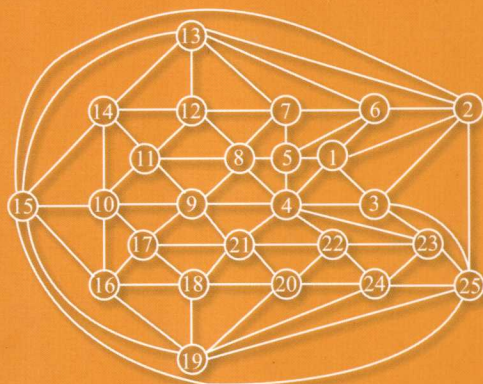
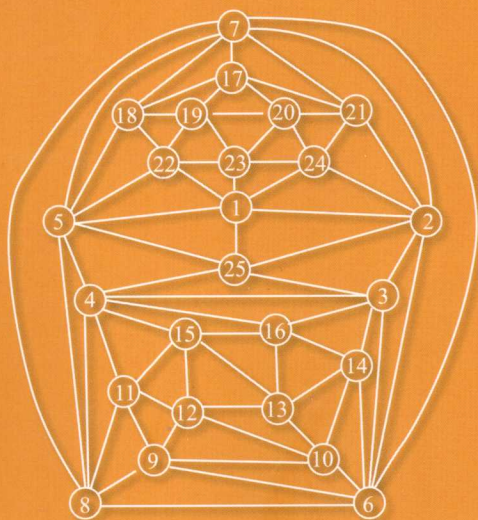
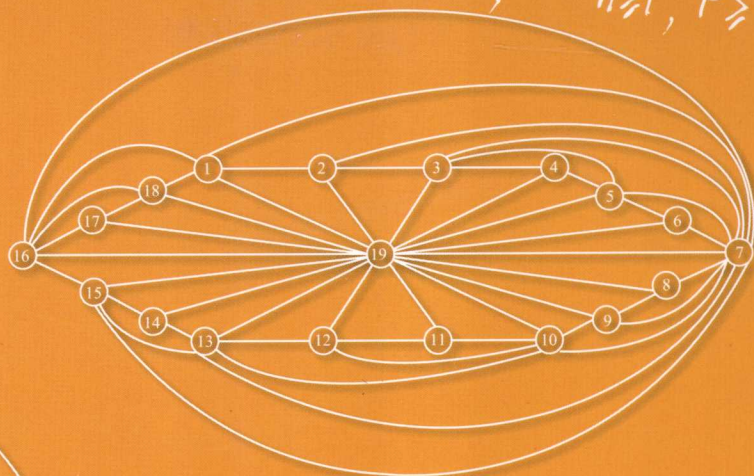
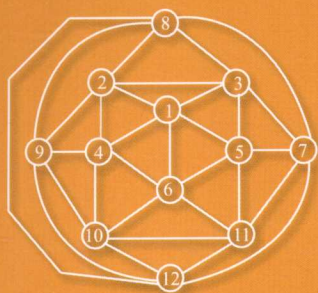


$$e = n + r - 2, \quad n \geq 1, r \geq 1$$



平面图的结构与着色

The Structure and Coloring of Planar Graph

冯纪先 著

FENG Ji-xian

學苑出版社

平面图的结构与着色

冯纪先 著

学苑出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

平面图的结构与着色/冯纪先著. —北京:学苑出版社, 2012. 10

ISBN 978-7-5077-4134-6

I. ①平… II. ①冯… III. ①平面图-研究 IV. ①0157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 258323 号

责任编辑: 郑泽英

封面设计: 刘雪娇

出版发行: 学苑出版社

社 址: 北京市丰台区南方庄2号院1号楼

邮政编码: 100079

网 址: www. book001. com

电子邮箱: xueyuan@public. bta. net. cn

销售电话: 010-67675512、67678944、67601101 (邮购)

经 销: 全国新华书店

印 刷 厂: 北京长阳汇文印刷厂

开本尺寸: 787mm × 1092mm 1/16

印 张: 17.25

字 数: 260千字

版 次: 2012年12月北京第1版

印 次: 2012年12月北京第1次印刷

定 价: 42.00元

CONTENTS 目录

平面图的结构与着色

I 结 构 (Structure)

