阅卷组组长书系

主编 张天德 李仁所 李 擂

考研数学

试题精选精解

高等数学600题

紧跟大纲 全面透视最新命题趋势

全面收集 历年全真试题精心筛选

科学分类 精心编排梳理复习思路

深层详解 提供规范权威多样分析

山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

主　编　张天德　李仁所　李　擂
副主编　窦　慧　张　锋　刘长文
綦明男　孙钦福　宋清岳
李　勇

阅卷组组长书系

考研数学
试题精选精解
高等数学600题

山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

考研数学试题精选精解：高等数学600题/张天德，李仁所，李擂主编.—济南：山东科学技术出版社，2013.3
ISBN 978-7-5331-6510-9

Ⅰ.①考… Ⅱ.①张… ②李… ③李… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—题解 Ⅳ.①013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第035217号

考研数学试题精选精解
——高等数学600题
主编 张天德 李仁所 李 擂

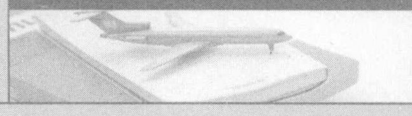
出版者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路16号
邮编：250002 电话：(0531)82098071
网址：www.lkj.com.cn
电子邮件：sdkj@sdpress.com.cn

发行者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路16号
邮编：250002 电话：(0531)82098071

印刷者：山东新华印务有限责任公司
地址：济南市世纪大道2366号
邮编：250104 电话：(0531)82079112

开本：787mm×1092mm 1/16
印张：15.5
版次：2013年3月第1版第1次印刷

ISBN 978-7-5331-6510-9
定价：30.00元



Foreword

序

纵观考研数学辅导教材市场，鱼龙混杂，既有结构严谨、内容详实的名家名作，也不乏毫无新意的平庸之作、东拼西凑的剽窃之作，张天德教授的这本《考研数学试题精选精解——高等数学600题》令我耳目一新。

张天德教授近年来一直在全国十几个城市的大型考研辅导班授课，深受全国各地考生的欢迎。同时张教授也是我国硕士研究生入学考试数学阅卷组的负责人，之前已有数十本教材出版。为了创作一本实用的考研数学辅导教材，正确引导广大考生进行研究生入学考试的总复习，张教授结合他十几年的考研辅导经验，投入了大量心血，搜集相关资料，写成了针对广大考研学生的《考研数学试题精选精解——高等数学600题》一书。

浏览过后，我觉得这本书特点鲜明，对真题进行了科学的分类和规范、详细的解答，书中16年的考研真题及详解无一不是张教授多年教学和研究心血的结晶。

历年研究生数学考试试题，全面体现和反映了《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求，体现了考试的重点、难点，也充分展示了重点题型。作为多年从事考研数学辅导和参与命题工作的老师，我深知在考研数学复习中，一定量的真题训练是必不可少的，真题的掌握和吃透应是备考的必由之路，而对历年真题进行科学分类和全面解析正是本书的重点也是本书的特色所在。

张教授从1998年至2013年共计16年数学考试的试卷中精选出真题进行了解析，这些题目是历年来研究生考试数学试题的精华，集中反映了数学试题的考核重点和典型题型。张教授的这本《考研数学试题精选精解——高等数学600题》正是切合了广大考研学生的需要，可以有效地帮助考生解决真题复习这一备考过程中的重要问题。

这本书的栏目设置也颇有新意。本章概括、考纲预览、真题详解、名师点拨、方法综述，这五大新颖的栏目详尽解析了考研数学最新大纲，简洁概括了各章学习及考查的重点内容，使广大考研学生能够深入了解各个知识点的内容和命题方向，从而把握备考的重点和难点，找到解决问题的关键、技巧和规律，解决考研学子在考研复习过程中的问题，使考研数学的备考复习更加有效。

我认为这本书不愧为一本实用、新颖的考研数学复习教材，也是编者多年进行大学数学教学和考研辅导实践经验的总结。这本书不仅可作为硕士研究生入学考试应试者的复习用书，也可作为正在学习高等数学的高等院校学生的参考书。

作为广大考研学生的“老”朋友，我十分高兴地向大家推荐这本具有较高实用价值的图书，相信对广大考生考研数学备考会有一定帮助。

清华大学数学科学系

Preface

前　言

2013年国家教育部对硕士研究生入学考试数学大纲进行了修订，大纲变动不大，但也增加了一些新知识点，这对考生的要求进一步增强。新的变化、新的要求，使数学在考研复习中的重要地位更加令人不敢忽视。一边是考试要求的不断提高，一边是众多学子因为数学分数过低而含泪折戟、败走麦城。数学，越来越成为广大考生在考研路上难以逾越的一道坎、难以释怀的一个结。

