高等学校教材

概率论与数理统计

温永仙 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

概率论与数理统计

Gailülun yu Shuli Tongji

温永仙 编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书根据教育部高等学校数学基础课程教学指导分委员会制定的数学基础课程教学基本要求编写而成。全书分为三大部分：第一部分为概率论基础；第二部分为数理统计；第三部分为数学实验。

有别于其他教材，本书力图通过实际问题引入基本概念和建立基本定理，增强学生对概率论与数理统计基本思想、基本方法的理解。同时，在语言叙述上，尽量用通俗的说法去阐述深奥的概念与定理。本书在例题和习题的选择上尽可能扩大范围，有针对性地选编了一些概率统计在农林、经济管理等方面的应用案例，帮助学生了解如何用概率统计知识建立数学模型，解决实际问题。

本书可作为普通高等农林院校本科生学习概率论与数理统计的大学数学基础课教材。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计／温永仙编．—北京：高等教育出版社，2010.8
ISBN 978－7－04－030190－8

Ⅰ.①概… Ⅱ.①温… Ⅲ.①概率论－高等学校－教材②数理统计－高等学校－教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 137474 号

策划编辑	杨　帆	**责任编辑**	蒋　青	**封面设计**	张　志
责任绘图	尹文军	**版式设计**	余　杨	**责任校对**	金　辉
责任印制	韩　刚				

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**咨询电话**	400－810－0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	三河市骏杰印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2010 年 8 月第 1 版
印　　张	28.25	**印　　次**	2010 年 8 月第 1 次印刷
字　　数	530 000	**定　　价**	39.50 元

物料号　30190－00

前　　言

本教材是根据教育部高等学校数学基础课程教学指导分委员会制定的数学基础课程教学基本要求,在参考了国内外许多同类优秀教材的基础上,结合编者多年讲授概率论与数理统计课程所积累的经验而编写的,可作为普通高等农林院校非数学专业本科生学习概率论与数理统计的大学数学基础课教材。

由于“概率论与数理统计”课程是学生在大学里首次接触到以随机现象为研究对象的数学课程,其研究对象、研究方法、思维方式等都有别于其他数学课程。因此,本书力图从实际问题出发引入基本概念和建立基本定理,以激发学生的学习兴趣,增强学生对概率论与数理统计基本思想、基本方法的理解,从而达到突出概率统计思想方法、加强学生应用能力培养的目的。在语言叙述上,尽量用通俗的说法来阐述深奥的概念与定理。

全书分为三大部分:第一部分为概率论基础,包括随机事件及其概率、一维随机变量与概率分布、多维随机变量与概率分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理等五章内容;第二部分为数理统计,着重介绍了统计的基本概念、估计和检验的基本思想与方法、单因素方差分析和一元线性回归分析的内容,共四章;第三部分为数学实验,鉴于当前计算机的应用已达到了相当普及的程度,为了培养学生利用计算机进行数据处理、解决数学问题的能力,本书主要介绍了 MATLAB 软件在概率统计中的基本使用方法,以及应用 MATLAB 来处理概率分布、数字特征参数估计、置信区间、假设检验、方差分析及回归分析等问题,共一章的内容。

本书在例题和习题的选择上尽可能扩大范围,涉及农林业、保险业、医学、经济,等等,在习题中选取了一些历届全国硕士研究生入学统一考试的试题。在前九章的每章最后一节选编了一些有适当难度的综合例题,这些都是全面运用该章理论与方法解决问题的范例,其目的是让学生加深对概率统计理论与方法的理解。各章末附有习题,习题分为两部分,第一部分侧重于基本概念和基本定理的应用,第二部分侧重于概率与统计综合应用和部分数学考研试题。书末附有习题参考答案,便于读者自学。