1.01	正则最大平面图 (On regular maximal plane graphs)	3
1.02	简单完整正则平面图 (On simple completely regular plane graphs)	9
1.03	最大外平面图和最大平面图的几个性质 (A few properties of maximal outerplane graph and maximal plane graph)	15
1.04	最大平面图的度 (Degree of maximal plane graph)	21
1.05	最大平面图的最小度点和最大度点 (The minimal degree point and the maximal degree point of maximal plane graph)	27
1.06	最大外平面图 G_{M0} 的度 (On degree of maximal outerplane graph)	32
1.07	3 长 6 度 ∞ 阶完整正则平面图 (On the 3 length - 6 degree - ∞ order completely regular plane graph)	39
1.08	标定的最大平面图 G_M 拓扑结构的形成 (The construction on topologic structure of labeled maximal planar graph)	44
1.09	标定的最大外平面图 G_{M0} 的数目 (The number of labeled maximal outerplanar graphs G_{M0})	52
1.10	图论中图的点数、区数和边数 (Vertex number, region number and edge number of graph in graph theory)	57
1.11	极限构造几何对偶图的想法 (The idea on construction with limit for geometric dual)	64

II 着色 (Coloring)

2.01	最大平面图着色的“移3度点法”(The “method of removal 3 degree point ” for Four – coloring in maximal planar graph)	71
2.02	最大平面图着色的“移4度点法”(The “method of removal 4 degree point” for Four – coloring in maximal planar graph)	77
2.03	最大平面图着色的“ C_3 分隔法”(The “method of separation by C_3 ” for Four – coloring in maximal planar graph)	83
2.04	最大平面图 G_M 的二色子图和二色交换(Two – color subgraph and Two – color interchange in maximal planar graph G_M)	89
2.05	“一个12阶最大平面图” G_{M12} 的四色着色(On Four – coloring of “a maximal planar graph of 12 order” G_{M12})	100
2.06	“一个25阶最大平面图” G_{M25} 的四色着色(On Four – coloring of “a maximal planar graph of 25 order” G_{M25})	105
2.07	四色着色的“简化降阶法”(The “simplified method of reduction of order” for Four – coloring)	112
2.08	“一个25阶最大平面图” G_{M25} 的“相近四色着色方案集乙”(The “near Four – coloring set Yi” of “a maximal planar graph of 25 order” G_{M25})	120
2.09	“多层次二色交换法”与“相近四色着色方案集”(The “method of multilayer Two – color interchange” and “near Four – coloring set”)	127
2.10	最大平面图 G_M 的孪生图 G_M^T 和对角线变换 DT(The twin graph G_M^T of maximal plane graph G_M and diagonal transformation DT)	141
2.11	“另一个25阶最大平面图” G'_{M25} 的四色着色(On Four – coloring of “another maximal planar graph of 25 order” G'_{M25})	151
2.12	“Heawood 反例 HCE” $G_{M25, HCE}$ 的四色着色(On Four – coloring of “Heawood’s Counter – Example, HCE” $G_{M25, HCE}$)	165

2.13	“一个 24 阶平面图” G_{24} 的“相近四色着色方案集 A”(The “near Four – coloring set A” of “a planar graph of 24 order” G_{24})	171
2.14	“Heawood 反例” $G_{M25, HCE}$ 的一些四色着色方案(Some Four – colorings of “Heawood’s Counter – Example” $G_{M25, HCE}$)	182
2.15	“一个 25 阶平面图” G_{25} 的四色着色(On Four – coloring of “a planar graph of 25 order” G_{25})	189
2.16	平面图着色的“移边法”(The “method of removal edge” for Four – coloring in planar graph)	203
2.17	“另一个 24 阶平面图” G'_{24} 的四色着色(On Four – coloring of “another planar graph of 24 order” G'_{24})	211
2.18	平面图着色的“移 5 度点法”(The “method of removal 5 degree point” for Four – coloring in planar graph)	221
2.19	“Hamilton 绕行世界之对偶图” $G_{M12, ico}$ 的相近四色着色方案集(The near Four – coloring sets of “Dual Graph of Hamilton’s Rounding the World” $G_{M12, ico}$)	230
2.20	“Appel 与 Haken 之例” $G_{M25, AHE}$ 的相近四色着色方案集(The near Four – coloring sets of “Appel and Haken’s Example” $G_{M25, AHE}$)	236
2.21	“Heawood 反例” $G_{M25, HCE}$ 的相近四色着色方案集(The near Four – coloring sets of “Heawood’s Counter – Example” $G_{M25, HCE}$)	247
2.22	平面图四色着色的“降阶法”和“降度法”(On Four – coloring of planar graph——“method of reduction of order” and “method of reduction of degree”)	258
后记	(Postscript)	268



I 结构

Structure

1.01 正则最大平面图

【摘要】对正则的最大平面图的结构和特性作了分析和讨论,对求解正则最大平面图的着色问题构思了几种方法,并给出了一些着色方案,求出了色数。

【关键词】最大平面图;正则图;图着色;色数

On regular maximal plane graphs

Abstract: This paper analyses and explores constructions and properties of regular maximal plane graphs. All regular maximal plane graphs are given. And chromatic number and a kind of coloring of these graphs are solved.