历年研究生数学考试试题，全面体现和反映了《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求，体现了考试的重点、难点，也充分展示了重点题型。虽然每年的考研试题不尽相同，但是考试的知识范围和结构基本相同。熟悉历年试题及其解题方法不仅可以进一步掌握考试内容、考试要求，而且可以分析和提炼出考核重点、掌握试题特点、提高解题能力。

本书是一本理工类、经济类和农学门类考研学生备考数学的教材（自2009年始数学三、四合并为数学三），由长期从事考研数学辅导和大学数学教学、研究的一线名师编写而成。主编长期担任全国硕士研究生入学考试山东阅卷组组长，对历年考试的试题出题难度、方向理解透彻，对考试的评分标准掌握准确，今后考试变化趋势分析预测精准。在详细研究、系统整理历年研究生数学考试试题的基础上，根据试题类型和涉及的知识内容对其进行了分类，给出了标准的解题方法和常用技巧。每道试题前用数码标明该试题使用的年份、卷种、题分等信息。如某题前括号内的数码为2013104，表示此题为2013年数学一试卷中的一道4分题；如某题前括号内的数码为2013N10，则表示此题为2013年农学门类联考试卷中的一道10分题。

本书从1998～2013年研究生入学考试的全部试题中精选600余道典型试题，通过全面分析考研命题特点，合理设计编排模式和知识点出场顺序，把握主要知识点以及知识点间的关联特性，感悟常用的解题思路与方法，我们总结出复习的范围、重点和应试解题的思路与技巧，独具匠心地设计、推出了这本高效、实用、新颖的考研数学复习教材《考研数学试题精选精解——高等数学600题》，将给您的数学复习带来令人欣喜的显著效果和快速提升。

本书最大的特点是紧跟最新考研数学大纲，深刻领会大纲精髓，全面覆盖考研知识点，在研究诸知识点相互关系和认知规律的基础上，研习和解答历年考研数学真题，对真题进行科学分类和详细解答，使广大考生能够通过对真题的认真演练，揭开考研数学的神秘面纱，达到考试时胸有成竹、应对自如的境界。本书各栏目特点：

本章概括 简洁概括本章学习及考查内容，切中本章考试重点，使广大考生在备考复习的过程中目标明确，有的放矢。

考纲预览 展示最新考试大纲要求，详尽解析考研数学最新大纲，便于考生统览全章，高屋建瓴，把握复习方向。

真题详解 提供了 1998～2013 年试题及解析，详尽解析每道例题，精选相应试题供考生进行实战演练，将例题按知识点分类为小节，使考生能系统地掌握考点辐射的各种题型，举一反三，并用灵活的经典真题来掌握各个知识点，做到真正意义上的知识点灵活掌握。

名师点拨 考研辅导一线名师为您点拨，权威揭示数学方法，使考生在回顾重点知识点的同时，深入了解该知识点的内容和命题方向。

方法综述 资深考研辅导专家智慧结晶，以便帮助考生掌握各种基本题型的解题思路和方法，找到解决问题的关键、技巧和规律。

本书由全国硕士研究生入学考试山东阅卷组组长张天德教授、李仁所教授和考研辅导名师李擂主编。窦慧、张锋、刘长文、綦明男、孙钦福、宋清岳、李勇副主编。

衷心希望我们精心打造的这本《考研数学试题精选精解——高等数学 600 题》能对您有所裨益。相信本书会为备考 2014 年硕士研究生入学考试的学子带来好运！

编者

2013 年 3 月

考研数学试题精选精解

——高等数学600题

Contents

目录

第一章 函数·极限·连续

本 章 概 括

函数是微积分讨论的主要对象，它以极限理论为基础，在研究函数时我们总是通过函数值 $f(x)$ 的变化来看函数关系的性质，所以应该用运动变化的观点来掌握函数. 极限与函数的连续性理论是微积分的基础，如何用已知的、可求的来逼近未知的、要求的，用有限来逼近无限，在无限变化的过程中考查变量的变化趋势，从有限过渡到无限，这是本章需掌握的基本思想.

第一节 函 数

考纲预览

最新颁布的全国硕士研究生入学考试数学考试大纲对本节的要求是

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示方法，并会建立函数关系式.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数概念.

