

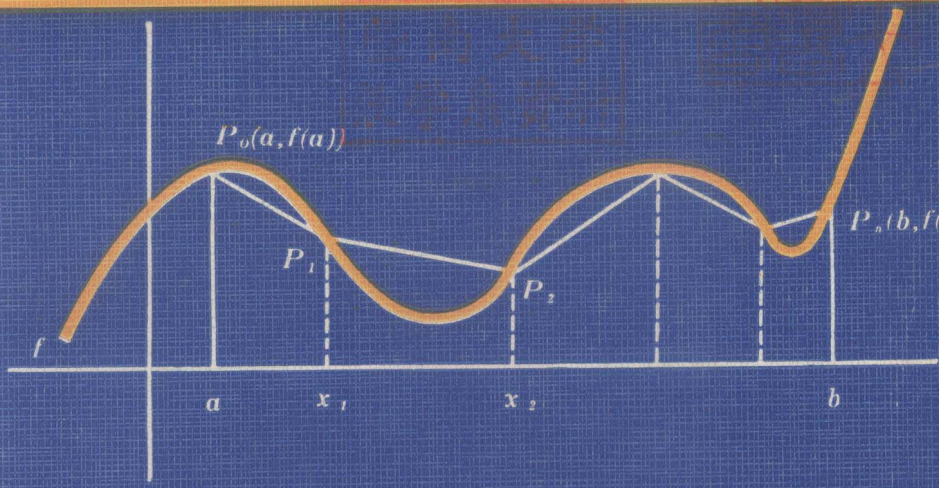
139430

# 分積微

中 冊

EDWIN E. MOISE 原 著

吳森原 徐 復 張德新 合 譯



校 閱 者

李新民 徐道寧

東華書局印行

# 微積分

## CALCULUS

中 冊

EDWIN E. MOISE 原著

吳森原 徐復 張德新 合譯

校閱者

李新民 徐道寧

東華書局印行



---

## 版權所有·翻印必究

中華民國五十九年一月初版  
中華民國六十八年四月三版

大學  
用書 微 積 分 (全三冊)

中冊 定價 新台幣七十元整

(外埠酌加運費滙費)

譯者	吳森原 徐復 張德新
發行人	卓 鑫 森
出版者	臺灣東華書局股份有限公司 臺北市博愛路一〇五號 電話：3819470 郵撥：6481
印刷者	中 臺 印 刷 廠 臺中市公園路三十七號

---

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號  
(58034)

# 微 積 分

## 中 冊 目 次

### 第六章 積分法

6. 1 引 言	393
6. 2 自變數與不定積分	395
6. 3 導出對數與反正割之積分·代數方法	407
6. 4 分部積分法	418
6. 5 三角函數冪之積分	425
6. 6 代換積分法	433
6. 7 代數代換及其選用	441
6. 8 代數方法：配方與部分分式	449

### 第七章 定積分

7. 1 弧長問題	457
7. 2 定積分定義為樣本和之極限	465
7. 3 用圓盤法求體積	475
7. 4 用橫截面之一般方法，殼法	482
7. 5 旋轉曲面之面積	489
7. 6 力矩與形心· <u>巴蒲斯</u> 定理	498
7. 7 瑕積分	509

7. 8 連續函數之可積分性	517
----------------	-----

## 第八章 圓錐曲線

8. 1 軸之平移	525
8. 2 橢圓	530
8. 3 軸之旋轉·有向法線式	537
8. 4 雙曲線	543
8. 5 橢圓幾何學, 反射性質	550
8. 6 一般二次方程式	557

## 第九章 平面上之路線與向量

9. 1 質點在平面上之運動	567
9. 2 參數中值定理; 洛斯比特法則	572
9. 3 洛斯比特法則之其他形式	581
9. 4 極坐標	587
9. 5 用極坐標表面積	594
9. 6 路線之長	598
9. 7 平面之向量	602
9. 8 自由向量	609
9. 9 速度, 加速度, 曲率	616
9. 10 向量與向量空間之概要	627