Keywords: maximal plane graph; regular graph; coloring of graph; chromatic number

1 引言

图论的有关文献中,对平面图的性质都有较详细的论述,但对平面图的一种特例——最大平面图,研究较少,对它的某些特殊的性质,未作透彻的研究,有些性质,还有待探索。本文对最大平面图的某些性质作了一些初步探讨,主要是研究正则最大平面图。

2 定义和定理^[1-4](证明从略)

定义 1 设图 G 为平面图,若对它不能再加入边,而不失去平面性,则称图 G 为最大平面图(maximal planar graph)。

定义 2 若图 G 的所有点 v_i 的度 $d(v_i) = m$ 均相同,则称图 G 为 m 度正则图(regular graph)。

定义 3 若图 G 有 n 个点(n 阶),而任意两个点之间均有一条边,则称图 G 为 n 阶完全图(complete graph),并记作 K_n 。

定理 1 设图 G 为最大平面图,点数(阶数)为 n ,边数为 e ,则

$$e = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ 1, & n = 2 \\ 3n - 6, & n \geq 3 \end{cases} \quad (1)$$

定理 2 设图 G 为最大平面图,点数(阶数)为 n ,度数为 d ,则

$$d = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ 2, & n = 2 \\ 6n - 12, & n \geq 3 \end{cases} \quad (2)$$

定理 3 设图 G 为最大平面图,点数(阶数)为 n ,区数为 r ,则

$$r = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 1, & n=2 \\ 2n-4, & n \geq 3 \end{cases} \quad (3)$$

定理4 当 $n \geq 3$ 时,若图 G 是一个最大平面图,则图 G 中的每一个区均为一个三角形 K_3 。逆定理亦成立。

定理5 若 m 度正则图的点数(阶数)为 n ,则其边数 e 为

$$e = \frac{1}{2}mn, \quad m \geq 0, n \geq 1 \quad (4)$$

定理6 n 阶完全图 K_n 的边数 e 为

$$e = \frac{1}{2}n(n-1), \quad n \geq 1 \quad (5)$$

可见, n 阶完全图 K_n 实为 $(n-1)$ 度正则图。

3 正则最大平面图的数目和性质

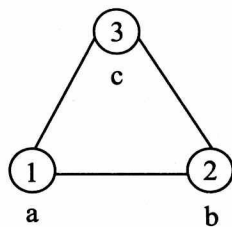
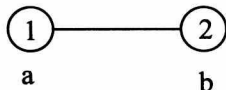
若要得到可能存在的正则最大平面图(即具有正则性的最大平面图)的数目,那就要求出各种度数的正则最大平面图的点数(阶数)。为此,只需给定正则度数 m ,将(1)式和(4)式联立求解,即可得其相应的点数(阶数) n 。再应用(1)式、(2)式和(3)式,就可得其相应的边数 e 、度数 d 和区数 r 。结果如下:

- | | |
|---|---|
| 1) 当 $m=0$, 则 $e=0$, | 得 $n=1, e=0, d=0, r=1$ 。 |
| 2) 当 $m=1$, 则 $e=\frac{1}{2}n=1$, | 得 $n=2, e=1, d=2, r=1$ 。 |
| 3) 当 $m=2$, 则 $e=n=3n-6$, | 得 $n=3, e=3, d=6, r=2n-4=2$ 。 |
| 4) 当 $m=3$, 则 $e=\frac{3}{2}n=3n-6$, | 得 $n=4, e=6, d=12, r=2n-4=4$ 。 |
| 5) 当 $m=4$, 则 $e=2n=3n-6$, | 得 $n=6, e=12, d=24, r=2n-4=8$ 。 |
| 6) 当 $m=5$, 则 $e=\frac{5}{2}n=3n-6$, | 得 $n=12, e=30, d=60, r=2n-4=20$ 。 |
| 7) 当 $m=6$, 则 $e=3n=3n-6$, | 得 $n=\infty, e=\infty, d=\infty, r=2n-4=\infty$ 。 |
| 8) 当 $m \geq 7$, 则 $e=mn/2=3n-6$, 无解($\because$ 从拓扑结构看, n 必须为自然数)。 | |

