中师数学函授教材

立体几何与平面三角

江西省赣州师范函授处

编 印 说 明

《立体几何与平面三角》是根据昆明师范学院函授教材翻印的。翻印时我们对原书内容作了一些变动。本书供我区中师数学函授学员第三学年下学期作教材用，要求在八二年二月至八二年六月前学完。

本书由我处刘秀英、王鹤鸣、胡运鋋、任万安、黄道炳等老师负责选编校对。由于我们的水平不高，错误和缺点在所难免，敬请批评指正！

赣州师范学校函授处

一九八二年元月

目　　录

第一篇　立体几何

第二篇　平面三角

第一篇 立体几何

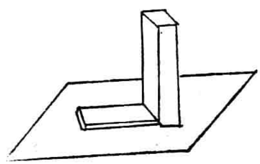
在以前我们已经学习了平面图形的一些基本性质和应用。在这一篇里，我们要在平面几何的基础上进一步学习立体图形的基本性质和应用。

第一章 空间直线和平面

§1 平面和它的基本性质

经过平面磨床加工后的物体表面以及生活中常见的桌面、平玻璃面、墙壁面和平静的水面等，都给我们以平面的形象。从这些实际的面，就抽象出平面的概念。

木工师傅检查工作物的表面是不是平面时，常把角尺的一边放在板面上任意滑动（图①—1），看角尺边缘上与木板面之间有无空隙，如有空隙，这个板面就不平；如无空隙，这个板面就是平的。

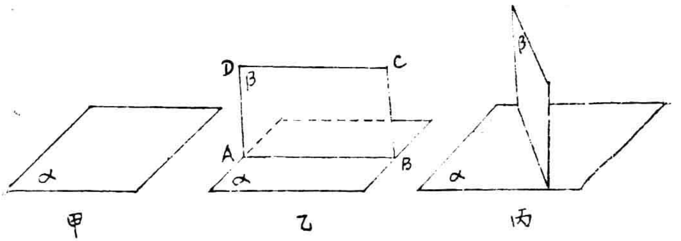


图①—1

上面这个检查方法也就是判定平面的方法：经过面内任意两点画直线，如果这直线上每点都在这个面内，这个面就是平面。

通常我们画一个平行四边形来表示水平放置的平面，把它的一个锐角画成45°，并用小写希腊字母α、β、γ等来表

示（如图①—2，甲）；有时也用平行四边形两个相对顶点的字母来表示，如平面AC（图①—2，乙）。如果一个平面的一部分被另一个平面遮住时，通常把被遮的部分线段画成虚线或不画出（如图①—2，乙和丙）



图①—2

必须注意：象直线可以无限伸长一样，平面可以无限伸展。虽然我们这里画的是平行四边形，但它表示着广阔无涯的平面。

劳动人民在长期实践中，积累了不少经验，这些经验被实践检验是正确的，也被人们公认的，通常称为公理。关于平面的基本性质方面，有如下三条公理：

公理1. 如果一条直线上的两点在一个平面上，那么这条直线上所有的点都在这个平面上。

这时我们说直线在平面上，或者平面通过直线。

公理2. 如果两个平面有一个公共点，那么它们相交于过这点的一条直线。

这条直线叫做这两个平面的交线。画相交平面时，要画出它们的交线。

公理3． 不在一条直线上的三点确定一个平面。

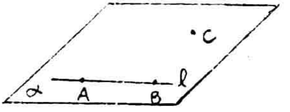
这里用的确定一个平面的“确定一个”四字，其含义是存在和唯一的意思。即是说“过不在一条直线上的三点有一个平面，且只有一个平面。”

由此，我们得到如下三个推论：

推论1． 一条直线和这条直线外的一点确定一个平面。

假设：直线l和l外的一点C（图①—3）

求证：直线l和点C确定一个平面。



图①—3

证明：在直线l上任取A、B两点，于是A、B、C便组成不在一直线上的三点，那么过这三点有一个，且只有一个平面α（公理3）。因为直线l上有两点A、B在平面α上，所以直线l在平面α上（公理1），这就是说，平面α是过直线l和点C的平面。