纵观自 1998 年至今的历年考研数学试题，我们发现有关函数的考查有两种情况：一是直接讨论分段函数或复合抽象函数的表达式，二是在综合计算题中使用有关函数的四大特征（有界性、单调性、奇偶性和周期性）.

作为备考硕士研究生入学考试的考生复习数学课程来讲，首先要做的就是对历年来的考研真题进行研究，找出规律，然后在此基础上进行拓展，以达到掌握重点、轻取高分的目的.

真题详解

1. (2001203) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$

则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于______.

(A) 0　　(B) 1

(C) $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

解： 由 $f[f(x)]=1$ 得　$f\{f[f(x)]\}=1$

故应选(B).

2. (2004304, 2004404) 函数

$$f(x)=\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$$

在下列哪个区间内有界______.

(A)$(-1,0)$　　(B)$(0,1)$

(C)$(1,2)$　　(D)$(2,3)$

解： 当 $x\neq 0,1,2$ 时，$f(x)$ 连续，

而 $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=-\dfrac{\sin 3}{18}$，　$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\dfrac{\sin 2}{4}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\dfrac{\sin 2}{4}$，　$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\infty$

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$

所以函数 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内有界.

故应选(A).

【名师点拨】一般地,若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界;若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续,且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在,则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

方法综述

1. "复合"是函数的一种基本运算,"复合"问题是有关函数表达式的重要问题之一.主要题型为

(1) 已知 $f(x)$,$g(x)$,求 $f[g(x)]$.这类问题中要特别注意分段函数的复合,采取的方法一般应按照由自变量开始,先内层后外层的顺序逐次复合.

(2) 设 $f[g(x)]=\varphi(x)$,其中 $\varphi(x)$ 为已知函数,已知 $f(x)$ 求 $g(x)$,或已知 $g(x)$ 求 $f(x)$.这类问题是讨论反函数的问题.

2. 本节中我们应特别注意函数四大特性的讨论,这类问题常用定义来解题.

第二节 极 限

考纲预览

最新颁布的全国硕士研究生入学考试数学考试大纲对本节的要求是

1. 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念.

2. 了解极限的性质与极限存在的两个准则,掌握极限的四则运算法则,会应用两个重要极限.

3. 会应用等价无穷小代换定理求极限.

本节的重点内容是极限,我们既要准确理解极限的概念和极限存在的充要条件,又要能正确求出各种极限.求极限的方法很多,从真题详解中不难看出来.

真题详解

一、极限的定义与性质 ……………………………

3. (1999203)"对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$,总存在正整数 N,当 $n\geqslant N$ 时,恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$"是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的______.

(A) 充分条件但非必要条件

(B) 必要条件但非充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既非充分条件又非必要条件

解: 由数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的定义得"对任意给定的 $\varepsilon_1>0$,总存在正整数 N_1,当 $n>N_1$ 时,恒有 $|x_n-a|\leqslant\varepsilon_1$".显然可推导出"对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$,总存在正整数 N,当 $n\geqslant N$ 时,恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$."

反过来,若有"对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$,总存在正整数 N,当 $n\geqslant N$ 时,恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$",则对于任意的 $\varepsilon_1>0$(不妨设 $0<\varepsilon_1<1$,当 $\varepsilon_1>1$ 时,取 $\bar{\varepsilon}_1$,$0<\bar{\varepsilon}_1<1<\varepsilon_1$,代替即可),取 $\varepsilon=\dfrac{1}{3}\varepsilon_1>0$,存在正整数 N,当 $n\geqslant N$ 时,恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon=\dfrac{2}{3}\varepsilon_1<\varepsilon_1$,令 $N_1=N-1$,则满足"对任意给定的 $\varepsilon_1>0$,总存在正整数 N_1,当 $n>N_1$ 时,恒有 $|x_n-a|\leqslant\varepsilon_1$".

可见上述两种说法是等价的.

故应选(C).

【名师点拨】数列极限定义中有"任意小"和"无限大"两个术语,二者均不是确定的值,至于它们用什么符号表示并不重要,应注意 2ε 同样是一个无穷小量.

4. (2000303,2000403) 设对任意的 x,总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ ______.

(A) 存在且等于零

(B) 存在但不一定为零

(C) 一定不存在

(D) 不一定存在

解:若取 $\varphi(x)=x, f(x)=x+\mathrm{e}^{-|x|}, g(x)=x+2\mathrm{e}^{-|x|}$. 此时 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$, 但 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不存在;若取 $\varphi(x)=0, f(x)=\mathrm{e}^{-|x|}, g(x)=2\mathrm{e}^{-|x|}$,此时 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ 存在.