由上可见,广义地说,正则最大平面图有七种,即0度正则最大平面图、1度正则最大平面图、...、6度正则最大平面图。不存在7度或大于7度的正则最大平面图。

图1中画出了七种正则最大平面图的拓扑结构,对各个点给以标号,使成标定图。点以小圆圈表示,圈内数字为标号。对第七种正则最大平面图,只画出了部分点、部分边,有的点未给以标号。又,各图都画成规范化的形式,整齐、好看。由于 m 度正则最大平面图的各点的度相同,均为 m ,因此从拓扑结构上看,各点是对等的,图形是对称的,这从规范化的图形上很容易看出。

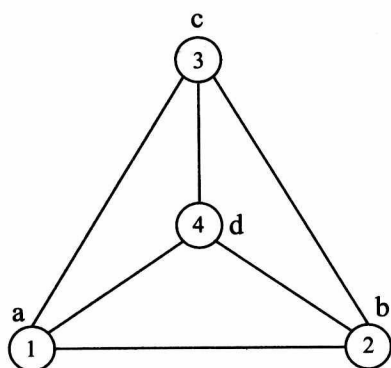
若采用“测地投影法”,每一种正则最大平面图都可画在一个球面上,球的半径可任意大小。平面图中的一个三角形区都相应地成为球面上的一个三角形区。但对6度正则最大平面图而言,球的半径应是无穷长的,即球体应是无穷大的,那么球面已成为无穷大的平面。



