空间解析几何

存题多解法

空间解析几何百题多解法

莫光强　编著

广西教育出版社

空间解析几何百题多解法
莫光强　编著
☆
广西教育出版社出版
（南宁市七一路7号）
广西新华书店发行　广西民族印刷厂印刷
*
开本 850×1168 1/32　9.875 印张　220 千字
1990年5月第1版　1990年5月第1次印刷
印 数：1—3500册
ISBN 7-5435-0819-2/G · 646
定 价：3.70 元

前　言

空间解析几何是高等院校数学专业一年级开设的一门基础课．本书作者教授这门课程多年，在教学中深深体会到培养学生的解题能力，是提高教学质量的重要手段，特别是通过对例题的多种解法，引导学生沿着不同方向思考，有助于学生掌握空间解析几何的基本理论、解题方法和技巧，而且效果明显．因此作者注意搜集、整理教学中的有关体会，日积月累构成了本书的基础．

本书选题内容包括矢量代数，平面，空间直线，特殊曲面，二次曲面和一般二次曲面方程等六部分，所选题目具有一定的典型性，解法上既有一般方法，又有相当的技巧，每题包括分析、解法、简评三部分．分析部分着重说明解题思路，指出解题的症结所在，目的是引导读者把握解题关键，学会思考；解法部分列出推理和演算过程；简评部分则将各种解法加以分析比较，说明各种解法的特点，从分析对比中归纳出最简便的解法．

本书可供普通高校、成人高校的学生和广大自学者学习参考．作者希望本书在拓宽思路，提高解题能力方面对读者有所裨益．由于作者水平和时间所限，不妥之处一定很多，诚心就教于读者，并欢迎读者提供更好的解法．

本书在编写过程中，作者得到广西师院数学系教授李忠傧先生的热情关怀和帮助，他提供了宝贵意见，在此向李忠傧教授表示衷心地感谢．

作者

1989年5月

目　　录

一、矢 量 代 数

1. 在四边形$ABCD$中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}-2\vec{b}$，$\overrightarrow{CD}=3\vec{a}-4\vec{b}+2\vec{c}$，对角线$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BD}$的中点分别为$E$，$F$，求$\overrightarrow{EF}$.

分析1 依题设知$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$是矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$的线性组合，要求$\overrightarrow{EF}$，只需把$\overrightarrow{EF}$分解成矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$的线性组合. 由图1可以看出，从折线$EABF$和$ECDF$可以找到$\overrightarrow{EF}$与$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$之间的关系，从而得到$\overrightarrow{EF}$可以用矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$线性表示的式子.

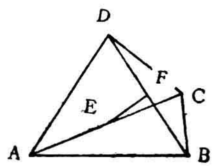

图 1

解法1 如图1，从折线$EABF$和$ECDF$得

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF},$$

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF},$$

两式相加得

$$2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}.$$

$\because$ $\overrightarrow{DF}=-\overrightarrow{BF}$，$\overrightarrow{EA}=-\overrightarrow{EC}$，

$$\therefore\ 2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$$
$$=\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{a}-4\vec{b}+2\vec{c}$$
$$=4\vec{a}-6\vec{b}+2\vec{c}.$$

即 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\left(4\vec{a}-6\vec{b}+2\vec{c}\right)=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}.$

分析2 要求$\overrightarrow{EF}$，需使$\overrightarrow{EF}$可用$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$线性表示，从而

得到 $\overrightarrow{EF}$ 可用 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 线性表示. 在图 2 中，若取 BC 的中点 H，得 $\overrightarrow{EH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{HF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$，由此可得到 $\overrightarrow{EF}$ 可用 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$ 表示的线性表示式.