本书基本内容(前九章)可在 60 学时内全部授完,最后一章数学实验只需用 6 学时即可。本书基本上只用到微积分的知识,凡具备高等数学知识的读者

都可以使用本书作为学习概率论与数理统计课程的教材。

由于编者的水平所限，虽经多次修改，书中一定还存在错误和不足，恳请读者批评指正。

编者

2010 年 2 月

目　录

第一章　随机事件及其概率

在自然界及人类的社会生活中，事物都是相互联系和不断发展的. 在彼此联系和发展过程中，根据它们是否存在必然的因果联系，可以分为两类不同的现象：**确定性现象**和**不确定性现象**. 确定性现象是指在一定条件下，必定会导致某种确定的结果，也可定义为在相同的条件下，每次试验得到的结果是完全相同的现象. 比如，在标准大气压下，水加热到 100 ℃ 必会沸腾；同种电荷互相排斥，异种电荷互相吸引；在十进制下，有 $1+1=2$ 成立. 这些联系是必然的. 通常我们所学的高等数学、线性代数等数学课程都专门研究这种确定性现象. 不确定性现象是在一定条件下，它的结果是不确定的. 不确定性现象又大致可分为：随机现象、模糊、灰色、粗糙. 其中**随机现象**是指在一定的条件下，就一次试验而言，某种结果可能发生，也可能不发生. 随机现象在现实生活中是大量存在的. 例如：在相同条件下抛同一枚硬币，其结果可能是国徽一面朝上，也可能是数字一面朝上，在每次抛掷之前无法肯定抛掷的结果是什么；用同一支手枪射击同一目标，各次射击的弹着点不尽相同，在射击之前无法预测弹着点的确切位置；检验产品质量，任意抽取的某一产品有可能是正品，也可能是次品；桥牌选手在拿到牌之前并不知道他将拿到一手怎样的牌等等都是随机现象. 随机现象的不确定性主要体现在相同的条件下，多次进行同一试验，所得结果不完全一样，而且无法准确地预测下一次所得结果. 从表面上看，随机现象似乎是杂乱无章、没有什么规律的. 但是，如果同类的试验大量重复多次，其随机现象的出现就呈现出一定的规律性. 随机现象所呈现的这种规律性，随着我们观察次数的增多而愈加明显. 比如掷一枚均匀硬币，每一次投掷很难判断是哪一面朝上，但是如果重复多次地掷这枚硬币，就会越来越清楚地发现它两面朝上的次数大体相同. 这种在大量重复试验中所呈现的随机现象的固有规律性，叫做**随机现象的统计规律性**. 概率论是研究和揭示随机现象统计规律的一

门数学学科. 数理统计则以概率论为基础,研究如何依据大量次数的随机试验中所得到的数据,推断事物本质特征的各种方法. 概率统计的理论与方法在应用上十分广泛,它几乎遍及所有科学技术领域、国民经济和工农业生产的各个部门之中.

§1.1 随机事件及运算

一、随机试验

研究随机现象,首先要对研究对象进行大量的观察、试验. 这里的试验是一个广义的术语,它包括各种各样的试验,甚至对某一事物的某一特征的观察也认为是一种试验. 如果一个试验满足以下三个特点,则称之为**随机试验**:

1. 可重复性:可以在相同条件下重复进行;

2. 多样性和明确性:每次试验的可能结果不止一个,并且可以预知试验的所有可能结果;

3. 不确定性:进行一次试验前不能确定将会出现何种结果.

以后简称随机试验为**试验**,采用字母 E 来表示. 下面举几个随机试验的例子.

例 1 试验 E_1:掷一枚硬币,观察落在桌面上究竟是正面朝上还是反面朝上的情况(不妨约定国徽面为正面).

例 2 试验 E_2:记录某电话传呼台在单位时间内收到的呼叫数.

例 3 试验 E_3:在一批灯泡中任意抽取一只,测试它的使用寿命.

例 4 试验 E_4:掷两枚不同的硬币,记录它们正反面朝上的情况.

例 5 试验 E_5:将一米长的绳子任意截成三段,记录各段的长度.