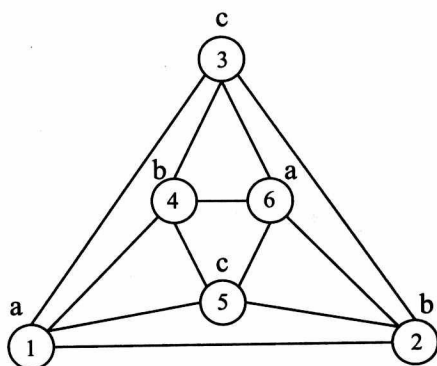
(1) $m=0, n=1,$
 $e=0, d=0, r=1。$

(2) $m=1, n=2,$
 $e=1, d=2, r=1。$

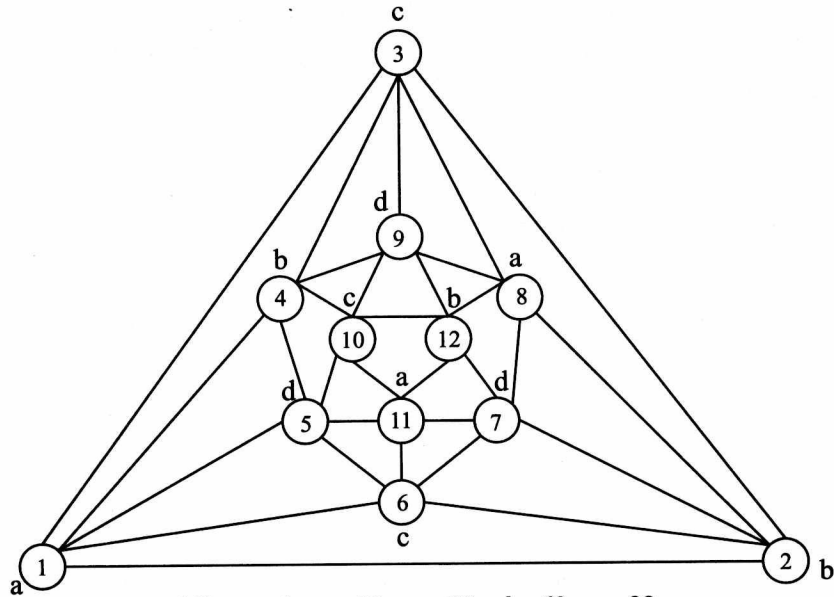
(3) $m=2, n=3,$
 $e=3, d=6, r=2。$



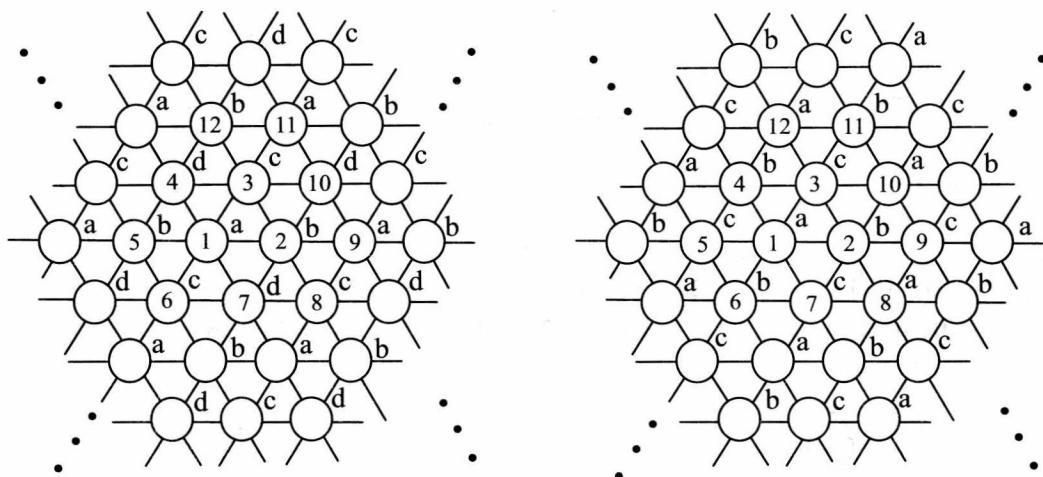
(4) $m=3, n=4, e=6, d=12, r=4。$



(5) $m=4, n=6, e=12, d=24, r=8。$



(6) $m=5, n=12, e=30, d=60, r=20。$



(7) $m=6, n=\infty, e=\infty, d=\infty, r=\infty$. (8) $m=6, n=\infty, e=\infty, d=\infty, r=\infty$.

图1 正则最大平面图

4 最大平面图中的完全图

若将(1)式和(5)式联立,得

$$3n-6 = \frac{1}{2}n(n-1), \quad n \geq 3$$

即
$$n^2 - 7n + 12 = 0, \quad n \geq 3 \quad (6)$$

(6)式表示,既为最大平面图且为完全图的图 G 的阶数 n 应满足的条件。

解(6)式,得 $n=3, 4$ 。故知3阶和4阶的最大平面图为完全图,即相应的为 K_3 和 K_4 。同时,又可看到,这也就是相应的2度和3度正则最大平面图。考虑到 $n=1$ 和 $n=2$ 的情况,广义地说,最大平面图中,只有四种完全图,即1阶、2阶、3阶、4阶最大平面图,也就是0度、1度、2度、3度正则最大平面图。

5 正则最大平面图的色数和着色

1840年德国数学家 A. F. Möbius 提出了“四色猜想”,1976年美国数学家 K. Appel 和 W. Haken 等证明了“四色定理”,即任何平面图都是4可着色的。由此可知,最大平面图以及正则最大平面图的色数 χ 不会超过4。

设 a, b, c, d 分别表示红、黄、蓝、绿四种颜色。极易看到, $n=1, n=2$ 和 $n=3$ 的三种正则最大平面图,其色数 χ 分别为1、2和3。现分别以 a, a, b 和 a, b, c 对其着色,结果如图1(1)、(2)、(3)所示,表示颜色的字母标在点的旁边。这样的方法,不妨叫“观察法”。显然,此法对极简单的情况才会奏效。

对 $n=4$ 的正则最大平面图,也极易看出色数 $\chi=4$ 。从另一角度看, V_4 点是3度的,与 V_1, V_2, V_3 三点邻接,而 V_1, V_2, V_3 三点在最大平面图中必是组成一个三角形的。我们可设想将3度的 V_4 点去掉,这并不影响 V_1, V_2, V_3 三点原来的相互邻接关系,但却将图由4阶降为3阶。三角形的三个点应分别着不同的三色,即 a, b, c ,显然 V_4 就应着第4色即 d 色,如图1(4)所示。这个方法可叫“降阶法”。对具有许多3度点的图 G ,降阶的作用就较大。尤其是,降阶后若又有了新的3度点,又可去掉,继续降阶。像这样多层次的降阶,降阶的作用就更大了^{[5][6]}。

对4度6阶的正则最大平面图,显然首先可确定三角形的三点 V_1, V_2, V_3 分别着 a, b, c 三

色。继之可看到与 V_4 邻接的点中有 V_1 、 V_3 两点,故 V_4 只能着 a、c 以外的其他颜色,意即在考虑 V_4 的着色时筛掉 a、c 二色,选着 b 色。同理,可对 V_5 和 V_6 分别选着 c 色和 a 色,得一着色方案如图 1(5)所示。这样的方法,不妨叫“筛选法”。通过“筛选法”得知 4 度 6 阶正则最大平面图的色数 χ 为 3。显然“筛选法”是有一定的局限性的,如同“观察法”和“降阶法”一样,不可能解决着色的全部问题。