解法2 如图 2，取边 BC 的中点 H，则有 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HF}$，$\overrightarrow{EH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，

$$\overrightarrow{HF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}.$$

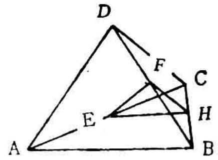

图 2

于是

$$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{a}-4\vec{b}+2\vec{c}\right)$$

$$=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}.$$

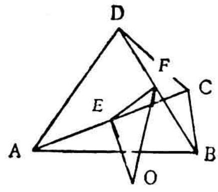

图 3

分析3 如图 3. 对于定点 O，有 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}=\vec{F}-\vec{E}$，$\vec{F}$ 与 $\vec{D}+\vec{B}$ 共线，$\vec{E}$ 与 $\vec{A}+\vec{C}$ 共线；由此求得 $\overrightarrow{EF}$ 可用 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$ 表示的线性表示式.

解法3 对于定点 O，有

$$\overrightarrow{EF}=\vec{F}-\vec{E},\qquad \vec{E}=\frac{1}{2}\left(\vec{A}+\vec{C}\right),$$

$$\vec{F}=\frac{1}{2}\left(\vec{B}+\vec{D}\right),$$

于是有 $$\overrightarrow{EF}=\vec{F}-\vec{E}=\frac{1}{2}\left(\vec{B}+\vec{D}-\vec{A}-\vec{C}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\vec{B}-\vec{A}+\vec{D}-\vec{C}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{a} - 4\vec{b} + 2\vec{c}\right)$$

$$= 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}.$$

简评 三种解法的关键是把矢量$\overrightarrow{EF}$分解成矢量$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$的线性组合. 解法1从图1中的折线$EABF$和$ECDF$直接求得$\overrightarrow{EF}$是$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{CD}$的线性组合. 解法2取BC边上的中点H，则有$\overrightarrow{EH}$与$\overrightarrow{AB}$共线，$\overrightarrow{HF}$与$\overrightarrow{CD}$共线，由此可得$\overrightarrow{EF}$由$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$表示的线性表示式.解法3取定点O，用半径矢量方法可得：①$\vec{E}$由$\vec{A}$，$\vec{C}$线性表示；②$\vec{F}$由$\vec{B}$，$\vec{D}$线性表示，由①、②得到$\overrightarrow{EF}$由$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$表示的线性表示式. 三种解法的思路简明，解法也较简便.

2. 设O是$\triangle ABC$内的任意一点，D，E和F分别为三条边上的中点，试证

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}. \qquad (1)$$

分析1 将矢量$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OF}$分别写成$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$的线性组合，然后三个组合式两边分别相加即可得(1).

证法1 如图4，因为D，E和F分别为AB，BC，AC的中点，故有

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right),$$

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right),$$

$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right).$$

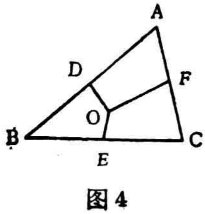

图4

上面三个等式两边分别相加，得

$$\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)$$
$$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC},$$

即(1)式立.

分析2 如图4，由$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CF}$可推出(1)式成立.

证法2 如图4，因为D，E和F分别为AB，BC和AC的中点，于是

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$
$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$
$$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA},$$

将上面三个等式两边分别相加，得

$$\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$$
$$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)$$

$$\because\quad \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0},$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

简评 两种证法都先求矢量$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OF}$，然后将它们相加，思路相同，但求矢量$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OF}$的方法不同. 证法1利用三角形中线矢量公式求得$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OF}$；证法2在$\triangle OAD$，$\triangle OBC$，$\triangle OCE$的边上设置矢量，由矢量加法的三角

形规则求得$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OF}$．比较两种证法，以证法1较为简便．

3．用矢量法证明平行四边形对角线互相平分．

分析1 如图5，设对角线BD的中点为O，要证明对角线互相平分，需证明点O也是AC的中点，即证明$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$．

证法1 如图5，取点O为对角线BD的中点，则

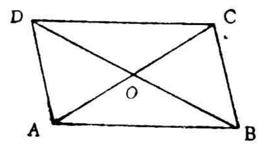

图5

$$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO},$$

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}.$$

$$\because\quad \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC},\quad \overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB},$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}.$$