二、样本空间及随机事件

随机试验的一个特点是试验结果不止一个,且可以预知所有可能结果. 我们把随机试验中每一种可能出现的、最简单的、不能再分的结果称为随机试验的**样本点**,用 ω 表示. 而由全体样本点构成的集合称为**样本空间**,记为 Ω.

用集合表示法,例 1 的样本空间可写成 $\Omega_1=\{\mathrm{H},\mathrm{T}\}$,“H”代表的是正面朝上,“T”代表的是反面朝上,则 $\omega=\mathrm{H}$ 代表的是硬币正面朝上,$\omega=T$ 代表的是硬币反面朝上;在例 2 中 $\Omega_2=\{0,1,2,\cdots\}$,这里 0,1,2,…分别代表电话传呼台在单位时间内收到的呼叫数是 0 次,1 次,2 次等等;在例 3 中设这批灯泡最长使用寿命为 T,则 $\Omega_3=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant T\}$,这里的 x 指灯泡使用寿命;在例 4 中 $\Omega_4=\{(\mathrm{H},$

H),(H,T),(T,H),(T,T)},$\omega=(H,T)$代表的是第一枚硬币正面朝上且第二枚硬币反面朝上的样本点,其余类似;在例5中$\Omega_5=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1>0,x_2>0,x_3>0$且$x_1+x_2+x_3=1\}$,如$\omega=(0.1,0.7,0.2)$代表的是三段长度分别为0.1米,0.7米,0.2米的样本点.

样本空间根据样本点的个数不同,可以分为有限集和无限集,如Ω_1是有限集而Ω_2是无限集;也可以分为某个区域和离散点集,如Ω_3是某个区域而Ω_4是离散点集;还可以分为一维点集和多维点集,如Ω_3是一维点集而Ω_5是多维点集. 样本空间的这样划分,对后面学习随机变量知识是有利的.

在实际问题中,我们关心的常常不是某一个试验结果,而是满足某些条件的样本点所组成的样本空间子集. 比如玩骰子游戏,规定大点是4,5,6点,小点是1,2,3点,那么对于玩家来讲更关心的是什么时候出现大点或小点,而不是某个具体的点数. 我们把这些满足某些条件的样本点所构成的集合称为**随机事件**,简称**事件**,用英文大写字母$A,B,C,\cdots$来表示. 如果在一次试验当中,出现的结果$\omega\in A$,则称随机事件A**发生**,否则称它**不发生**.

通过引入集合概念,我们把随机事件当作是样本空间的子集. 凡是样本空间的子集都称之为随机事件. 样本空间Ω也是它本身的子集,称之为**必然事件**,记号为Ω. 在一次试验当中,不管出现什么结果,它必属于样本空间Ω,所以必然事件必定会发生. 空集是任何集合的子集,它不包含样本空间的任何样本点,它必然不会发生,称之为**不可能事件**,记为$\varnothing$. 必然事件和不可能事件事实上都是确定性的,但在这里我们把它们当作是随机事件的特殊情况. 另外,称只有一个样本点所组成的集合为**基本事件**,记号为$\{\omega\}$,相应地,由若干个基本事件组合而成的事件称为**复合事件**.

例6 抛掷一枚骰子,观察其点数的情况. 设A表示出现偶数点的事件,即$A=\{$出现的点数是2,4,6$\}$为一个随机事件;设$B=\{$出现的点数是6$\}$,它为一个基本事件;设$C=\{$出现的点数不超过6$\}$,任何一次试验其结果都不超过6,所以C为一个必然事件,即$C=\Omega$;设$D=\{$出现的点数是8$\}$,显然它是不会发生的,它为一个不可能事件,即$D=\varnothing$.

三、事件的关系与运算

在集合论中,集合之间有一定的关系和运算. 随机事件是一个集合,所以讨论事件之间的关系及其运算是有必要的.

(一)事件的包含和相等关系

定义1 设试验E中有两个事件A与B,若事件A中每个样本点都属于事件B,则称事件B**包含**事件A或事件A**包含于**事件B,记为$A\subset B$(或$B\supset A$). 其含义是若事件A发生必然导致事件B发生. 若$A\subset B$且$B\subset A$,则称事件A与事

件 B **相等**，记号为 $A=B$.