## 第十章 數論與部分分式

10. 1 整除性與歐幾里得輻轉相除法	629
10. 2 部分分式法之一推廣	637
10. 3 一般部分分式法	645

附錄 A	邏輯與集合論中之符號	653
附錄 B	函數極限之代數運算	657
附錄 C	數列極限之代數運算	663
附錄 D	積分之導數	666
附錄 E	近似值 $\Delta f \approx df$ 之誤差	670
附錄 F	合成函數之連續性	673
附錄 G	<u>辛浦生法則</u> 之誤差	676
附錄 H	函數集合之代數	680
附錄 I	<u>諾斯易斯特定理</u> 之證明	683
附錄 J	路線長公式之證明	687
表一	自然三角函數	689
表二	指數函數	690
表三	數之自然對數	691
表四	積分簡表	692
答案選輯		702
英漢名詞索引		710
漢英名詞索引		715

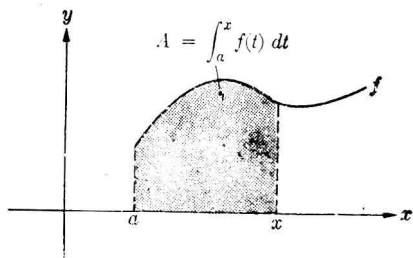
# 6

## 積 分 法

### 6.1 引 言

在 3.7 節中曾覓得解某些型式之面積問題之有效方法。欲求位於連續函數  $f$  圖形下方由  $a$  至  $b$  之面積，曾引用“面積函數”

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$



且知對每一  $x$ ，有

$$F'(x) = D \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

欲計算面積函數，可求（若為可能）另一函數  $G$ ，使

$$G' = f.$$

於是

$$G' = F'.$$

若  $G(a)=0$ , 則對每一  $x$ ,  $G(x)=F(x)$ . 若否, 則令

$$H(x) = G(x) - G(a),$$

於是

$$H'(x) = G'(x) = F'(x), \quad H(a) = 0.$$

故對每一  $x$ ,

$$H(x) = F(x).$$

因而得

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) = H(b) = G(b) - G(a).$$

綜上可知

$$G' = f \Rightarrow \int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a).$$

記號  $t$  與  $G$  乃因便於推演而引用者。一旦得知答案, 則以  $x$  與  $F$  表之, 似覺更為自然。此即

$$F' = f \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

述為更正式之形式:

**定理 1 (積分基本定理 The fundamental theorem of integral calculus).**

若  $f$  連續於  $[a, b]$ , 且  $F' = f$ , 則

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

當然, 若  $f$  已知, 欲應用本定理時, 必須求出  $F$ . 此一步驟稱為反微分法 (antidifferentiation). 以後將可得知此種反微分法事實上有多方面之用途; 不僅可用於求解前所述及之面積問題, 並可用於解多種不屬面積問題之重要問題, 但此種進一步之應用將於以後討論之。



蓋因欲用此種方法，必須知悉如何計算一函數  $F$  使其導數為一已知函數  $f$ ；截至目前，僅於相當簡易之情形下，可用試驗之程序求出函數  $F$ ，但若將各種難題推演為反微分問題後，再發現無法解此反微分問題，則將令人沮喪。因此，似以先略費篇幅，學得由已知導數求其函數之有效方法方為善策。

## 6.2 自變數與不定積分

定義函數之一般方法，乃為對定義域之每一數，寫出一式以表其所對應之函數值。例如寫出

$$f(x) = x^2 \quad (-\infty < x < \infty), \quad g(x) = \sqrt{x} \quad (x \geq 0),$$

即可以定義函數  $f$  與  $g$ 。在此二式中，文字“ $x$ ”稱為自變數 (independent variable)，僅為一種啞文字，表示數所插入之位置。依邏輯而言，啞文字不論以何字代之均無差別。例如書為

$$f(t) = t^2 \quad (-\infty < t < \infty), \quad g(t) = \sqrt{t} \quad (t \geq 0),$$

可以定義與前述完全相同之二函數。若既經決定以  $x$  表啞文字，則稱  $f$  為  $x$  之函數。於是， $g(t) = \cos^2 t$  表  $g$  為  $t$  之函數； $h(\alpha) = \alpha^3 - 1$  表  $h$  為  $\alpha$  之函數等等。