即O是对角线AC的中点，故命题成立．

分析2 如图6，设O，O'分别为对角线AC，BD的中点，要证AC，BD互相平分，可证点O，O'重合，即证$\overrightarrow{OO'}=\vec{0}$或证$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AO'}$．

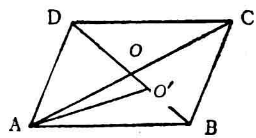

图6

证法2 如图6，设对角线AC，BD的中点分别为O，O'，则

$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC},\quad \overrightarrow{AO'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

因此 $\overrightarrow{AO'}=\overrightarrow{AO}$，即$O$，$O'$重合．

分析3 如图7，在对角线AC，BD上分别任意取一点M，N，当M、N重合时，即得AC与BD的交点O．若O是AC，BD的中点，可证$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$．

证法3 如图7，在$\overrightarrow{AC}$上任意取一点M，在$\overrightarrow{BD}$上任意取一点N，则有

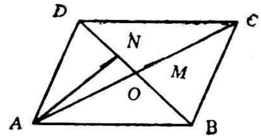

图 7

$$\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AC}=t(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}),$$

$$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{DB}$$

$$=\overrightarrow{AD}+\lambda(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}).$$

当M与N重合时，即得$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{BD}$的交点O，于是有

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AN},$$

即
$$t(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AD}+\lambda(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}),$$

整理得

$$(t-\lambda)\overrightarrow{AB}+(\lambda+t-1)\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{0}.$$

因为AB，AD不共线，故

$$t-\lambda=0,\quad \lambda+t-1=0.$$

解之得
$$t=\lambda=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}.$$

同理可证$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$，因此命题得以证明.

简评 三种证法考虑问题的出发点都不同. 证法1先取定$\overrightarrow{BD}$的中点O，然后证明O也是$\overrightarrow{AC}$的中点；证法2先取$\overrightarrow{BD}$的中点O'，$\overrightarrow{AC}$的中点O，然后证明O'与O重合；证法3先在$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BD}$上分别任取点M，N，当M与N重合时就得$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{BD}$的交点O，然后证明点O是$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BD}$的中点. 显然，证法1与证法2简捷明了.

4．用矢量法证明梯形两腰中点连线平行于上、下底边且等于它们长度和的一半．

分析1 如图8，E，F分别为AD, BC的中点，且$AB \parallel DC$，于是$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{DC}$共线，即$\overrightarrow{AB}=t\overrightarrow{DC}$．因此要证明 梯形 的中位线$EF$平行于底边$AB$、$BC$，只需证明$\overrightarrow{EF}$与$\overrightarrow{AB}$或$\overrightarrow{DC}$共线．在图8中，由折线$EDCF$与$EABF$可求得$2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$，由此推出$\overrightarrow{EF}$、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{DC}$共线，且有

$$|\overrightarrow{EF}|=\frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{DC}\right|\right).$$

证法1 如图8，E，F分别为梯形两腰AD，BC的中点，则

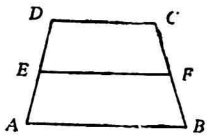

图8

$$\overrightarrow{ED}=-\overrightarrow{EA},\ \overrightarrow{FC}=-\overrightarrow{FB},$$

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF},$$

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF},$$

$$\therefore\quad 2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$$
$$=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}.$$

又$\because$ $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DC}$同向，

$\therefore$ $\overrightarrow{AB}=t\overrightarrow{DC}$，$t>0$，于是有

$$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\left(1+t\right)\overrightarrow{DC},$$

且有 $$\left|\overrightarrow{EF}\right|=\frac{1}{2}\left(1+t\right)\left|\overrightarrow{DC}\right|=\frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{DC}\right|+t\left|\overrightarrow{DC}\right|\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{DC}\right|+\left|\overrightarrow{AB}\right|\right).$$

因此$\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$，且$|\overrightarrow{EF}|=\frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{DC}\right|\right)$，

故命题得以证明.

