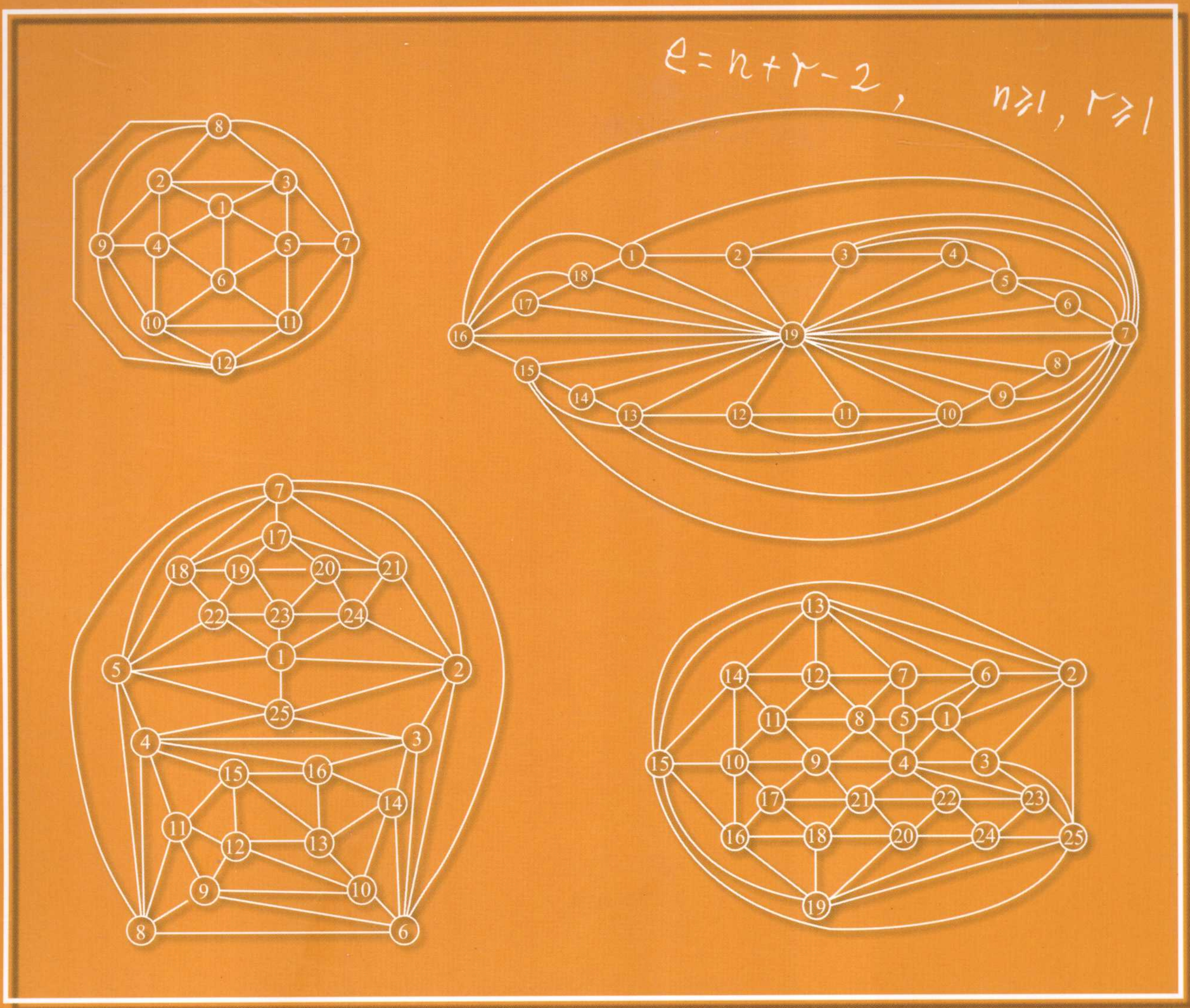


平面图的结构与着色

The Structure and Coloring of Planar Graph

冯纪先 著
FENG Ji-xian

學苑出版社

平面图的结构与着色

冯纪先 著

學苑出版社

图书在版编目（CIP）数据

平面图的结构与着色/冯纪先著．—北京：学苑出版社，2012.10

ISBN 978－7－5077－4134－6

Ⅰ．①平…　Ⅱ．①冯…　Ⅲ．①平面图－研究　Ⅳ．①O157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 258323 号