今回至求反微分之問題，由唯一性定理，已知兩函數在一區間內若有相同之導數，則其差為一常數。例如若

$$f'(x) = x^2 \quad (-\infty < x < \infty),$$

則  $f$  必為形如

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + C$$

之一函數，其中  $C$  爲一常數。反之對每一  $C, D(x^3/3+C) = x^2$  自然成立。故知

$$\{F | F' = x^2\} = \left\{ \frac{x^3}{3} + C \right\}.$$

$F' = f$  之全部函數所成集通常以

$$\int f(x) dx$$

表之。上式稱爲  $f$  之不定積分 (indefinite integral)。例如

$$\int x^4 dx = \{F | F'(x) = x^4\} = \left\{ \frac{1}{5} x^5 + C \right\},$$

$$\int \cos x dx = \{F | F'(x) = \cos x\} = \{\sin x + C\}$$

等等。任意其他啞文字亦均可表同一事項如下：

$$\int t^4 dt = \{F | F'(t) = t^4\},$$

$$\int \cos t dt = \{F | F'(t) = \cos t\}.$$

上列每種情形，右端之大括弧表形如括弧內所予函數之全部函數所成集。符號  $dx$  (或  $dt$ ) 僅指示於敘述函數時，乃以  $x$  (或  $t$ ) 作爲啞文字。上例中，此一指示似乎並非必須。同樣，書寫

$$\int (3x^3 + 2x^4) dx = \left\{ \frac{3x^4}{4} + \frac{2x^5}{5} + C \right\}$$

時，雖無“ $dx$ ”亦可知其所指，蓋因數字常數 2 與 3 乃僅有之常數。但對

$$\int (\alpha x^3 y + \beta x^2 y^2) dx,$$

則“ $dx$ ”必不可缺；蓋此乃指示  $\alpha, \beta, y$  爲常數，而所討論之函數爲

$$f(x) = \alpha x^3 y + \beta x^2 y^2.$$

當問題之涵意如此時，其答案顯然爲

$$\int (\alpha x^3 y + \beta x^2 y^2) dx = \left\{ \frac{\alpha x^4 y}{4} + \frac{\beta x^3 y^2}{3} + C \right\}. \quad (\text{i})$$

此可與下式比較之：

$$\int (\alpha x^3 y + \beta x^2 y^2) dy = \left\{ \frac{\alpha x^3 y^2}{2} + \frac{\beta x^2 y^3}{3} + C \right\}, \quad (\text{ii})$$

$$\int (\alpha x^3 y + \beta x^2 y^2) d\alpha = \left\{ \frac{\alpha^2 x^3 y}{2} + \beta x^2 y^2 \alpha + C \right\}, \quad (\text{iii})$$

$$\int (\alpha x^3 y + \beta x^2 y^2) d\beta = \left\{ \alpha x^3 y \beta + \frac{\beta^2 x^2 y^2}{2} + C \right\}, \quad (\text{iv})$$

(i) 式中,  $\alpha, \beta, y$  爲常數, 且函數爲(i)式前所描述之  $f(x)$ . (ii) 式中,  $\alpha, \beta, x$  爲常數, 且函數爲

$$g(y) = \alpha x^3 y + \beta x^2 y^2.$$

(iii) 式中,  $x, y, \beta$  爲常數, 且函數爲

$$h(\alpha) = \alpha x^3 y + \beta x^2 y^2.$$

(iv) 式類推.

計算不定積分之程序稱爲求不定積分 (**indefinite integration**), 或簡稱之爲**積分**. 已知一微分公式, 可視需要而適當調整其常數, 將已知公式反轉方向而寫出其對應之積分公式. 下列每一情形, 右邊之公式皆可由左邊之公式導出之.