分析2 如图9，作矢量$\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{EB}$，由三角形中线矢量公式得

$$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EB}\right),$$

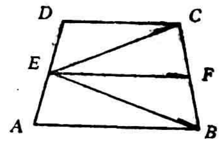

图 9

由此可推出 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}\right)$,

由题设知$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{DC}$共线，即 $\overrightarrow{AB}=t\,\overrightarrow{DC}$，可得

$$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\left(1+t\right)\overrightarrow{DC},$$

由此可推出$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{DC}\parallel\overrightarrow{FE}$，$\left|\overrightarrow{EF}\right|=\frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{DC}\right|\right)$.

证法2 如图 9，E，F分别为梯形两腰AD，BC的中点，则$\overrightarrow{ED}=-\overrightarrow{EA}$，且有

$$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}\right).$$

又$\because$ $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{DC}$同向，

$\therefore$ $\overrightarrow{AB}=t\,\overrightarrow{DC}$，$t>0$，于是

$$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\left(1+t\right)\overrightarrow{DC},$$

且有 $\left|\overrightarrow{EF}\right|=\frac{1}{2}\left(1+t\right)\left|\overrightarrow{DC}\right|=\frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{DC}\right|+t\left|\overrightarrow{DC}\right|\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{DC}\right|\right).$$

因此$\overrightarrow{EF}\parallel\overrightarrow{DC}\parallel\overrightarrow{AB}$，且有$\left|\overrightarrow{EF}\right|=\frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{DC}\right|\right)$.

故命题得以证明．

分析3 如图10，任取一定点O，得点E，F，A，B，C，D对于点O的半径矢量，于是 $\overrightarrow{EF}=\vec{F}-\vec{E}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{B}-\vec{A}$，$\overrightarrow{DC}=\vec{C}-\vec{D}$．我们先证明$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DC}$共线，由此推出

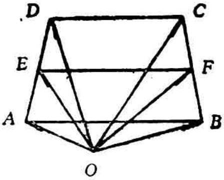

图10

$$\left|\overrightarrow{EF}\right|=\frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{DC}\right|\right).$$

证法3 如图10，E，F是梯形两腰AD，BC的中点，取一定点O，则

$$\overrightarrow{EF}=\vec{F}-\vec{E},\ \overrightarrow{AB}=\vec{B}-\vec{A},\ \overrightarrow{DC}=\vec{C}-\vec{D},$$

且有 $\vec{E}=\frac{1}{2}\left(\vec{A}+\vec{D}\right)$，　　$\vec{F}=\frac{1}{2}\left(\vec{B}+\vec{C}\right)$，

于是

$$\vec{F}-\vec{E}=\frac{1}{2}\left(\vec{B}+\vec{C}\right)-\frac{1}{2}\left(\vec{A}+\vec{D}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\vec{B}-\vec{A}+\vec{C}-\vec{D}\right).$$

又因为$\vec{B}-\vec{A}$，$\vec{C}-\vec{D}$共线且同向，故有

$$\vec{B}-\vec{A}=t\left(\vec{C}-\vec{D}\right),\quad t>0.$$

$$\therefore\quad \vec{F}-\vec{E}=\frac{1}{2}\left(1+t\right)\left(\vec{C}-\vec{D}\right).$$

因此$\vec{F}-\vec{E}$，$\vec{C}-\vec{D}$，$\vec{B}-\vec{A}$共线，即$\overrightarrow{EF}\parallel\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{DC}$，且有

$$\left|\vec{F}-\vec{E}\right|=\frac{1}{2}\left(1+t\right)\left|\vec{C}-\vec{D}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{C}-\vec{D}\right|+t\left|\vec{C}-\vec{D}\right|\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{C}-\vec{D}\right|+\left|\vec{B}-\vec{A}\right|\right),$$

即 $$\left|\overrightarrow{EF}\right|=\frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{DC}\right|+\left|\overrightarrow{AB}\right|\right).$$

故命题得以证明.