事件的包含关系可用文氏图表示，见图 1－1.

例 7 掷一枚骰子试验，$A=\{$出现的点数是 5$\}$，$B=\{$出现的点数是奇数$\}$，$C=\{$出现的点数是 1,3,5$\}$，则事件 A 发生必然导致事件 B 发生，$A\subset B$，另外 $B=C$.

性质 (1) 若 $A\subset B$，则可以等价地说事件 B 不发生必然导致事件 A 不发生；

(2) 对于任一个事件 A，有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$；

(3) 传递性：$A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$.

(二) 和事件

定义 2 设试验 E 中有两个事件 A 与 B，称由 A 与 B 中一切样本点共同组成的集合为 A 与 B 的**和事件**. 其含义是事件 A 与 B 至少有一个发生，记为 $A\cup B$.

将定义 2 加以推广，n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，它表示 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生；可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的和事件记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$，它表示的是可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 中至少有一个事件发生. 用文氏图表示和事件，见图 1－1.

例 8 测试灯泡寿命的试验中，令 $A=\{t\mid 0\leqslant t\leqslant 500\}$（灯泡寿命不超过 500 小时），$B=\{t\mid 0\leqslant t\leqslant 1\ 000\}$（灯泡寿命不超过 1 000 小时），则 $A\cup B=B=\{t\mid 0\leqslant t\leqslant 1\ 000\}$（灯泡寿命不超过 1 000 小时）.

(三) 积事件

定义 3 设试验 E 中有两个事件 A 与 B，称既属于 A 又属于 B 的样本点所构成的集合为 A 与 B 的**积事件**. 其含义是事件 A 与事件 B 同时发生，记为 $A\cap B$ 或 AB.

将定义 3 加以推广，n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\prod\limits_{i=1}^{n}A_i$，它表示 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生；可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的积事件记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$ 或 $\prod\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$，它表示的是可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 同时发生. 用文氏图表示积事件，见图 1－1.

例 9 在抛掷骰子的试验中，记事件 $A=\{$出现的点数是 2,4,6$\}$，事件 $B=\{$出现的点数是 3,4,5$\}$，则 $AB=\{$出现的点数是 4$\}$，即只有抛掷骰子出现 4 点

时,A 与 B 才同时发生.

(四) 互斥事件(互不相容事件)

定义 4 设试验 E 中有两个事件 A 与 B,若 A 与 B 没有公共的样本点,则称 A 与 B 为**互斥事件**或**互不相容事件**. 其含义是事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$.

将定义 4 加以推广,若 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i=\varnothing$,则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **总起来是互不相容的**;若 $A_iA_j=\varnothing\ (i\neq j;i,j=1,2,3,\cdots,n)$,则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **两两互不相容**. 两两互不相容则一定总起来是互不相容的,反之不真. 用文氏图表示互斥事件,见图 1-1. 特别地,当 A 与 B 互斥时,即 $AB=\varnothing$,$A\cup B$ 可记为 $A+B$. 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,则 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 可记为 $\sum_{i=1}^{n} A_i$.

例 10 设试验 E 的样本空间为 Ω,基本事件 $\{\omega_i\}$ 与基本事件 $\{\omega_j\}$ $(i\neq j)$ 是互不相容事件.

(五) 互逆事件(对立事件)

定义 5 设试验 E 中有两个事件 A 与 B,若 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$,则称 A 与 B 为**互逆事件**,或称**对立事件**. 其含义是事件 A 与事件 B 不能同时发生且事件 A 与事件 B 至少有一个发生. 这时,我们称 B 为 A 的**逆事件**,记号为 $\overline{A}$,同样 A 也为 B 的逆事件,记号为 $\overline{B}$.

用文氏图表示互逆事件,见图 1-1.