如果过直线l和点C的平面除α外还有另一个平面β，则A、B、C三点也一定都在β上。这样，过不在一直线上的三点A、B、C就是两个平面α和β了，这和公理3相矛盾。所以过直线l和点C的平面只有一个。

推论2． 两条相交直线确定一个平面。

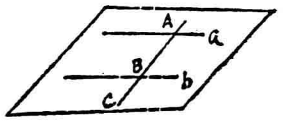
推论3． 两条平行直线确定一个平面。

推论2和推论3请学员自己证明。

例： 一条直线和两条平行直线相交，证明这三条直线在同一个平面上。

假设：直线a∥直线b，直线c和直线a交于A点，和直线

b交于B点（图①—4）



图①—4

求证：直线a、b、c在同一平面上。

证明：$\because a \parallel b$，$\therefore a$、b确定一个平面α（推论3）由于直线c有两点A、B在平面α上，故直线c在α上。这就证明了三条直线a、b、c在同一个平面上。

问题①.1. 证明三角形和梯形都是平面图形。

问题①.2. 证明与定直线相交且通过其外一定点的各条直线在同一平面上。

问题①.3. 一条直线和两条平行直线相交，另一条直线也和这两条平行直线相交，证明这四条直线在同一个平面上。

问题①.4. 四条线段依次首尾相接，所得的封闭图形是不是平面图形？

问题①.5. 空间四点一般可以确定几个平面？

§ 2　空间直线和直线的位置关系

（一）空间两直线的位置关系

我们已经知道在同一平面上的两条不重合直线，若不相交，就是平行。但在空间来观察两直线的位置关系，就不是这样了。如教室里下垂的电灯线和黑板的一条横边，它们既不相交又不平行，它们是不在同一平面上的两条直线。我们把不在同一平面上的两条直线，叫做异面直线。

由此可见，空间两直线的位置关系下列三种：

（1）相交　只有一个公共点　　　　}在同一平面上
（2）平行　没有公共点
（3）异面　没有公共点　　　　　不在同一平面上。

注意：（1）两条直线的位置关系，在空间与平面上是有区别的。异面直线的概念在空间图形里常常会碰到，必须弄清这个概念。所谓异面直线应理解为不可能在同一平面上的两条直线。同时，也不能认为凡是分别在两个平面上的直线都是异面直线。如分别在两个平面上而互相平行的两条直线就不是异面直线。

（2）要判断空间两直线平行，不能只证明它们不相交就算完事，首先必须确定它们是在同一平面上。

问题①.6．两直线没有公共点，这两条直线的位置怎样？

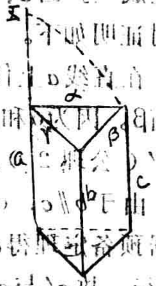
问题①.7．一条直线和两条异面直线相交，每两条相交直线可以确定一个平面，一共可以确定几个平面？

（二）平行性的传递性

从平行线的定义，我们知道，平行性有对称性，即是说：若$a \parallel b$，则$b \parallel a$。现在要证明：在空间和在平面上一样，平行性有传递性，即是说，空间三直线a、b、c间若有$a \parallel c$和$b \parallel c$，则亦有$a \parallel b$。为了证明这个重要性质，我们先证下面的预备定理。

预备定理，设相交两平面各通过两已知平行直线之一，那么它们的交线平行于这两条平行直线。

假设：直线$a \parallel b$，平面α和β分别过直线a和b，且α和β相交于直线c（图①—5）。



图①—5

求证：$c /\!/ a$，$c /\!/ b$

证明：我们来证明$c /\!/ a$，以γ表示平行直线a和b所在的平面。由于c和a都在平面α上，要断定$c /\!/ a$，只要断定c和a不可能相交。我们使用反证法。

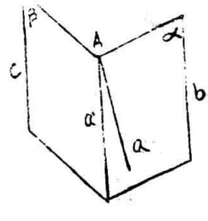
设c和a相交于一点X，一方面X在a上，因之既在α上又在γ上，另一方面X在c上，因而既在β上，又在α上，以此推出X既在γ上又在β上，因而在γ和β的交线b上。那么a和b相交于一点X了！这与$a /\!/ b$矛盾，故$c /\!/ a$，同理可证$c /\!/ b$。