责任编辑：郑泽英

封面设计：刘雪娇

出版发行：学苑出版社

社　　址：北京市丰台区南方庄 2 号院 1 号楼

邮政编码：100079

网　　址：www.book001.com

电子邮箱：xueyuan@public.bta.net.cn

销售电话：010－67675512、67678944、67601101（邮购）

经　　销：全国新华书店

印 刷 厂：北京长阳汇文印刷厂

开本尺寸：787mm×1092mm　1/16

印　　张：17.25

字　　数：260 千字

版　　次：2012 年 12 月北京第 1 版

印　　次：2012 年 12 月北京第 1 次印刷

定　　价：42.00 元

CONTENTS 目录

平面图的结构与着色

I 结 构(Structure)

Ⅱ 着 色(Coloring)

I 结构

Structure

1.01　正则最大平面图

【摘要】对正则的最大平面图的结构和特性作了分析和讨论，对求解正则最大平面图的着色问题构思了几种方法，并给出了一些着色方案，求出了色数。

【关键词】最大平面图；正则图；图着色；色数

On regular maximal plane graphs

Abstract: This paper analyses and explores constructions and properties of regular maximal plane graphs. All regular maximal plane graphs are given. And chromatic number and a kind of coloring of these graphs are solved.

Keywords: maximal plane graph; regular graph; coloring of graph; chromatic number

1　引言

图论的有关文献中，对平面图的性质都有较详细的论述，但对平面图的一种特例——最大平面图，研究较少，对它的某些特殊的性质，未作透彻的研究，有些性质，还有待探索。本文对最大平面图的某些性质作了一些初步探讨，主要是研究正则最大平面图。

2　定义和定理[1-4]（证明从略）

定义 1　设图 G 为平面图，若对它不能再加入边，而不失去平面性，则称图 G 为最大平面图（maximal planar graph）。

定义 2　若图 G 的所有点 v_i 的度 $d(v_i)=m$ 均相同，则称图 G 为 m 度正则图（regular graph）。

定义 3　若图 G 有 n 个点（n 阶），而任意两个点之间均有一条边，则称图 G 为 n 阶完全图（complete graph），并记作 K_n。

定理 1　设图 G 为最大平面图，点数（阶数）为 n，边数为 e，则

$$e=\begin{cases}0, & n=1\\ 1, & n=2\\ 3n-6, & n\geqslant 3\end{cases} \tag{1}$$

定理 2　设图 G 为最大平面图，点数（阶数）为 n，度数为 d，则

$$d=\begin{cases}0, & n=1\\ 2, & n=2\\ 6n-12, & n\geqslant 3\end{cases} \tag{2}$$

定理 3　设图 G 为最大平面图，点数（阶数）为 n，区数为 r，则

$$r=\begin{cases}1, & n=1\\ 1, & n=2\\ 2n-4, & n\geqslant 3\end{cases} \tag{3}$$

定理4　当 $n\geqslant 3$ 时,若图 G 是一个最大平面图,则图 G 中的每一个区均为一个三边形 K_3。逆定理亦成立。

定理5　若 m 度正则图的点数(阶数)为 n,则其边数 e 为

$$e=\frac{1}{2}mn,\qquad m\geqslant 0, n\geqslant 1 \tag{4}$$

定理6　n 阶完全图 K_n 的边数 e 为

$$e=\frac{1}{2}n(n-1),\qquad n\geqslant 1 \tag{5}$$

可见,n 阶完全图 K_n 实为 $(n-1)$ 度正则图。

3　正则最大平面图的数目和性质

若要得到可能存在的正则最大平面图(即具有正则性的最大平面图)的数目,那就要求出各种度数的正则最大平面图的点数(阶数)。为此,只需给定正则度数 m,将(1)式和(4)式联立求解,即可得其相应的点数(阶数)n。再应用(1)式、(2)式和(3)式,就可得其相应的边数 e、度数 d 和区数 r。结果如下:

1)当 $m=0$,则 $e=0$,　　得 $n=1$, $e=0$, $d=0$, $r=1$。

2)当 $m=1$,则 $e=\frac{1}{2}n=1$,　　得 $n=2$, $e=1$, $d=2$, $r=1$。

3)当 $m=2$,则 $e=n=3n-6$,　　得 $n=3$, $e=3$, $d=6$, $r=2n-4=2$。

4)当 $m=3$,则 $e=\frac{3}{2}n=3n-6$,　　得 $n=4$, $e=6$, $d=12$, $r=2n-4=4$。

5)当 $m=4$,则 $e=2n=3n-6$,　　得 $n=6$, $e=12$, $d=24$, $r=2n-4=8$。

6)当 $m=5$,则 $e=\frac{5}{2}n=3n-6$,　　得 $n=12$, $e=30$, $d=60$, $r=2n-4=20$。

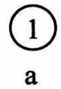
7)当 $m=6$,则 $e=3n=3n-6$,　　得 $n=\infty$, $e=\infty$, $d=\infty$, $r=2n-4=\infty$。

8)当 $m\geqslant 7$,则 $e=mn/2=3n-6$,无解($\because$ 从拓扑结构看,n 必须为自然数)。

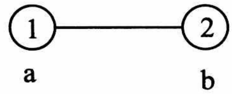
由上可见,广义地说,正则最大平面图有七种,即0度正则最大平面图、1度正则最大平面图、…、6度正则最大平面图。不存在7度或大于7度的正则最大平面图。

图1中画出了七种正则最大平面图的拓扑结构,对各个点给以标号,使成标定图。点以小圆圈表示,圈内数字为标号。对第七种正则最大平面图,只画出了部分点、部分边,有的点未给以标号。又,各图都画成规范化的形式,整齐、好看。由于 m 度正则最大平面图的各点的度相同,均为 m,因此从拓扑结构上看,各点是对等的,图形是对称的,这从规范化的图形上很容易看出。

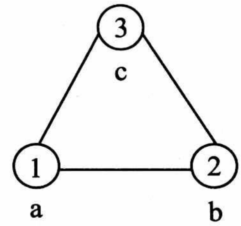
若采用"测地投影法",每一种正则最大平面图都可画在一个球面上,球的半径可任意大小。平面图中的一个三角形区都相应地成为球面上的一个三角形区。但对6度正则最大平面图而言,球的半径应是无穷长的,即球体应是无穷大的,那么球面已成为无穷大的平面。