若 A 是任意事件,则有以下式子成立:

$$A\overline{A}=\varnothing,\quad A\bigcup\overline{A}=\Omega,\quad \overline{\overline{A}}=A.$$

例 11 掷一颗骰子,令 $A=\{$出现奇数点$\}$,$B=\{$出现偶数点$\}$,则 $AB=\varnothing$,且 $A\cup B=\Omega$,所以 $B=\overline{A}$,即 B 与 A 是互逆事件.

(六) 差事件

定义 6 设试验 E 中有两个事件 A 与 B,称属于 A 但不属于 B 的样本点组成的集合为 A 与 B **之差**. 其含义是事件 A 发生但事件 B 不发生,记号为 $A-B$.

不难发现 $A-B=A-AB=A\overline{B}$,$\overline{A}=\Omega-A$. 用文氏图表示差事件,见图 1-1.

例 12 设 A 表示"张三是亚洲人",B 表示"张三是日本人",则 $A-B$ 表示"张三是亚洲人但不是日本人".

(七) 完备事件组

定义 7 设试验 E 中有一事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,它们两两互不相容且 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\Omega$,则 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 称为 E 的一个**完备事件组**,或称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本

空间 Ω 的一个**有限划分**.

设试验 E 中有一事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$,它们两两互不相容且 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\Omega$,则 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$也称为 E 的一个**完备事件组**,或称 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$为样本空间 Ω 的一个**可列无穷划分**.

由于事件之间的各种关系与集合之间的相互关系是一致的,因此为了更加直观地表示事件之间的关系,可用文氏图来表示它们的关系,见图 1-1.

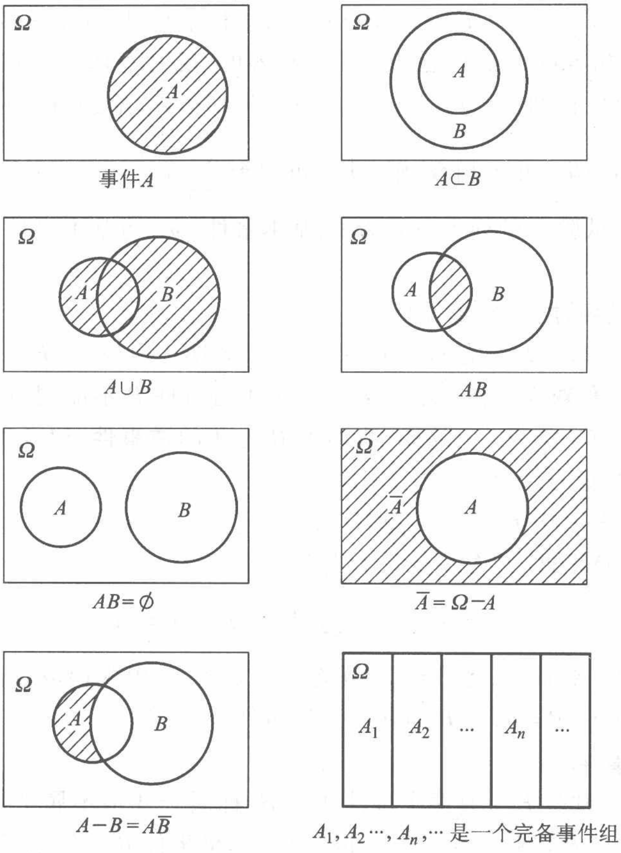

图 1-1

和集合运算一致,事件之间的运算有以下几个性质:

1. 幂等律 $A\cup A=A,A\cap A=A$;
2. 交换律 $A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$;
3. 结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;
4. 分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C);$$

5. 德摩根(De Morgan)定律 $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,

加以推广有 $\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i},\overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A_i}$.

例 13 设 A,B,C 是样本空间 Ω 中的三个随机事件,试用 A,B,C 的运算表达式表示下列随机事件.

(1) A 与 B 发生但 C 不发生;

(2) 事件 A,B,C 中至少有一个发生;

(3) 事件 A,B,C 中至少有两个发生;

(4) 事件 A,B,C 中恰好有两个发生;

(5) 事件 A,B,C 中至多有一个事件发生.