$$D x^n = n x^{n-1} \quad (n \neq 0),$$

$$D x^{n+1} = (x+1)x^n \quad (n \neq -1),$$

$$D \left( \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = x^n \quad (n \neq -1) \Rightarrow \int x^n dx = \left\{ \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \right\} \\ (n \neq -1),$$

$$D \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$D(2\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \{2\sqrt{x} + C\},$$

$$D \sin x = \cos x \Rightarrow \int \cos x dx = \{\sin x + C\},$$

$$D \cos x = -\sin x,$$

$$D(-\cos x) = \sin x \Rightarrow \int \sin x dx = \{-\cos x + C\},$$

$$D \ln x = \frac{1}{x} (x > 0) \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \{\ln x + C\} \quad (x > 0),$$

$$D e^x = e^x \Rightarrow \int e^x dx = \{e^x + C\}.$$

上述公式自僅爲一些樣本之簡表；前所已知之微分公式遠多於此，故可寫出更多之積分公式。今將此一工作延後，直至能寫出更好且更一般之式時，再列出完整之表。

已知函數  $f$ ，若  $u$  爲另一函數，則  $f(u)$  爲合成函數，以  $f$  爲外側函數而以  $u$  爲內側函數。由連鎖法則，知

$$Df(u) = f'(u)u'.$$

由此得

$$\int f'(u)u'(x) dx = \{f(u(x)) + C\}.$$

例如若

$$f(u) = \sin u, \quad u(x) = x^2 + 1,$$

則

$$\begin{aligned} D[f(u(x))] &= D[\sin(x^2 + 1)] = f'(u)u'(x) = (\cos u)2x \\ &= [\cos(x^2 + 1)]2x. \end{aligned}$$

故

$$\int [\cos(x^2 + 1)]2x dx = \{\sin(x^2 + 1) + C\}.$$

更一般，

$$D \sin u(x) = [\cos u(x)] u'(x),$$

故

$$\int [\cos u(x)] u'(x) dx = \{\sin u(x) + C\}.$$

事實上，上之公式對任意函數均成立。若已知

$$F' = f,$$

因而

$$\int f(x) dx = \{F(x) + C\},$$

則恆可更一般斷言

$$D[F(u(x))] = F'(u(x)) u'(x) = f(u(x)) u'(x),$$

因而

$$\int f(u(x)) u'(x) dx = \{F(u(x)) + C\}.$$

為簡便計，在此公式中，常將啞文字略去，而以符號  $du$  表  $u'(x) dx$  之縮寫。因此

$$\int \cos u du = \{\sin u + C\}$$

一式其意為對每一可微分之函數  $u(x)$ ，恆得

$$\int [\cos u(x)] u'(x) dx = \{\sin u(x) + C\}.$$

同樣，

$$\int e^u du = \{e^u + C\}$$

一式意為若  $u$  為任一可微分之函數，則

$$\int e^{u(x)} u'(x) dx = \{e^{u(x)} + C\}.$$

此式為真，蓋因

$$D e^{u(x)} = e^{u(x)} u'(x).$$

使用不同之啞文字，同樣可將上列積分公式改書為下列之任意形式：

$$\int e^{u(\theta)} u'(\theta) d\theta, \quad \text{或} \quad \int e^{u(t)} u'(t) dt,$$

等等。但當用一甚長之記號開始描述積分時，常可發現其可用簡式改述之，例如

$$\int e^{x^2+1} 2x dx$$

可改為

$$\int e^{u(x)} u'(x) dx,$$

其中  $u(x) = x^2 + 1$ 。故

$$\int e^{x^2+1} 2x dx = \int e^u du = \{e^u + C\} = \{e^{x^2+1} + C\}.$$

同樣， $\int [\sin(t^2+1)] 2t dt$  實為形如  $\int \sin u du$  之式。因而

$$\int [\sin(t^2+1)] 2t dt = \int \sin u du = \{-\cos u + C\} = \{-\cos(t^2+1) + C\}.$$

注意上述第三式並未完全解出，蓋因  $u$  為一函數。欲完成其解，須將函數  $u$  用啞文字  $t$  表之。

總括之：

$$F' = f \Rightarrow D[F(u)] = f(u) u',$$

故

$$\int f(x) dx = \{F(x) + C\} \Rightarrow \int f(u(x)) u'(x) dx = \{F(u) + C\}.$$