故应选(D).

5. (1998203)设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,则下列断言正确的是______.

(A) 若 x_n 发散,则 y_n 必发散

(B) 若 x_n 无界,则 y_n 必有界

(C) 若 x_n 有界,则 y_n 必为无穷小

(D) 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小,则 y_n 必为无穷小

解:(A),(B) 显然不对. 若 x_n 有界,且 y_n 为无穷小,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,但反之不一定. 所以(C) 也不对. (D) 正确. 因为,若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=0$. 而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{\dfrac{1}{x_n}}=0$. 所以必有 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$.

故应选(D).

6. (2003104,2003204)设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0, \lim\limits_{n\to\infty}b_n=1, \lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有______.

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立

(B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在

(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

解:取 $a_n=\dfrac{2}{n}, b_n=1, c_n=\dfrac{n}{2}, (n=1,2,\cdots)$

则选项(A)、(B)、(C) 均可排除.

对于选项(D),由 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1, \lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$ 知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_nc_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{c_n}=0,$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n=\infty$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

故应选(D).

【名师点拨】

为了正确而迅速地解答选择题,首先要对题意和备选项进行整体的对比考查,弄清题目的考查目标,从题干和备选项中获得解决问题的充分信息,其次选择适当的解题方法,下面归纳几种解题方法,供读者参考.

直接法:直接从题目的已知条件出发,经过严密的推导、合理的运算,从而得出结果和判断的方法. 其选择过程是先计算,然后将计算的结果与备选项对照,找到正确选项. 当题目中给出已知条件,备选答案列出所需求的结果时,一般首先考虑直接法.

验证法:把可供选择的各备选项代入题目中的已知条件或将题干中的条件代入备选项进行验算,从而得到正确选项的方法.

排除法:又叫筛选法,通过找出已知和结论的矛盾,用特例或特殊值验证或举出反例等方法,排除错误选项,从而得到正确选项的方法.

图象法:通过画出直观的几何图形,帮助分析,便于做出正确的选择的方法.

每种方法都不是孤立的,有时同一试题可用多种方法求解,有时需借用几种方法综合求解.

7. (2007104,2007204) 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数,且 $f''(x)>0$,令 $u_n=f(n)\ (n=1,2,\cdots)$,则下列结论正确的是______.

(A) 若 $u_1>u_2$,则 $\{u_n\}$ 必收敛

(B) 若 $u_1>u_2$,则 $\{u_n\}$ 必发散

(C) 若 $u_1<u_2$,则 $\{u_n\}$ 必收敛

(D) 若 $u_1<u_2$,则 $\{u_n\}$ 必发散

解:由 $f''(x)>0\ (x>0)$ 得 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调上升. $f(x)$ 只有以下三种情形:

(1) 由存在 $x_0\in(0,+\infty), f'(x_0)=0$ 得

$$f'(x)\begin{cases}<0, & 0<x<x_0,\\ =0, & x=x_0,\\ >0, & x>x_0\end{cases}$$

从而 $f(x)$ 在 $(0,x_0]$ 单调递减,在 $[x_0,+\infty)$ 单调递增,

又 $x>x_1>x_0$ 时

$f(x) > f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$,

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(2) 对所有 $x \in (0, +\infty)$, $f'(x) > 0$ 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(3) 对 $\forall x \in (0, +\infty)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减，则或 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ∃ 或 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

例如，$f(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f''(x) = \dfrac{2}{x^3} > 0 \ (x > 0)$.

$u_n = f(n)$ 单调递减，$\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$.

又如，$f(x) = \dfrac{1}{x} - x \Rightarrow f''(x) = \dfrac{2}{x^3} > 0 \quad (x > 0)$.

$u_n = f(n) = \dfrac{1}{n} - n$ 单调递减，但 $\lim\limits_{n\to+\infty} u(n) = -\infty$.

所以(A)、(B)不正确.

由(1),(2)得(C)不正确，而(D)正确.

故应选(D).

二、利用极限的四则运算定理求极限 ………

8. (1999205)求 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x) - x^2}$.

解：原式 $= \lim\limits_{x\to0} \left\{ \dfrac{\tan x - \sin x}{x[\ln(1+x) - x]} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}} \right\}$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to0} \frac{1 - \cos x}{\ln(1+x) - x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=\!=} \frac{1}{2} \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{\dfrac{-x}{1+x}} = -\frac{1}{2}$$

【名师点拨】含有根式函数的极限问题，一般应先有理化，然后再用四则运算法则、等价无穷小代换以及洛必达法则求极限，求极限过程中，先利用等价无穷小代换可使计算简单，另外非零因子项的极限要先计算出来. 如本题有理化后，应先把 $\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}}$ 的极限求出，再用洛必达法则计算就简便多了.