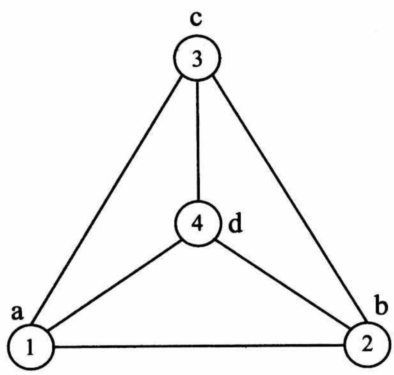
(1) m = 0, n = 1,
e = 0, d = 0, r = 1。



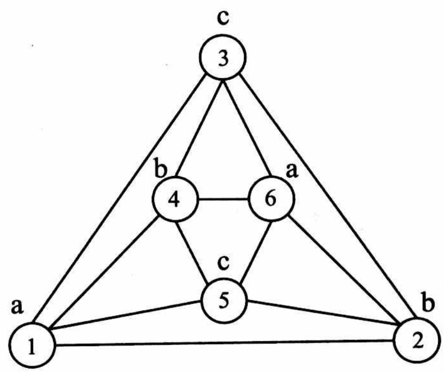
(2) m = 1, n = 2,
e = 1, d = 2, r = 1。



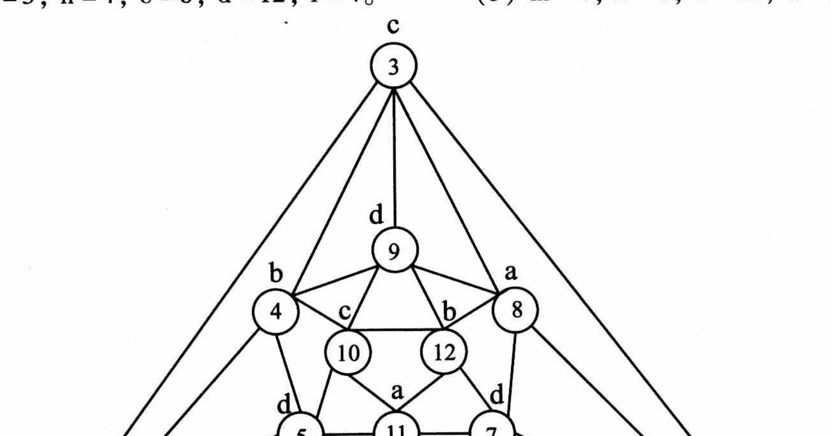
(3) m = 2, n = 3,
e = 3, d = 6, r = 2。



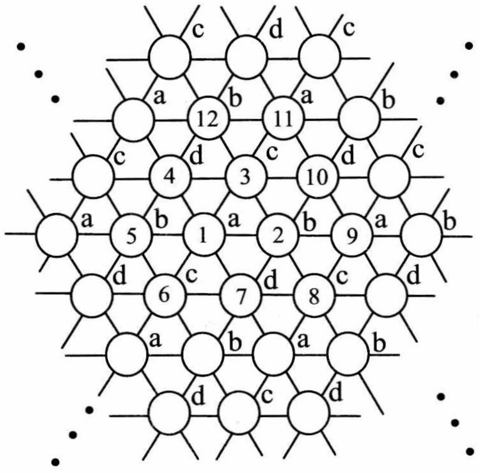
(4) m = 3, n = 4, e = 6, d = 12, r = 4。



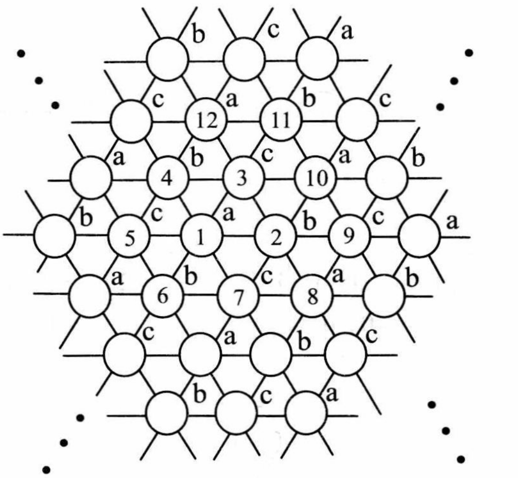
(5) m = 4, n = 6, e = 12, d = 24, r = 8。



(6) m = 5, n = 12, e = 30, d = 60, r = 20。



(7) m=6, n=∞, e=∞, d=∞, r=∞。



(8) m=6, n=∞, e=∞, d=∞, r=∞。

图1 正则最大平面图

4 最大平面图中的完全图

若将(1)式和(5)式联立,得

$$3n-6=\frac{1}{2}n(n-1),\qquad n\geqslant 3$$

即

$$n^2-7n+12=0,\qquad n\geqslant 3 \qquad (6)$$

(6)式表示,既为最大平面图且为完全图的图 G 的阶数 n 应满足的条件。

解(6)式,得 n=3,4。故知3阶和4阶的最大平面图为完全图,即相应的为 K_3 和 K_4。同时,又可看到,这也就是相应的2度和3度正则最大平面图。考虑到 n=1 和 n=2 的情况,广义地说,最大平面图中,只有四种完全图,即1阶、2阶、3阶、4阶最大平面图,也就是0度、1度、2度、3度正则最大平面图。