用縮寫式，以  $du$  表  $u'(x) dx$ ，得

$$\int f(x) dx = \{F(x) + C\} \Rightarrow \int f(u) du = \{F(u) + C\}.$$

依此一般觀念，可將以前之積分公式表為更一般化之式。例如最初幾個乃為

$$\int u^n du = \left\{ \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \right\}, \quad \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = \{2\sqrt{u} + C\},$$

$$\int \cos u du = \{\sin u + C\}, \quad \int \sin u du = \{-\cos u + C\},$$

$$\int \frac{1}{u} du = \{\ln u + C\} \quad (u > 0), \quad \int e^u du = \{e^u + C\}.$$

並可得

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx,$$

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx, \quad k \neq 0,$$

蓋因

$$D[f+g] = Df + Dg \quad \text{且} \quad D(kf) = kDf.$$

今討論如何於實際問題中應用此種公式。

**例題 1.** 討論

$$\int (x^2+1)^7 x dx.$$

此式雖非完全,但大約形如

$$\int u^7 du.$$

若令  $u(x) = x^2+1$ , 則

$$du = u'(x) dx = 2x dx,$$

故得

$$\int (x^2+1)^7 x dx = \int \frac{1}{2} (x^2+1)^7 2x dx = \int \frac{1}{2} u^7 du$$

$$= \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} u^8 + C \right\} = \left\{ \frac{1}{16} (x^2+1)^8 + C \right\}.$$

核對之：

$$D \left[ \frac{1}{16} (x^2 + 1)^8 \right] = \frac{1}{16} \cdot 8 (x^2 + 1)^7 \cdot 2x = (x^2 + 1)^7 x.$$

例題 2. 討論

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (x > 0).$$

前所知而可能適合上式之式僅為  $\int \cos u \, du$ . 若如此, 則可得

$$u(x) = \sqrt{x}, \quad du = u'(x) dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx.$$

由此所得之式與所欲得之式間僅有之差異為乘法常數, 因此知可書為

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx &= \int (\cos \sqrt{x}) \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \int (\cos \sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\ &= 2 \int \cos u \, du = \{2 \sin u + C\} = \{2 \sin \sqrt{x} + C\}. \end{aligned}$$

例題 3. 討論

$$\int e^{\cos x} \sin x \, dx.$$

目前僅有一積分公式含有指數函數：

$$\int e^u \, du = \{e^u + C\}.$$

若問題適合此式, 則必得

$$u(x) = \cos x, \quad du = u'(x) dx = -\sin x \, dx.$$

在此乘法常數不致引起困難：

$$\begin{aligned} \int e^{\cos x} \sin x \, dx &= \int -e^{\cos x} (-\sin x) dx = \int -e^u \, du \\ &= \{-e^u + C\} = \{-e^{\cos x} + C\}. \end{aligned}$$



下面將基於前所已知之微分公式列出目前所能寫出之積分公式。但對  $\int (1/u) du$  之公式特別加以完整之解說。已予一函數  $u$ ，定義於對每一  $x$  均有  $u(x) > 0$  之一定義域。因此

$$D \ln u(x) = \frac{1}{u(x)} Du(x).$$

因僅正數具有對數，故在所論之定義域中必須有  $u(x) > 0$ 。由此可寫為

$$\int \frac{1}{u} du = \{\ln u + C\} \quad (u > 0).$$

而另一方面，即使在定義域中  $u(x) < 0$ ，下式亦完全有意義：

$$\int \frac{1}{u} du.$$

此即求具有導數  $(1/u)u'$  之函數  $f$  為有意義。其答案不難求出：若  $u(x) < 0$ ，則  $-u(x) > 0$ 。故  $-u(x)$  具有對數；且

$$\begin{aligned} D[\ln(-u(x))] &= \frac{1}{-u(x)} D[-u(x)] = \frac{1}{-u(x)} (-u'(x)) \\ &= \frac{1}{u(x)} u'(x). \end{aligned}$$

依此得

$$\int \frac{1}{u} du = \{\ln(-u) + C\} \quad (u < 0);$$

故得載於下表中之  $\int (1/u) du$  之兩公式。

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k \neq 0) \quad (1)$$

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \quad (2)$$