9. (2001203) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{x^2 + x - 2} =$ ______.

解：原式 $= \lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{(x+2)(x-1)}$

$$= \lim_{x\to1} \frac{2(1-x)}{(x+2)(x-1)} \cdot \lim_{x\to1} \frac{1}{\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x}}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{-2}{x+2} \cdot \lim_{x\to1} \frac{1}{\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{6}$$

故应填 $-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

【名师点拨】本题考查求极限的基本方法和极限的四则运算法则. 先对分母因式分解、分子有理化，然后约分并使用四则运算法则求解.

三、利用等价无穷小代换定理求极限 ………

10. (2004304, 2004404)若 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{e^x - a}(\cos x - b) = 5$，则 $a =$ ______, $b =$ ______.

解：由 $\lim\limits_{x\to0} \sin x(\cos x - b) = 0$

知 $\lim\limits_{x\to0} (e^x - a) = 0$，从而 $a = 1$.

而 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{e^x - a}(\cos x - b)$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{e^x - 1}(\cos x - b) = 1 - b = 5$$

得 $b = -4$.

故应填 $1, -4$.

【名师点拨】讨论极限的问题，首先要确定极限的类型，本题为“$\dfrac{0}{0}$”型，由此可确定参数的值.

11. (2005304, 2005404)极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2x}{x^2+1} =$ ______.

解：$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} x\dfrac{2x}{x^2+1} = 2$.

故应填 2.

12. (2009304) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} =$ ______.

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\cos x}(e^{1-\cos x}-1)}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$

$=\lim\limits_{x\to0}e^{\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\dfrac{x^2}{3}}$

$=e\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}}{\dfrac{x^2}{3}}=\dfrac{3e}{2}.$

故应填$\dfrac{3e}{2}$.

13. (2012310)求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$.

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to0}e^{2-2\cos x}\cdot\dfrac{e^{x^2-(2-2\cos x)}-1}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-2+2\cos x}{x^4}$

（无穷小的替换）

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-2\sin x}{4x^3}$ （洛必达法则）

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{6x^2}$ （洛必达法则）

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{2}x^2}{6x^2}$ （无穷小的替换）

$=\dfrac{1}{12}$

其中用到了两次等价无穷小的替换：$x\to0$，$e^{x^2-(2-2\cos x)}-1\sim x^2-2(1-\cos x)$；$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$

【名师点拨】对于$\dfrac{0}{0}$型未定式常用的求极限步骤为：

① 用等价无穷小的替换进行化简. 常用的等价无穷小为：当$x\to0$时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$(1+\beta x)^\alpha-1\sim\alpha\beta x$

② 利用洛必达法则. 注意只有$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式才能用洛必达法则.

14. (1999103)$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=$______.

解：原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sec^2x-1}{3x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2x}{3x^2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$

故应填$\dfrac{1}{3}$.

【名师点拨】等价无穷小代换不能在加减运算中使用，本题中因当$x\to0$时，$\tan\sim x$，$\sin x\sim x$，若直接代换，则得

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{x-x}{x^3}=0$$

从而导致错误结论.

15. (2003404) 极限$\lim\limits_{x\to0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=$______.

解：设$y=[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}$，则

$\lim\limits_{x\to0}\ln y=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\ln[1+\ln(1+x)]}{x}$

$=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=2$

所以$\lim\limits_{x\to0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to0}y$

$=\lim\limits_{x\to0}\exp(\ln y)=\exp(\lim\limits_{x\to0}\ln y)=e^2$

故应填e^2.

【名师点拨】幂指函数求极限常用对数法. 即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=\exp(\lim_{x\to x_0}g(x)\ln f(x))$$

16. (2004210)求极限

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right].$$

解法一：原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\exp\left(x\ln\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)\right)-1}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(2+\cos x)-\ln3}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2+\cos x}\cdot(-\sin x)}{2x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}$$

$$=-\frac{1}{6}.$$

解法二:原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\exp\left(x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)\right)-1}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

17. (2000203) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为______.

(A)0　(B)6　(C)36　(D)∞

解:由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$,根据极限与无穷小的关系知 $\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\alpha(x)$,其中 $\alpha(x)$ 为 $x\to 0$ 时的无穷小量.