对 5 度 12 阶的正则最大平面图,首先仍可确定三角形的三个点 V_1 、 V_2 、 V_3 分别着 a、b、c 三色,由对等性立即可知,三角形 $V_{10}V_{11}V_{12}$ 的三点应用 a、b、c 三色来着。继之,从图上可看到 V_4 周围的圈 $V_1V_5V_{10}V_9V_3V_1$ 是五点的奇圈,奇圈的着色需 3 色,由此可见 5 度正则最大平面图的色数 χ 将大于 3。同时考虑到正则最大平面图的对等性和对称性,故将 V_5 、 V_7 、 V_9 均着 d 色,再考虑到奇圈的着色, V_{10} 着 c 色, V_4 着 b 色。同理,可得到其他点的着色。由此可见 5 度正则最大平面图的色数 χ 为 4,着色方案如图 1(6)所示。这儿,在着色中,分析了图的拓扑结构的特点,因而这样的方法似可称“分析法”。前面 4 度正则最大平面图结构中,一个点周围的圈是偶圈,偶圈可以二色着之,因而使 4 度正则最大平面图的色数 χ 可以为 3。

最后,对 6 度 ∞ 阶正则最大平面图,同样地,三角形的三个点必然分别着不同的三色,因而图 1(7)中 V_1 、 V_2 、 V_3 三点分别着 a、b、c 三色。从图的结构看,边形成了三种斜度的无穷长平行线,可考虑采用所谓“隔离法”来着色,即每条线上仅用二色,相邻的平行线上则用另二色,这就保证了着色的基本要求——相邻点着异色。考虑到图结构的对等性,故对 V_4 、 V_7 、 V_{10} 均着 d 色,由此得到整个图的着色方案,如图 1(7)所示。

然而,若从另一角度看 6 度 ∞ 阶正则最大平面图的着色,当 V_1 、 V_2 、 V_3 三点分别给予 a、b、c 三色后,以“对每一个菱形的对顶点着同色”这一原则,逐步对所有点由近及远一一着色,就可得如图 1(8)所示的着色方案,可见 6 度 ∞ 阶正则最大平面图的色数 χ 为 3。实际上,从该图中可看出,每一个点周围均为 6 点的偶圈,偶圈可以二色着之,因而其色数 χ 可以为 3。此外,基于图是 ∞ 阶的(这是一个根本的关键原因),图 1(8)的着色也可这样来看,无穷长的直线上的各点以 a、b、c 的顺序着色,相邻的平行线上的各点也以 a、b、c 的顺序着色。但需错位,以满足着色的基本要求——相邻点着异色,即得所示着色方案。这样的方法,似可称为“错位法”。

以上用色数 χ 对每一种正则最大平面图给出了一种着色方案,显然对同一正则最大平面图,可能存在着不止一种着色方案。

6 结语

综合前面所得结果,以表 1 表示如下。

表 1 正则最大平面图的特性

正则度数 m	点(阶)数 n	边数 e	度数 d	区数 r	完全图 K_n	色数 χ
0	1	0	0	1	是(K_1)	1
1	2	1	2	1	是(K_2)	2
2	3	3	6	2	是(K_3)	3
3	4	6	12	4	是(K_4)	4
4	6	12	24	8	非	3
5	12	30	60	20	非	4
6	∞	∞	∞	∞	非	3

这儿有一个有趣的现象,所有可能的有限阶正则最大平面图的点数 n , 包括了所有“12”的因数。

本文对正则最大平面图的性质作了一定的分析,得到了初步的基本结果,给出了各种正则最大平面图的规范化表达。在求得各种正则最大平面图的色数后,进行了着色,应用了“观察法”、“降阶法”、“筛选法”、“分析法”、“隔离法”、“错位法”等。这些方法,对某些问题提供了解决的思路,但各有一定的局限性。着色问题有待进一步的深入研究。

新浪网“别客的博客”<http://blog.sina.com.cn/buickidea> 中有其他有关论文,敬请批评、指正。

参考文献

- [1] E. 哈拉里著. 图论[M]. 李慰萱, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 1980: 119 - 134.
- [2] 陈树柏, 左垠, 张良震. 网络图论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1982.
- [3] 舒贤林, 徐志才. 图论基础及应用[M]. 北京: 北京邮电学院出版社, 1988.
- [4] 戴一奇, 胡冠章, 陈卫. 图论与代数结构[M]. 北京: 清华大学出版社, 1995.
- [5] 冯纪先. 最大平面图着色的“移3度点法”[C]//第十五届电路与系统年会论文集. 广州: 华南理工大学, 1999: 254 - 258. (见目录: 2.01)
- [6] 冯纪先. 最大平面图着色的“移4度点法”[C]//第十五届电路与系统年会论文集. 广州: 华南理工大学, 1999: 259 - 263. (见目录: 2.02)