5 正则最大平面图的色数和着色

1840年德国数学家 A. F. Möbius 提出了“四色猜想”,1976年美国数学家 K. Appel 和 W. Haken 等证明了“四色定理”,即任何平面图都是4可着色的。由此可知,最大平面图以及正则最大平面图的色数 χ 不会超过4。

设 a、b、c、d 分别表示红、黄、蓝、绿四种颜色。极易看到,n=1、n=2 和 n=3 的三种正则最大平面图,其色数 χ 分别为1、2和3。现分别以 a,a、b 和 a、b、c 对其着色,结果如图1(1)、(2)、(3)所示,表示颜色的字母标在点的旁边。这样的方法,不妨叫“观察法”。显然,此法对极简单的情况才会奏效。

对 n=4 的正则最大平面图,也极易看出色数 χ=4。从另一角度看,V_4 点是3度的,与 V_1、V_2、V_3 三点邻接,而 V_1、V_2、V_3 三点在最大平面图中必是组成一个三角形的。我们可设想将3度的 V_4 点去掉,这并不影响 V_1、V_2、V_3 三点原来的相互邻接关系,但却将图由4阶降为3阶。三角形的三个点应分别着不同的三色,即 a、b、c,显然 V_4 就应着第4色即 d 色,如图1(4)所示。这个方法可叫“降阶法”。对具有许多3度点的图 G,降阶的作用就较大。尤其是,降阶后若又有了新的3度点,又可去掉,继续降阶。像这样多层次的降阶,降阶的作用就更大了[5][6]。

对4度6阶的正则最大平面图,显然首先可确定三角形的三点 V_1、V_2、V_3 分别着 a、b、c 三

色。继之可看到与 V_4 邻接的点中有 V_1、V_3 两点，故 V_4 只能着 a、c 以外的其他颜色，意即在考虑 V_4 的着色时筛掉 a、c 二色，选着 b 色。同理，可对 V_5 和 V_6 分别选着 c 色和 a 色，得一着色方案如图 1(5)所示。这样的方法，不妨叫"筛选法"。通过"筛选法"得知 4 度 6 阶正则最大平面图的色数 χ 为 3。显然"筛选法"是有一定的局限性的，如同"观察法"和"降阶法"一样，不可能解决着色的全部问题。

对 5 度 12 阶的正则最大平面图，首先仍可确定三角形的三个点 V_1、V_2、V_3 分别着 a、b、c 三色，由对等性立即可知，三角形 $V_{10}V_{11}V_{12}$ 的三点应用 a、b、c 三色来着。继之，从图上可看到 V_4 周围的圈 $V_1V_5V_{10}V_9V_3V_1$ 是五点的奇圈，奇圈的着色需 3 色，由此可见 5 度正则最大平面图的色数 χ 将大于 3。同时考虑到正则最大平面图的对等性和对称性，故将 V_5、V_7、V_9 均着 d 色，再考虑到奇圈的着色，V_{10} 着 c 色，V_4 着 b 色。同理，可得到其他点的着色。由此可见 5 度正则最大平面图的色数 χ 为 4，着色方案如图 1(6)所示。这儿，在着色中，分析了图的拓扑结构的特点，因而这样的方法似可称"分析法"。前面 4 度正则最大平面图结构中，一个点周围的圈是偶圈，偶圈可以二色着之，因而使 4 度正则最大平面图的色数 χ 可以为 3。

最后，对 6 度∞阶正则最大平面图，同样地，三角形的三个点必然分别着不同的三色，因而图 1(7)中 V_1、V_2、V_3 三点分别着 a、b、c 三色。从图的结构看，边形成了三种斜度的无穷长平行线，可考虑采用所谓"隔离法"来着色，即每条线上仅用二色，相邻的平行线上则用另二色，这就保证了着色的基本要求——相邻点着异色。考虑到图结构的对等性，故对 V_4、V_7、V_{10} 均着 d 色，由此得到整个图的着色方案，如图 1(7)所示。