定理①.1.（平行性的传递性）如果两条直线与第三条直线平行，那么这两条直线互相平行。

假设：三直线a、b、c，$a /\!/ c$，$b /\!/ c$（图①—6）

求证：$a /\!/ b$。

证明：当三直线a、b、c在同一个平面上时，由平面几何我们知道这定理成立。当a、b、c不在一个平面上时证明如下。



图①—6

在直线a上任取一点A，b和A确定平面α。c和A确定平面β。因为α和β有一公共点A，于是它们就相交于一直线a'（公理2）。

由于$b /\!/ c$，α通过b，β通过c，且α和β相交于a'，所以根据预备定理得$a' /\!/ c$和$a' /\!/ b$。但通过点A只能有一直线与c平行，故a'与a重合。

由$a' /\!/ b$从而得到我们的结论$a /\!/ b$。

（三）空间二直线间的角

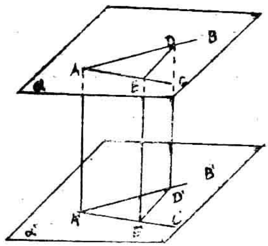
在讨论了空间两直线三种可能的相互位置，并证明了平行性的传递性以后，我们来将平面上两直线夹角或交角的概念，推广于空间二直线。为此，我们先证明：

定理①.2. 如果两个角的两组对应边分别同向平行，那么这两个角相等。

假设：$\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 的两边 $AB \parallel A'B'$，$AC \parallel A'C'$，而且方向相同（图①—7）。

求证：$\angle BAC = \angle B'A'C'$

证明：当这两角在同一平面上时，这定理已在平面几何证过。现在假定它们在两个平面 α 和 α′ 上。



图①—7

如图，在两角的边上取对应相等的线看：$AD = A'D'$，$AE = A'E'$。连结 AA'、DD'，EE'。 ∵ $AD \underline{\parallel} A'D'$

∴ $AA'D'D$ 是平行四边形（一组对边平行且相等）

∴ $AA' \underline{\parallel} DD'$，同理可证 $AA' \underline{\parallel} EE'$

∴ $DD' \underline{\parallel} EE'$（平行性和等量的传递性）

∴ $DEE'D'$ 是平行四边形，于是 $DE = D'E'$（平行四边形的对边相等）从而 $\triangle DAE \cong \triangle D'A'E'$（边、边、边）

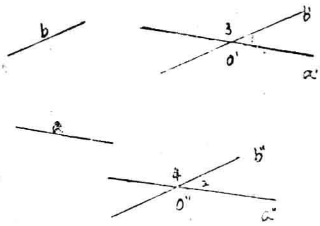
∴ $\angle DAE = \angle D'A'E'$ 即 $\angle BAC = \angle B'A'C'$

推论1. 两个角的两组对应边分别异向平行，则此两角相等。

推论2. 两个角的两边分别平行，一组对应边同向平行，另一组对应边异向平行，则此两角互补。

证明了定理①.2.以后，现在，我们来定义空间二直线间的角。

设 a、b为两条异面直线（图①—8），通过空间任意两点O'和O''，各引直线a'和a''与a平行，各引直线b'和b''与b平行。这样，便得到两对各自互补的角（$\angle 1$和$\angle 3$互补，$\angle 2$和$\angle 4$互补）。根据定理①.2：$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$。这些角的大小只因a、b而定，而与角顶的选择无关。因此我们定义$\angle 1$（$=\angle 2$）或$\angle 3$（$=\angle 4$）为a、b二异面直线间的角。如果a、b是给定了指（或正）向的直线，那么它们之间的角是唯一确定的。