解 (1) $AB\overline{C}$; (2) $A\cup B\cup C$; (3) $AB\cup BC\cup AC$;

(4) $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$;

(5) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$ 或 $\overline{AB\cup BC\cup AC}$.

例 14 一工人生产了 n 个零件,设 $A_i=\{$第 i 个零件是正品$\}(i=1,2,\cdots,n)$. 试用文字叙述下列事件:

(1) $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$;(2) $\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$;(3) $\bigcup_{i=1}^{n}[\overline{A_i}\cap(\bigcap_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}A_k)]$.

解 (1) $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$ 表示 n 个零件全是正品;

(2) $\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$ 表示至少有一个零件不是正品;

(3) $\bigcup_{i=1}^{n}[\overline{A_i}\cap(\bigcap_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}A_k)]$ 表示仅有一个零件不是正品.

§1.2 事件的频率与概率

随机试验中有若干个随机事件,在一次试验中它们有可能发生,也有可能不发生,在试验前是无法预知的,但是它们发生的可能性大小却是存在的,而且是客观的量. 例如,抛掷一枚质地不均匀的硬币,显然必有一面朝上的可能性超过另外一面;多次重复抛掷一枚均匀骰子,出现奇数点的可能性与出现偶数点的可能性相当;购买体育彩票获得特等奖的可能性远远低于没有中奖的可能性. 那么如何定量描述这种可能性大小呢?

我们先用概率这个名词来表示随机事件发生的可能性大小,即这种标志着随机事件发生可能性大小的数量指标就称为随机事件发生的**几率**或**概率**. 随机

事件 A 的概率记为 $P(A)$. 那么如何定义概率以及如何计算概率呢？在概率论的发展过程中，主要有两种定义方式. 一种是概率的统计定义，另外一种是概率的公理化定义.

一、概率的统计定义

设 E 为一随机试验，A 是一随机事件，在相同条件下重复进行 n 次试验，若事件 A 发生了 k 次，则称 k 为事件 A 发生的**频数**，称 $\frac{k}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**，记为 $f_n(A)=\frac{k}{n}$. 可以证明，频率具有以下三个性质：

1. **非负性** $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；
2. **规范性** $f_n(\Omega)=1$；
3. **频率的有限可加性** 若 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是 m 个两两互不相容的随机事件，则 $f_n\left(\sum\limits_{i=1}^{m}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{m}f_n(A_i)$.

频率的大小反映了一个随机事件发生的频繁程度. 如果频率越大，直观感觉事件发生的可能性越大. 譬如一个人买体育彩票获得特等奖的频率远远低于没有中奖的频率，所以有理由相信获得特等奖的可能性远远低于没有中奖的可能性. 但是，反映不是表示，直觉不能当作数据来用. 重复抛掷一枚均匀硬币 10 次，出现正面 9 次，出现正面的频率为 0.9；在相同条件下另外进行 10 次试验有可能出现正面 1 次，出现正面的频率为 0.1. 频率出现了波动，显然用 0.9 或 0.1 来表示出现正面的可能性大小是行不通的.

在第一章的引言中，我们已经提过随机现象从表面上看似乎是杂乱无章、没有什么规律的. 但是，如果相同的随机现象大量重复出现，它的总体就会呈现出一定的规律性. 大量相同随机现象所呈现的这种规律性，随着我们观察的次数的增多而愈加明显. 历史上不少的科学实验验证了这种规律性的存在. 例如，历史上几位著名学者所进行的抛掷一枚均匀硬币试验，结果见表 1－1.

表 1－1 抛硬币试验

试验者	抛掷次数 n	出现正面次数 k	频率 $\frac{k}{n}$
德摩根(De Morgan)	2 048	1 061	0.518 1
德摩根(De Morgan)	2 048	1 048	0.511 7
德摩根(De Morgan)	2 048	1 017	0.496 6