故 $f(x)=x^2\alpha(x)-\dfrac{\sin 6x}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6+x^2\alpha(x)-\frac{\sin 6x}{x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\alpha(x)+\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}$$

$$=0+\lim_{x\to 0}\frac{6-6\cos 6x}{3x^2}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{x^2}$$

$$=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x}{2x}=36$$

故应选(C).

【名师点拨】解此题最易犯的错误,是不考虑 $f(x)$ 是否满足条件而使用洛必达法则,结果花费了不少时间还没能得到正确的结论. 其次不少人选(A),是认为

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 6x}{x}+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}.$$

在这里,用 6 替换 $\dfrac{\sin 6x}{x}$ 是错误的!

18. (2006104) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$______.

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$

故应填 2.

四、利用重要极限求极限 ……………………

19. (2000105) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

解: 因 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=2-1=1$$

故原式 $=1$.

【名师点拨】利用重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 计算极限时,必需具备两个条件

(1) 在给定的极限过程下为"$\dfrac{0}{0}$"型;

(2) 形如 $\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}$.

为了正确使用好这个极限,读者必须弄清下面是非问题

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin x}{x}=1$　(×);

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}=1$　(√)；

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$　(×)；

$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$　(√)；

$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=1$　(×)；

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=1$　(×).

20. (2008404)设 $0<a<b$,则

$\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=$______.

(A)a　(B)a^{-1}　(C)b　(D)b^{-1}

解: $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[a^{-n}\left(1+\dfrac{b^{-n}}{a^{-n}}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}a^{-1}\left[\left(1+\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{a}.$

故应选(B).

【名师点拨】重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=e$ 还有两种常用形式,它们是

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e,\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$

在利用这个重要极限时,必须具备两个条件

(1) 在给定极限过程下为"1^{∞}"型；

(2) 形如 $\left[1+\dfrac{1}{u(x)}\right]^{u(x)}$　$(u(x)\to\infty)$

或 $[1+u(x)]^{\frac{1}{u(x)}}$　$(u(x)\to 0)$.

计算时把求极限的算式拼成以上形式即得结果.

21. (2011204,2011304)

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^{x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=$______.

解法一: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^{x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\left(\dfrac{1+2^{x}}{2}-1\right)\right]^{\frac{1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{2^{x}-1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\dfrac{2^{x}-1}{2}\right)^{\frac{2}{2^{x}-1}}\right]^{\frac{2^{x}-1}{2\cdot x}}$

$=e^{\frac{1}{2}\ln 2}=e^{\ln\sqrt{2}}=\sqrt{2}$,

其中 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{2^{x}-1}{2}\right)^{\frac{2}{2^{x}-1}}=e$；

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{x}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{x}\cdot\ln 2}{2}=\dfrac{1}{2}\ln 2.$

解法二: 令 $y=\left(\dfrac{1+2^{x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$,

则 $\ln y=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+2^{x}}{2}$,

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\ln y=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2^{x})-\ln 2}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+2^{x}}\cdot 2^{x}\cdot\ln 2=\dfrac{1}{2}\ln 2=\ln\sqrt{2}$,

即: $\lim\limits_{x\to 0}y=\sqrt{2}$,

故应填 $\sqrt{2}$.

【名师点拨】利用洛必达法则求未定式的极限时应注意以下几点:

1) 只有未定式 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型才能用洛必达法则.

2) 对于未定式: $0\cdot\infty,\infty-\infty,0^{0},1^{\infty},\infty^{0}$ 必须将其化为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式后才能用洛必达法则.

3) 若条件满足,洛必达法则可连续使用任意有限次.

4) 在利用洛必达法则求极限时应与两个重要极限、等价无穷小代换、分子或分母有理化等方法结合在一起使用,以简化计算.

22. (2010104)极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^{2}}{(x-a)(x+b)}\right]^{x}=$

______.

(A) 1.　(B) e.　(C) e^{a-b}.　(D) e^{b-a}.

解: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^{2}}{(x-a)(x+b)}\right]^{x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^{2}}{x^{2}+(b-a)x-ab}\right]^{x}$

$=$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left[1+\dfrac{(a-b)x+ab}{x^{2}+(b-a)x-ab}\right]^{\frac{x^{2}+(b-a)x-ab}{(a-b)x+ab}}\right\}^{\frac{x[(a-b)x+ab]}{x^{2}+(b-a)x-ab}}$

$=e^{a-b}$.

故应选(C).