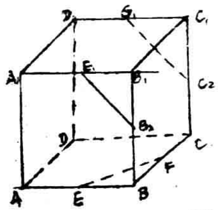


图①—8

显然，我们可以从（例如）直线a上一点引b的平行线，这两条相交直线的交角就是a、b之间的角。

如果两条异面直线之间的角是直角时，这两条异面直线叫做互相垂直。例如教室里下垂的电线和墙脚线就是互相垂直的。

今后我们说两条直线互相垂直，指这两条直线可以是相交直线，也可以是异面直线。

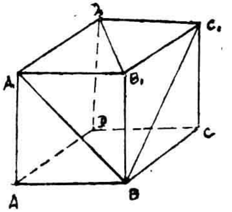


问题①.8.如图，E、F、E_1、G_1、B_2、C_2分别是立方体棱上的中点：

（1）E_1B_2和G_1C_2是不是异面直线？为什么？

（2）E_1B_2和EF是不是异面直线？为什么？

问题①.9． 如图所示的立方体里，下列每一对直线各是什么直线？如果它们不是平行直线，它们所成的角是多少度？



（1）AB和CC_1

（2）AA_1和BC_1

（3）BA_1和BC_1

（4）B_1D_1和BD

（5）B_1D和BA_1。

§3 空间直线和平面的位置关系

在生产实践中，常常要考虑到关于直线和平面的位置关系。例如电线杆要立得牢固，它和地面的位置关系应该怎样？工厂里的桥式吊车要走得平稳和安全，它的轨道和地面的位置关系又应该怎样？

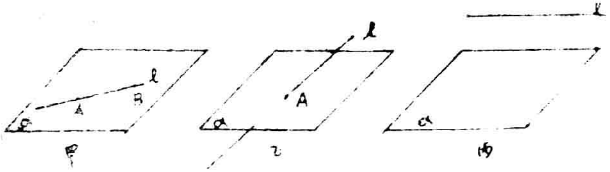
（一）直线和平面的位置关系

由平面的性质我们知道，一条直线l和一个平面α如果有两个公共点，那么这条直线l就在平面α上（图①—9，甲）。如果直线l和平面α只有一个公共点A，我们说直线l和平面α相交于A（图①—9，乙）。如果直线l和平面α没有公共点，就说直线l和平面α平行，记为$l /\!/ \alpha$（图①—9，丙）。因此，一条直线和一个平面有下列三种可能的位置关系：

（1）直线在平面上　　有无数个公共点

（2）直线和平面相交　只有一个公共点

（3）直线和平面平行　没有公共点



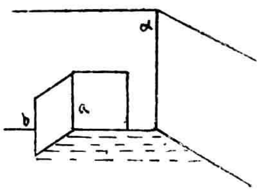
图①—9

（二）直线和平面的平行

下面我们学习如何判定直线与平面平行。大家知道门的两条直立的边缘（图①—10中的a和b）是互相平行的。当门绕着固定的一边a转动时，门的另一边b便始终和墙面α平行，直到门关上为止。

木工师傅要沿墙安装一条和地面平行的水管，安装时只须让水管和墙脚线平行就行了。

上述这类事实提供了以下的判定方法。



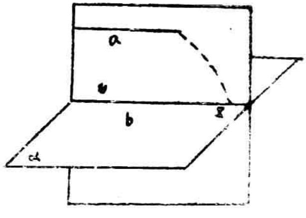
图①—10

定理①.3.（直线和平面平行的判定定理）如果平面外的一条直线平行于平面上的一条直线，那么这条直线就和这个平面平行。

假设：平面α外一直线a与α上一直线b平行（图①—11）。

求证：直线a∥平面α

证明：设两平行直线a和b确定一个平面β，则b就



图①—11

面α和β的交线。我们用反证法。

若a不平行于α，则a必与α有一个公共点X，X在a上，故在β上；X又在α上，故在α和β的交线b上。于是X是a与b的公共点。这与$a /\!/ b$的假设矛盾。因此，a与α不能有公共点，即$a /\!/ \alpha$。

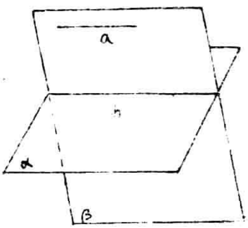
定理①.4. 如果一条直线平行于一个已知平面，那么凡通过这条直线的平面与已知平面的交线必平行于这条直线。