1.02 简单完整正则平面图

【摘要】对简单完整正则平面图的结构和特性进行了分析和讨论,找出了简单完整正则平面图的可能的种类。此外,对各种简单完整正则平面图的色数进行了求解,并用不同的方法给出了各个简单完整正则平面图的着色方案。

【关键词】简单图;正则最大平面图;完整正则平面图;色数;图着色

On simple completely regular plane graphs

Abstract: This paper analyses and explores constructions and properties of simple completely regular plane graphs. All simple completely regular plane graphs are given. And chromatic number and a kind of coloring of these graphs are solved.

Keywords: simple graph; regular maximal plane graph; completely regular plane graph; chromatic number; coloring

1 引言

文献[1]中对正则最大平面图的结构和特性作了分析和讨论,得到可能的各种正则最大平面图,并求出了它们的色数,给出了它们的着色方案。正则最大平面图是一种简单完整正则平面图。本文研究了简单完整正则平面图的结构和特性,它们的色数及着色方案。所以,本文的内容包含了文献[1]中的部分内容。

2 定义和定理^[1,2] (证明从略)

定义1 设图 G 无自环,也无并边,则称图 G 为简单图(Simple graph)。

定义2 设图 G 为连通平面图,其所有区的周界的长度即周界的边数 l 均相同,且所有点的度数 m 也均相同,则称图 G 为 l 长 m 度完整正则平面图(completely regular plane graph)。

既为简单图又为完整正则平面图的图 G 应称为简单完整正则平面图。为了方便,往往将“简单完整正则平面图”称为“完整正则平面图”。

图 G 所有区的周长均相同时,每个点的度数不一定相同。如图1所示,图 G 所有区的周长为3,但图 G 中既有3度点,又有4度点。图1实为一最大平面图。

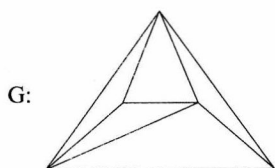


图1 5阶最大平面图

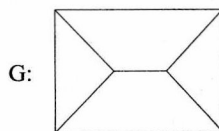


图2 6阶非最大平面图

图 G 所有点的度数均相同时,每个区的周长不一定相同。如图 2 所示,图 G 所有点的度数为 3,但图 G 中既有周长为 3 的区,也有周长为 4 的区。图 2 不是最大平面图。

定理 1 设图 G 为连通平面图,点数(阶数)为 n ,区数为 r ,边数为 e ,则

$$e = n + r - 2, \quad n \geq 1, r \geq 1 \quad (1)$$

定理 1 即为 Euler 定理。由(1)式可见, $e \geq 0$ 。由于图 G 是连通的,故 $e \geq n - 1$ 。当图 G 是树 T 时, $r = 1, e = n - 1$ 。(1)式理解成图 G 的边数 e 取决于图 G 的点数 n 和区数 r 。

定理 2 设图 G 为连通平面图,若其所有区的周界的长度即周界的边数 l 均相同,则

$$e = \frac{1}{2} \cdot l \cdot r, \quad l \geq 3, r \geq 2 \quad (2)$$

由(2)式可见, $e \geq 3$,并可看到, $n \geq 1$ 。又因 e 为整数,故 l, r 二者之中,至少有一个为偶数。若考虑到(1)式,且将(1)、(2)两式联立,消去 r ,得下述定理 3。

定理 3 设图 G 为连通平面图,若其所有区的周界的长度即周界的边数 l 均相同,则

$$e = \frac{l(n-2)}{l-2}, \quad l \geq 3, n \geq l \geq 3 \quad (3)$$

(3)式理解成图 G 的边数 e 取决于图 G 的点数 n 和区的周长 l 。由(3)式可见, $e \geq 3$ 。(3)式中 l 和 n 的取值范围,是由(1)、(2)式中 l 和 n 的取值范围所决定。