然而，若从另一角度看 6 度∞阶正则最大平面图的着色，当 V_1、V_2、V_3 三点分别给予 a、b、c 三色后，以"对每一个菱形的对顶点着同色"这一原则，逐步对所有点由近及远一一着色，就可得如图 1(8)所示的着色方案，可见 6 度∞阶正则最大平面图的色数 χ 为 3。实际上，从该图中可看出，每一个点周围均为 6 点的偶圈，偶圈可以二色着之，因而其色数 χ 可以为 3。此外，基于图是∞阶的（这是一个根本的关键原因），图 1(8)的着色也可这样来看，无穷长的直线上的各点以 a、b、c 的顺序着色，相邻的平行线上的各点也以 a、b、c 的顺序着色。但需错位，以满足着色的基本要求——相邻点着异色，即得所示着色方案。这样的方法，似可称为"错位法"。

以上用色数 χ 对每一种正则最大平面图给出了一种着色方案，显然对同一正则最大平面图，可能存在着不止一种着色方案。

6 结语

综合前面所得结果，以表 1 表示如下。

表 1 正则最大平面图的特性

正则度数 m	点(阶)数 n	边数 e	度数 d	区数 r	完全图 K_n	色数 χ
0	1	0	0	1	是(K_1)	1
1	2	1	2	1	是(K_2)	2
2	3	3	6	2	是(K_3)	3
3	4	6	12	4	是(K_4)	4
4	6	12	24	8	非	3
5	12	30	60	20	非	4
6	∞	∞	∞	∞	非	3

这儿有一个有趣的现象,所有可能的有限阶正则最大平面图的点数 n,包括了所有“12”的因数。

本文对正则最大平面图的性质作了一定的分析,得到了初步的基本结果,给出了各种正则最大平面图的规范化表达。在求得各种正则最大平面图的色数后,进行了着色,应用了“观察法”、“降阶法”、“筛选法”、“分析法”、“隔离法”、“错位法”等。这些方法,对某些问题提供了解决的思路,但各有一定的局限性。着色问题有待进一步的深入研究。

新浪网“别客的博客”http://blog. sina. com. cn/buickidea 中有其他有关论文,敬请批评、指正。

参考文献

[1] E. 哈拉里著. 图论[M]. 李慰萱,译. 上海:上海科学技术出版社,1980:119 - 134.
[2] 陈树柏,左垲,张良震. 网络图论及其应用[M]. 北京:科学出版社,1982.
[3] 舒贤林,徐志才. 图论基础及应用[M]. 北京:北京邮电学院出版社,1988.
[4] 戴一奇,胡冠章,陈卫. 图论与代数结构[M]. 北京:清华大学出版社,1995.
[5] 冯纪先. 最大平面图着色的“移 3 度点法”[C]//第十五届电路与系统年会论文集. 广州:华南理工大学,1999:254 - 258. (见目录:2. 01)
[6] 冯纪先. 最大平面图着色的“移 4 度点法”[C]//第十五届电路与系统年会论文集. 广州:华南理工大学,1999:259 - 263. (见目录:2. 02)

1.02　简单完整正则平面图

【摘要】对简单完整正则平面图的结构和特性进行了分析和讨论，找出了简单完整正则平面图的可能的种类。此外，对各种简单完整正则平面图的色数进行了求解，并用不同的方法给出了各个简单完整正则平面图的着色方案。

【关键词】简单图；正则最大平面图；完整正则平面图；色数；图着色

On simple completely regular plane graphs

Abstract: This paper analyses and explores constructions and properties of simple completely regular plane graphs. All simple completely regular plane graphs are given. And chromatic number and a kind of coloring of these graphs are solved.

