(x)=f(x)+f(-x)$

则$F(-x)=f(-x)+f[-(-x)]=f(-x)$
$+f(x)=f(x)+f(-x)=F(x)$

所以$F(x)$为偶函数，即$f(x)+f(-x)$为偶函数。

令$G(x)=f(x)-f(-x)$

则$G(-x)=f(-x)-f[-(-x)]$
$=f(-x)-f(x)=-[f(x)-f(-x)]=-G$

所以，$f(x)-f(-x)$为奇函数。

4．求下列函数的周期：

(1) $y=\cos^2 x$　　(2) $y=2\operatorname{tg}3x$

(3) $y=\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{3}$　(4) $y=\sin 2x+\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

解：(1)因为$y=\cos^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$。而$\cos 2x$的周期为$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，$y(x+\pi)=\frac{1}{2}[1-\cos 2(\pi+x)]=\cos^2 x$所以，$y=\cos^2 x$是周期为π的周期函数。

(2)因为$y=2\operatorname{tg}(3x+\pi)=2\operatorname{tg}3x$

但$2\operatorname{tg}(3x+\pi)=2\operatorname{tg}3(x+\frac{\pi}{3})$

故$y=2\operatorname{tg}3x$是周期为$\pi/3$的周期函数。

(3)因为$\cos\frac{x}{2}$的周期为$T_1=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$。

而$2\sin\frac{x}{3}$的周期为$T_2=\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$。

所求函数的周期为这两个函数周期的最小公倍数，故4π与6π的最小公倍数为12π，所以原来函数的周期为12π。

(4) $y=\sin 2x+\operatorname{tg}\frac{x}{2}$