

復興初級中學教科書

代勿另

數尺父

下 冊

虞明禮編著
段育華校訂

商務印書館發行

全國中學數學教員參考

代數

第一冊

鄭國樞編
教育出版社

商務印書館發行

後興初級中學教科書

代數

數

下冊

著訂
編校
禮華
明育
虞段

商務印書館發行

中華民國政府教育部審定
 本書於二十六年七月經
 頒到中字第二十二號執照

中華民國二十六年七月審定本第一版
 中華民國三十五年十月審定本第一一七版

(573433)

初級中學用

復興教科書代

數二冊

下冊定價國幣叁角陸分

印刷地點外另加運費

版權所必
 翻印必究

編著者

虞

明

禮

校訂者

段

育

華

主編者

王

雲

五

發行人

朱

經

農

印刷所

商務

印刷

廠

發行所

商務

印刷

館

各地

上海河南路

目 次

下 冊

第十一章 分式方程式 229

§ 103. 引論 229

§ 104. 怎樣解分式方程式 230

習題九十一 232

§ 105. 用化整法往往得偽根 233

§ 106. 偽根何自而來 234

§ 107. 不用驗算，怎樣決定根的眞偽 236

習題九十二 237

習題九十三 239

習題九十四 241

第十二章 乘方及開方 242

I 乘方 242

§ 108. 單項式乘 n 次方 242

§ 109. 二項式乘 n 次方 243

習題九十五 245

II 開方	245
§ 110. 關於開方的幾個名詞	245
§ 111. 單項式開 n 次方	246
§ 112. 多項式開 n 次方(因子法)	246
§ 113. 多項式開平方(通法)	247
習題九十六	249
§ 114. 多項式開立方(通法)	250
習題九十七	252
第十三章 簡易不等式	252
§ 115. 不等數	252
§ 116. 不等式	254
§ 117. 不等式的分類	257
§ 118. 證恆不等式	257
習題九十八	258
§ 119. 解不等式	259
習題九十九	259
§ 120. 一元一次不等式的圖形	260
習題一百	261
第十四章 不盡根數 虛數 根式方程式	261
I 不盡根數	261

§ 121. 不盡根數的需要	261
§ 122. 不盡根數何以爲不盡？不盡根數的性質	262
§ 123. 不盡根式化簡的原理	264
§ 124. 不盡根數化簡後的形狀	265
習題一百零一	266
§ 125. 不盡根式的加減	267
習題一百零二	268
§ 126. 不盡根式的乘法	269
習題一百零三	270
§ 127. 不盡根式的除法	271
習題一百零四	273
II 虛數	273
§ 128. 虛數的需要及其性質	273
§ 129. 虛數的化簡	275
§ 130. 虛數的加減	275
習題一百零五	276
§ 131. 虛數乘法	277
習題一百零六	278
§ 132. 虛數除法	279
習題一百零七	279

III 根式方程式.....	280
§ 133. 根式方程式的解法及應用	280
習題一百零八	283
第十五章 比 比例 變數法	284
I 比	284
§ 134. 關於比的重要名詞	284
§ 135. 比的重要定理	285
習題一百零九	286
II 比例	286
§ 136. 比例的重要名詞	286
§ 137. 比例的重要定理	288
§ 138. 前節定理的應用	291
習題一百十	294
III 變數法	297
§ 139. 常數,變數	297
§ 140. 函數(應變數),自變數	298
§ 141. 函數的種類	300
§ 142. 正變,有理函數之一	300
習題一百十一	302
§ 143. 倒變,有理函數之二	304

§ 144. 聯變	306
習題一百十二	307
第十六章 級數	308
§ 145. 級數的需要	308
§ 146. 何謂級數	309
I 等差級數	310
§ 147. 等差級數	310
§ 148. 等差級數的公項	311
§ 149. 怎樣插入等差中項	312
習題一百十三	313
§ 150. 怎樣求等差級數 n 項的和	313
習題一百十四	314
II 等比級數	315
§ 151. 等比級數	315
§ 152. 等比級數的公項	316
§ 153. 怎樣插入等比中項	317
習題一百十五	318
§ 154. 求等比級數 n 項的和	319
習題一百十六	320
§ 155. 無限遞減等比級數的和	321

習題一百十七	322
習題一百十八	323
第十七章 指數 對數	324
I 指數	324
§ 156. 指數意義的推廣	324
§ 157. 分指數的意義	324
§ 158. 零指數的意義	325
§ 159. 負指數的意義	326
習題一百十九	326
II 對數	328
§ 160. 對數的需要	328
§ 161. 對數是什麼	328
習題一百二十	330
§ 162. 對數的三大定律	330
§ 163. 對數的定值部份,定位部份	331
§ 164. 怎樣求定位部	332
§ 165. 怎樣求定值部	334
習題一百二十一	335
§ 166. 求對數	335
習題一百二十二	336

§ 167. 求反對數	336
習題一百二十三	337
§ 168. 利用對數來計算	338
習題一百二十四	340
§ 169. 指數方程式	340
習題一百二十五	341

復興初級中學教科書

代 數

下 冊

第十一章 分式方程式

§ 103. 引論

(1) 何謂分式方程式？ 凡分母含有未知數的方程式，都

叫做分式方程式。例如 $\frac{1}{x} + 5 = x$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = 2$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 12$ 等

都是分式方程式。而 $\frac{3}{2}x + x^2 = \frac{1}{5}$, $\frac{x^2}{3} + \frac{x}{4} = 5$ 都不是分式方程