假设：直线$a /\!/$平面α，平面β过直线a，且与平面α相交于直线b。

求证：$a /\!/ b$

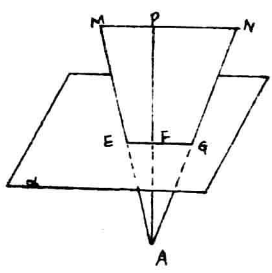
证明：直线a和b不能相交。否则它们的交点在a上，又在b上，因而在α上，即a与α相交了，这是不可能的。

由于a与b在同一平面β上，且不相交。$\therefore$ $a /\!/ b$



图①—12

例　如图，直线MPN平行于平面α，且在MN关于α的异侧有一个定点A，连结AM、AP、AN分别交α于E、F、G三点。设$MN=a$，$AP=b$，$PF=c$，求EG的长。



解：直线$MPN /\!/$平面α。

$\therefore$ 过A与MN的平面与平面α的交线EG必通过F点，且$EG /\!/ MN$。

由于　$\triangle AMP \backsim \triangle AEF$，　$\therefore \dfrac{EF}{MP}=\dfrac{AF}{AP}$

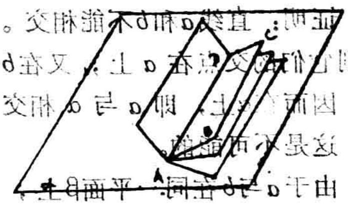
即　$EF=\dfrac{MP\cdot AF}{AP}=\dfrac{MP(b-c)}{b}$　　（1）

又　$\triangle APN \backsim \triangle AFG$，　$\therefore \dfrac{FG}{PN}=\dfrac{AF}{AP}$

$\therefore FG=\dfrac{PN\cdot AF}{AP}=\dfrac{PN(b-c)}{b}$　　（2）

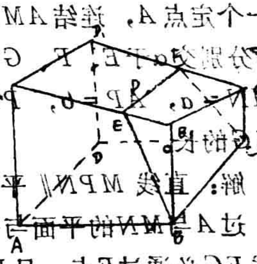
（1）+（2）得　$EG=\dfrac{a(b-c)}{b}$

问题①.10．如图，一块矩形板$ABCD$的一边AB在平面α上，把这块矩形板绕着AB转动，AB的对边CD，是不是都和平面α平行？为什么？



问题①.11．梯子的横档都是平行的，如果有一条横档和地面内的一条直线平行，那么所有的横档就都和地面平行，为什么？

问题①.12．如图所示的木块，BC和平面$A_1B_1C_1D_1$平行，要经过平面$A_1B_1C_1D_1$上一点P和直线BC，把木块锯开，怎样锯法？



问题①.13．三条直线每两条同在一个平面上，如果其中

有两条平行，证明第三条也和它们平行。

问题①.14.如果一条直线和两个相交的平面平行，求证：这条直线和两个平面的交线平行。

（三）直线和平面的垂直

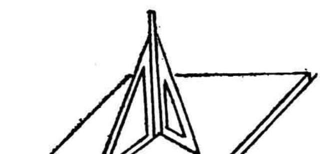
工厂的烟囱和地面，路旁的电线杆和路面，教室里下垂的电灯线和天花板，都给我们以直线和平面垂直的形象，钻床的钻头和工作台面是垂直的。如何来刻画直线和平面垂直关系的本质呢？

如果一条直线 ℓ 垂直于一个平面 α 上的任何直线，那么就称直线 ℓ 和平面 α 互相垂直。直线 ℓ 称为平面 α 的垂线，平面 α 称为直线 ℓ 的垂面。记作 $\ell \perp \alpha$ 或 $\alpha \perp \ell$。

显然，垂直于平面的直线一定和该平面相交（请学员思考），交点称为垂足。

直线与平面垂直，定义中要求该直线垂直于平面上的任何一条直线。那么，怎样来判定直线与平面是垂直的呢？

木工师傅在检查所立的木棒是否和板面垂直时，常把角尺的一边放在板面上，看另一边是否和木棒密合，如此在不同的方向（但不是相反的方向）检查两次（图①—13），若每次木柱和板面都与角尺的两条直角边密合，便可断定木柱与板面垂直。



图①—13

以上事实说明一条直线只要和一个平面的两条相交直线垂直，便和这个平面垂直。下述定理提供了理论上的依据