Keywords: simple graph; regular maximal plane graph; completely regular plane graph; chromatic number; coloring

1　引言

文献[1]中对正则最大平面图的结构和特性作了分析和讨论，得到可能的各种正则最大平面图，并求出了它们的色数，给出了它们的着色方案。正则最大平面图是一种简单完整正则平面图。本文研究了简单完整正则平面图的结构和特性，它们的色数及着色方案。所以，本文的内容包含了文献[1]中的部分内容。

2　定义和定理[1,2]（证明从略）

定义 1　设图 G 无自环，也无并边，则称图 G 为简单图(Simple graph)。

定义 2　设图 G 为连通平面图，其所有区的周界的长度即周界的边数 l 均相同，且所有点的度数 m 也均相同，则称图 G 为 l 长 m 度完整正则平面图(completely regular plane graph)。

既为简单图又为完整正则平面图的图 G 应称为简单完整正则平面图。为了方便，往往将“简单完整正则平面图”称为“完整正则平面图”。

图 G 所有区的周长均相同时，每个点的度数不一定相同。如图 1 所示，图 G 所有区的周长为 3，但图 G 中既有 3 度点，又有 4 度点。图 1 实为一最大平面图。

G:

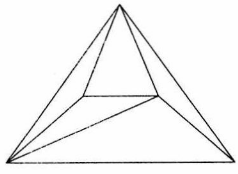


图 1　5 阶最大平面图

G:

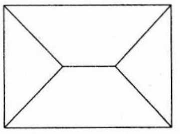


图 2　6 阶非最大平面图

图 G 所有点的度数均相同时,每个区的周长不一定相同。如图 2 所示,图 G 所有点的度数为 3,但图 G 中既有周长为 3 的区,也有周长为 4 的区。图 2 不是最大平面图。

定理 1　设图 G 为连通平面图,点数(阶数)为 n,区数为 r,边数为 e,则

$$e = n + r - 2, \qquad n \geqslant 1, r \geqslant 1 \tag{1}$$

定理 1 即为 Euler 定理。由(1)式可见,$e \geqslant 0$。由于图 G 是连通的,故 $e \geqslant n-1$。当图 G 是树 T 时,$r=1, e=n-1$。(1)式理解成图 G 的边数 e 取决于图 G 的点数 n 和区数 r。

定理 2　设图 G 为连通平面图,若其所有区的周界的长度即周界的边数 l 均相同,则

$$e = \frac{1}{2} \cdot l \cdot r, \qquad l \geqslant 3, r \geqslant 2 \tag{2}$$

由(2)式可见,$e \geqslant 3$,并可看到,$n \geqslant l$。又因 e 为整数,故 l、r 二者之中,至少有一个为偶数。若考虑到(1)式,且将(1)、(2)两式联立,消去 r,得下述定理 3。

定理 3　设图 G 为连通平面图,若其所有区的周界的长度即周界的边数 l 均相同,则

$$e = \frac{l(n-2)}{l-2}, \qquad l \geqslant 3, n \geqslant l \geqslant 3 \tag{3}$$

(3)式理解成图 G 的边数 e 取决于图 G 的点数 n 和区的周长 l。由(3)式可见,$e \geqslant 3$。(3)式中 l 和 n 的取值范围,是由(1)、(2)式中 l 和 n 的取值范围所决定。

定理 4　设图 G 为连通平面图,若其所有区的周界的长度即周界的边数 l 均相同,则

$$r = 2e/l, \qquad l \geqslant 3, e \geqslant 3 \tag{4}$$

及

$$r = 2(n-2)/(l-2), \qquad l \geqslant 3, n \geqslant l \geqslant 3 \tag{5}$$

(5)式的获得也可视为(2)式与(1)式联立,消去 e 而得。

定理 5　若 m 度正则平面图的点数(阶数)为 n,边数为 e,则

$$e = 1/2 \cdot mn, \qquad m \geqslant 0, n \geqslant 1 \tag{6}$$

由(6)式可见,$e \geqslant 0$。又因 e 为整数,故 m、n 二者之中,至少有一个为偶数。

上面所列出的六个式子中,涉及 5 个参量,即 e、n、r、l、m。对完整正则平面图而言,实际上,它只是要满足六个式子中彼此独立的三个式子,即(1)式、(2)式和(6)式,其余三式(3)、(4)和(5)是导出的。因而,为了解出 e、n 和 r 三个参量的值,必须先设定余下的两个参量 m、l 的值。下面就讨论这个问题并给出求解的结果。