式。

(2) 何以需要分式方程式？ 請看下題。

[問題] “二數的差是 1，其倒數的和是 $\frac{21}{10}$ 求這二數”。本問

題若用一個未知數來解，例如，設 $x =$ 一數， $x+1 =$ 他數，從題意應得分式方程式：

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{21}{10}.$$

又若用兩個未知數來解，例如，設 x = 大數， y = 小數，那麼，從題意也應得分式方程式：

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{21}{10}. \end{cases}$$

不但如此，任用其他方法，終得分式方程式。所以，若不利用分式方程式，這問題便無法求解。然則分式方程式還可以不要嗎？

§ 104. 怎樣解分式方程式？分式方程式的解法，最通用的有二種，就是“化整法”與“加減法”。現在依次來講。

A. 化整法 [例] 解上節問題所得方程式

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{21}{10}.$$

[解法] 以諸分母的 L. C. M. = $10x(x+1)$ 乘原方程式的兩邊，使得整式方程式：

$$10(x+1) + 10x = 21x(x+1)$$

解之，得 $x_1 = -\frac{5}{7}$, $x_2 = \frac{2}{3}$ 。

把 x_1 和 x_2 分別代入原方程式驗其是否相合：

$$\frac{1}{-\frac{5}{7}} + \frac{1}{-\frac{5}{7} + 1} = \frac{21}{10}$$

$$\frac{21}{10} = \frac{21}{10};$$

$$\frac{1}{\frac{2}{3}} + \frac{1}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{21}{10}$$

$$\frac{21}{10} = \frac{21}{10}.$$

由上例看來，可得分式方程式的解法，如下：

第一步。 先以原方程式中所有諸分母的 L. C. M. 遍乘方程式的兩邊。(使原方程式變為整式方程式)。

第二步。 由這整式方程式求出未知數的值。

第三步。 欲知求得的值果否適合原方程式，可把這所得的值代入原方程式的兩邊，驗其是否相合。若不相合，且非解方程有錯誤，則必有其他原因。(參看下兩節)

B. 加減法 仍取第一法之例來說明。

【例】 解方程式 $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{21}{10}.$

【解法】 移項，得

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{21}{10} = 0$$

加減，得

$$\frac{-21x^2 - x + 10}{10x(x+1)} = 0$$

乃令分子為零，得

$$-21x^2 - x + 10 = 0$$

解之，得二根

$$x_1 = -\frac{5}{7}, \quad x_2 = \frac{2}{3}.$$

(驗算一步和本節A的例相同)。

由上例看來，又得分式方程式的解法如下：

第一步。 先把原方程式中的各項，完全移至方程式的一邊，而使他邊爲零。

第二步。 用分式加減法化簡第一步所得方程式，使成 $\frac{N}{D} = 0$ 之形。

第三步。 如 $\frac{N}{D}$ 不是最簡分式，約成最簡分式。(理由參看
下兩節)

第四步。 乃令第三步所得最簡分式的分子爲 0 而解之。

第五步。 把第四步所得的值代入原方程式的兩邊。驗其
是否相合。

習題九十一

用二法解下列各題並驗算所得的結果：

1. $x + \frac{12}{x-2} = -5.$

2. $x-1 = 4 - \frac{12}{x+2}.$

$$3. \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x+2)(x-1)}.$$

$$4. \frac{1}{x-2} = \frac{8}{x+6} \times \frac{1}{x-2}.$$

$$5. 2 + \frac{44}{x^2-1} = \frac{4}{x-1} + \frac{11}{x+1}.$$

$$6. 1 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-x}.$$

$$7. 1 + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-1} = \frac{2}{(x-2)(1-x)}.$$

$$8. \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x(x+1)} = 0.$$

§ 105. 用化整法往往得偽根 取上節第 7, 8 兩題論之。

[例一] 解方程式

$$1 + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-1} = \frac{2}{(x-2)(1-x)}. \quad (1)$$

[解法] 用化整法去分母, 得

$$(x-2)(x-1) + x-1 + 2(x-2) = -2. \quad (2)$$

解之, 得 $x = \pm 1$

[驗算] 以 $x = -1$ 代入原方程式, 得

$$1 - \frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{3}, \text{ 左右相合。}$$

以 $x = 1$ 代入原方程式, 則得

$$1 - 1 + \frac{2}{0} = \frac{2}{0},$$

分數的分母不可爲 0，故 1 不合原方程式。

∴ $x = -1$ 爲原方程式的根；而 $x = 1$ 則非其根。我們叫牠做偽根，這種偽根應當除去。

[例二] 試解方程式 $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x(x+1)} = 0$ 。 (1)

[解法] 用化整法去分母，得 $x+1=0$ 。 (2)

解之，得 $x = -1$ 。

[驗算] 以 $x = -1$ 代入原方程式，則得

$$\frac{1}{0} + \frac{2}{-0} = 0。$$

這等式無意義，故 -1 是原方程式的偽根。

§ 106. 偽根何自而來？欲知偽根的來源，先要明白下面幾條原理：

(1) 方程式的兩邊，可各加（或減）以任何數或任何代數式而不變其根。

(2) 方程式的兩邊，可各乘（或除）以任何永不爲零的代數式而不變其根。

(3) 方程式的兩邊，若各乘以可以爲零的代數式，那麼，所得新方程式，往往增入偽根。

(4) 方程式的兩邊，若各除以可以爲零的代數式，則所得新方程式，往往失去真根。