定理 4 设图 G 为连通平面图,若其所有区的周界的长度即周界的边数 l 均相同,则

$$r = 2e/l, \quad l \geq 3, e \geq 3 \quad (4)$$

$$\text{及} \quad r = 2(n-2)/(l-2), \quad l \geq 3, n \geq l \geq 3 \quad (5)$$

(5)式的获得也可视为(2)式与(1)式联立,消去 e 而得。

定理 5 若 m 度正则平面图的点数(阶数)为 n ,边数为 e ,则

$$e = 1/2 \cdot mn, \quad m \geq 0, n \geq 1 \quad (6)$$

由(6)式可见, $e \geq 0$ 。又因 e 为整数,故 m, n 二者之中,至少有一个为偶数。

上面所列出的六个式子中,涉及 5 个参量,即 e, n, r, l, m 。对完整正则平面图而言,实际上,它只是要满足六个式子中彼此独立的三个式子,即(1)式、(2)式和(6)式,其余三式(3)、(4)和(5)是导出的。因而,为了解出 e, n 和 r 三个参量的值,必须先设定余下的两个参量 m, l 的值。下面就讨论这个问题并给出求解的结果。

3 完整正则平面图的种类和性质

完整正则平面图中,各点的度数 m 是相同的,故必须满足(6)式,各区的周长 l 也是相同的,故又须满足(2)式,或(3)式。现将(6)式和(3)式联立,消去边数 e ,得

$$n = \frac{4l}{2l - ml + 2m}, \quad l \geq 3, m \geq 0, n \geq l \geq 3 \quad (7)$$

(7)式中,由于限定了 $l \geq 3, n \geq 3$,这就导致 $m \geq 2$ 才有意义。由(7)式可见,给定 l, m 的值,就可利用(7)式解出图 G 的点数(阶数) n ,再利用(3)式或(6)式可求出边数 e ,利用(4)式或(5)式求得区数 r 及其他特性。

我们先给定 l 值,然后再给以不同的 m 值,所得结果如下。

$$1) l = 3, \text{则由(7)式得 } n = \frac{12}{6 - m}. \text{故得 } m = 2, n = 3, e = 3, r = 2$$

$$m=3, n=4, e=6, r=4$$

$$m=4, n=6, e=12, r=8$$

$$m=5, n=12, e=30, r=20$$

$$m=6, n=\infty, e=\infty, r=\infty$$

$$m \geq 7, \text{无解}$$

$l=3$, 意即每个区均为三角形 K_3 , 当 $n \geq 3$ 时, 图 G 就是最大平面图, 所以这儿所得的结果与文献[1]中所得的结果是一致的。

$$2) l=4, \text{则由(7)式得 } n = \frac{16}{8-2m}. \text{故得 } m=2, n=4, e=4, r=2$$

$$m=3, n=8, e=12, r=6$$

$$m=4, n=\infty, e=\infty, r=\infty$$

$$m \geq 5, \text{无解}$$

$$3) l=5, \text{则由(7)式得 } n = \frac{20}{10-3m}. \text{故得 } m=2, n=5, e=5, r=2$$

$$m=3, n=20, e=30, r=12$$

$$m \geq 4, \text{无解}$$

$$4) l=6, \text{则由(7)式得 } n = \frac{24}{12-4m}. \text{故得 } m=2, n=6, e=6, r=2$$

$$m=3, n=\infty, e=\infty, r=\infty$$

$$m \geq 4, \text{无解}$$

$$5) l=7, \text{则由(7)式得 } n = \frac{28}{14-5m}. \text{故得 } m=2, n=7, e=7, r=2$$

$$m \geq 3, \text{无解}$$

$$6) l > 7, \text{设 } l=8, \text{则由(7)式得 } n = \frac{32}{16-6m}. \text{可得 } m=2, n=1, e=1, r=2$$

$$m \geq 3, \text{无解。}$$

可见 $l \geq 7$ 的任何值时, 有相同的结果。

另一方面, 如果我们先给定 m 值, 再给以不同的 l 值, 情况将如下所述。

1) 当 $m=2$, 则由(7)式得 $n=1$, 由(3)式或(6)式得 $e=1$, 由(4)式或(5)式得 $r=2$ 。

这说明, $m=2$ 时, 完整正则平面图实为圈 C_n 。又看到, 当 $m=2$ 时, $l \geq 3$ 的任何值均可。

2) 当 $m=3$, 则由(7)式得 $n = \frac{4l}{6-l}$, 此时 $l \leq 6$, 即 $l=3, 4, 5, 6$ 。

3) 当 $m=4$, 则由(7)式得 $n = \frac{4l}{8-2l}$, 此时 $l \leq [8/2] = 4$, 即 $l=3, 4$ 。

4) 当 $m=5$, 则由(7)式得 $n = \frac{4l}{10-3l}$, 此时 $l \leq [10/3] = 3$, 即 $l=3$ 。

5) 当 $m=6$, 则由(7)式得 $n = \frac{4l}{12-4l}$, 此时 $l \leq [12/4] = 3$, 即 $l=3$ 。