3　完整正则平面图的种类和性质

完整正则平面图中,各点的度数 m 是相同的,故必须满足(6)式,各区的周长 l 也是相同的,故又须满足(2)式,或(3)式。现将(6)式和(3)式联立,消去边数 e,得

$$n = \frac{4l}{2l - ml + 2m}, \qquad l \geqslant 3, m \geqslant 0, n \geqslant l \geqslant 3 \tag{7}$$

(7)式中,由于限定了 $l \geqslant 3, n \geqslant 3$,这就导致 $m \geqslant 2$ 才有意义。由(7)式可见,给定 l、m 的值,就可利用(7)式解出图 G 的点数(阶数)n,再利用(3)式或(6)式可求出边数 e,利用(4)式或(5)式求得区数 r 及其他特性。

我们先给定 l 值,然后再给以不同的 m 值,所得结果如下。

1)$l=3$,则由(7)式得 $n=\frac{12}{6-m}$。故得 $m=2, n=3, e=3, r=2$

$m=3,n=4,\ e=6,\ r=4$

$m=4,n=6,\ e=12,r=8$

$m=5,n=12,e=30,r=20$

$m=6,n=\infty,e=\infty,r=\infty$

$m\geqslant 7$,无解

$l=3$,意即每个区均为三角形 K_3,当 $n\geqslant 3$ 时,图 G 就是最大平面图,所以这儿所得的结果与文献[1]中所得的结果是一致的。

2) $l=4$,则由(7)式得 $n=\dfrac{16}{8-2m}$。故得 $m=2,n=4,\ e=4,\ r=2$

$m=3,n=8,\ e=12,r=6$

$m=4,n=\infty,e=\infty,r=\infty$

$m\geqslant 5$,无解

3) $l=5$,则由(7)式得 $n=\dfrac{20}{10-3m}$。故得 $m=2,n=5,\ e=5,\ r=2$

$m=3,n=20,e=30,r=12$

$m\geqslant 4$,无解

4) $l=6$,则由(7)式得 $n=\dfrac{24}{12-4m}$。故得 $m=2,n=6,\ e=6,\ r=2$

$m=3,n=\infty,e=\infty,r=\infty$

$m\geqslant 4$,无解

5) $l=7$,则由(7)式得 $n=\dfrac{28}{14-5m}$。故得 $m=2,n=7,\ e=7,\ r=2$

$m\geqslant 3$,无解

6) $l>7$,设 $l=8$,则由(7)式得 $n=\dfrac{32}{16-6m}$。可得 $m=2,n=1,e=1,r=2$

$m\geqslant 3$,无解。

可见 $l\geqslant 7$ 的任何值时,有相同的结果。

另一方面,如果我们先给定 m 值,再给以不同的 l 值,情况将如下所述。

1) 当 $m=2$,则由(7)式得 $n=l$,由(3)式或(6)式得 $e=l$,由(4)式或(5)式得 $r=2$。

这说明,$m=2$ 时,完整正则平面图实为圈 C_n。又看到,当 $m=2$ 时,$l\geqslant 3$ 的任何值均可。

2) 当 $m=3$,则由(7)式得 $n=\dfrac{4l}{6-l}$,此时 $l\leqslant 6$,即 $l=3$、4、5、6。

3) 当 $m=4$,则由(7)式得 $n=\dfrac{4l}{8-2l}$,此时 $l\leqslant[8/2]=4$,即 $l=3$、4。

4) 当 $m=5$,则由(7)式得 $n=\dfrac{4l}{10-3l}$,此时 $l\leqslant[10/3]=3$,即 $l=3$。

5) 当 $m=6$,则由(7)式得 $n=\dfrac{4l}{12-4l}$,此时 $l\leqslant[12/4]=3$,即 $l=3$。