简评 三种证法推出了梯形中位线矢量

$$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right),$$

并由此使命题得以证明. 证法 1 直接在图中的折线 $EDCF$ 和 $EABF$ 上设置矢量进行推断；证法 2 在图中连结 E，C 和 E，B 作矢量 $\overrightarrow{EC}$ 和 $\overrightarrow{EB}$，利用三角形中线矢量公式进行推断；证法 3 则取一定点 O，采用半径矢量的方法. 三种证法，以证法 1，证法 2 为简便.

5. 在$\triangle ADB$中，G为重心，在边AO、BO上取P、Q，使 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ}=n\overrightarrow{OB}$，且 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=3$，则$P$、$G$、$Q$三点共线.

分析1 如图11，要证P、G、Q三点共线，需证$\overrightarrow{PG}$与$\overrightarrow{GQ}$共线，即$\overrightarrow{PG}=\lambda\overrightarrow{GQ}$.

证法1 设G是$\triangle AOB$的重心，

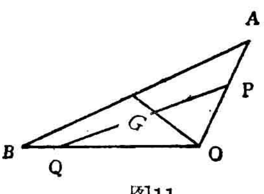

图11

则

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right).$$

$$\because\quad \overrightarrow{PG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OP},$$

$$\overrightarrow{GQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OG},$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{PG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)-m\overrightarrow{OA}$$

$$=\frac{1}{3}\left[\left(1-3m\right)\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right],\tag{1}$$

$$\overrightarrow{GQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OG}=n\overrightarrow{OB}-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left[-\overrightarrow{OA}+(3n-1)\overrightarrow{OB}\right].\tag{2}$$

$$\because\quad \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=3,$$

$$\therefore\quad (3m-1)(3n-1)=1.\tag{3}$$

由(1)，(2)，(3)得

$$\overrightarrow{PG}=\frac{1}{3}\left[(1-3m)\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right]$$

$$=\frac{1}{3}(3m-1)\left[-\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3m-1}\overrightarrow{OB}\right]$$

$$=\frac{1}{3}(3m-1)\left[-\overrightarrow{OA}+(3n-1)\overrightarrow{OB}\right]$$

$$=(3m-1)\overrightarrow{GQ}.$$

因此$\overrightarrow{PG}$与$\overrightarrow{GQ}$共线，即点P，G，Q三点共线。

分析2 要证P，G，Q三点共线，需证

$$\overrightarrow{OG}=\lambda_1\overrightarrow{OP}+\lambda_2\overrightarrow{OQ}，且\ \lambda_1+\lambda_2=1.$$

证法2 因为G是$\triangle AOB$的重心，于是有

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{m}\overrightarrow{OP}+\frac{1}{n}\overrightarrow{OQ}\right)$$

即
$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3m}\overrightarrow{OP}+\frac{1}{3n}\overrightarrow{OQ},$$

$$\frac{1}{3m}+\frac{1}{3n}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)=1.$$

因此P，Q，G三点共线。

分析3 要证P，G，Q三点共线，需证 $\overrightarrow{PG}\times\overrightarrow{GQ}=\vec{0}$。

证法3 因为G是$\triangle AOB$的重心，于是

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right).$$

$$\because\quad \overrightarrow{PG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)-m\overrightarrow{OA}$$

$$=\frac{1}{3}\left[(1-3m)\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right],$$

$$\overrightarrow{GQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OG}=n\overrightarrow{OB}-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left[-\overrightarrow{OA}+(3n-1)\overrightarrow{OB}\right],$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{PG}\times\overrightarrow{GQ}$$

$$=\frac{1}{9}\left[(1-3m)\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right]\times\left[-\overrightarrow{OA}+(3n-1)\overrightarrow{OB}\right]$$

$$=\frac{1}{9}\left\{\left[(1-3m)\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right]\times\left(-\overrightarrow{OA}\right)\right.$$

$$\left.+\left[(1-3m)\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right]\times\left[(3n-1)\overrightarrow{OB}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{9}\left[\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right)+(1-3m)(3n-1)\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{9}[(1-3m)(3n-1)+1]\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right).$$

$$\because\quad \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=3,\qquad\therefore\quad (1-3m)(3n-1)+1=0.$$