

探索未知

函数的巧妙运用

北京未来新世纪教育科学发展中心 编

新疆青少年出版社
喀什维吾尔文出版社

探索未知

函数的巧妙运用

北京未来新世纪教育科学发展中心 编

新疆青少年出版社
喀什维吾尔文出版社

图书在版编目(CIP)数据

探索未知/王卫国主编. —乌鲁木齐:新疆青少年出版社;喀什:喀什维吾尔文出版社, 2006. 8

ISBN 7-5373-1464-0

I. 探... II. 王... III. 自然科学—青少年读物 IV. N49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 097778 号

探索未知

函数的巧妙运用

北京未来新世纪教育科学发展中心 编

新疆青少年出版社 出版
喀什维吾尔文出版社

(乌鲁木齐市胜利路 100 号 邮编:830001)

北京市朝教印刷厂印刷

开本:787mm×1092mm 32 开

印张:300 字数:3600 千

2006 年 8 月第 1 版 2006 年 8 月第 1 次印刷

印数:1—3000

ISBN 7-5373-1464-0 总定价:840.00 元(共 100 册)

如有印装质量问题请直接同承印厂调换

前言

在半年之前,本编辑部曾推出过一套科普丛书,叫做《科学目击者》,读者反应良好。然而,区区一部丛书怎能将各种科学新知囊括其中?所未涉及者仍多。编辑部的同仁们也有余兴未尽之意,于是就有了这套《探索未知》丛书。

《科学目击者》和《探索未知》可以说是姊妹关系,也可以说是父子关系。说它们是姊妹,是因为它们在方向设定、内容选择上不分彼此,同是孕育于科学,同为中国基础科普而诞生。说它们是父子,则是从它们的出版过程考虑的。《科学目击者》的出版为我们编辑本套丛书提供了丰富的经验,让我们能够更好的把握读者们的需求与兴趣,得以将一套更为优秀的丛书呈献给读者。从这个层面上讲,《科学目击者》的出版成就了《探索未知》的诞生。

如果说《科学目击者》只是我们的第一个试验品,那么《探索未知》就是第一个正式成品了。它文字精彩,选

题科学,内容上囊括了数学、物理、化学、地理以及生物五个部分的科学知识,涵盖面广,深度适中。对于对科学新知有着浓厚兴趣的读者来说,在这里将找到最为满意的答复。

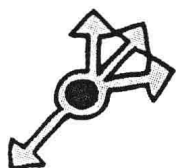
有了《科学目击者》的成功经验,让我们得以取其优、去其短,一直朝着尽善尽美的目标而努力。但如此繁杂的知识门类,让我们实感知识面的狭窄,实非少数几人所能完成。我们在编稿之时,尽可能地多汲取众多专家学者的意见。然而,百密尚有一疏,纰漏难免,如果给读者您的阅读带来不便,敬请批评指正。

编 者

目 录

变量相关的世界.....	1
永恒运动着的世界.....	1
谈“守株待兔”.....	3
对闭眼打转问题的探讨.....	7
“钟表定向”的科学原理	10
揭示星期几的奥秘	13
指数函数与对数函数	17
对数的发现过程	17
不朽的功绩	22
指数函数的威力	26
并非危言耸听	30
追溯和预测	33
变量中的常量	37

分布函数与概率	44
最小二乘法	44
奇妙的钟型曲线	47
漫谈选优	51
函数与图形	57
出类拔萃的“建筑师”	57
从狄多问题谈起	62
捷径的迷惑	67
波浪曲线	70
对称的启迪	74
函数与谜题	78
揭开“最速降落”问题的谜	78
从走迷宫到解题	82
直觉不能解题	85



变量相关的世界

永恒运动着的世界

世界万物都在时间长河中流淌着、变化着。它们从过去变化到现在，又从现在变化到将来。静止只是暂时的，运动却是永恒的。

也许没有什么能比闪烁在天空中的繁星更能引起远古人的遐想了。他们想像在天庭上有一个如同人世间繁华的街市，有一些本身发着亮光的星宿一直忠诚地、永恒不动地守护在天宫的特定位置，为了区别于月亮和行星，人们称之为恒星。其实，恒星的称呼是不确切的，只是由于它离我们太远了，以至于它们之间的任何运动，都慢得使人一辈子感觉不出来。

北斗七星，是北天区最为明显的星座之一，在北天的夜空是很容易辨认的。大概所有的人一辈子见到的北斗七星，总是一个勺子般的形状。人的生命太短暂了，几十



探索未知

年的时光,对于天文数字般的岁月,是几乎可以忽略不计的。然而有幸的是:现代科学的进展,使我们有可能从容地追溯过去和精确地预测将来。经过测算,现代人可以看到人类在十万年前、现在和十万年后应该看到和可以看到的北斗七星,它们的形状是大不一样的。

不仅天在动,而且地也在动。火山的喷发、地层的断裂、冰川的推移和泥石的奔流,这一切都还只是局部的现象。更令人不可思议的是,我们脚下的大地,也像水面上的船只那样,在地幔上缓慢地漂移着。

由此可见,这个世界的一切量,都跟随着时间的变化而变化。时间是最原始的自行变化的量,其他量则是因变量。一般地说,如果在某一变化过程中有两个变量 x 与 y ,对于变量 x 在研究范围内的每一个确定的值,变量 y 都有唯一确定的值和它对应,那么变量 x 就称为自变量,而变量 y 则称为因变量,或变量 x 的函数,记为:

$$y=f(x)$$

“函数”一词始用于公元 1692 年,最早见于德国数学家莱布尼兹的著作。记号 $f(x)$ 则是由瑞士数学家欧拉于公元 1724 年首次使用的。上面所讲的函数定义,属于德国数学家黎曼。我国于 1859 年引进函数概念,始见于清代数学家李善兰的译作。

一个量如果在所研究的问题中保持同一确定的数值,这样的量我们称为常量。常量并不是绝对的。如果某一变量在局部时空中,其变化是那样地微不足道,那么



这样的量,在这一时空中便可以看成常量。例如读者所熟知的“三角形内角和为 180° ”的定理,那只是在平面上才成立的。但绝对平的面是不存在的。即使是水平面,由于地心引力的关系,也是呈球面弯曲的。然而,这丝毫没有影响广大读者,去掌握和应用平面几何的这条定理。又如北斗七星,它前十万年与后十万年的位置是大不相同的。但在近几个世纪内,我们完全可以把它看成是恒定的,甚至可以利用它来精确判定其他星体的位置。

谈“守株待兔”

《守株待兔》这则寓言已经是家喻户晓,它出自先秦著作《韩非子》,至今已经流传了二千二百多年。

两千年来,人们一直认为“待兔”不得,错在“守株”。其实,抱怨“守株”是没有道理的。问题的关键在于兔子的运动规律。如果通往大树的路是兔子所必经的,那么“守株”又将何妨?

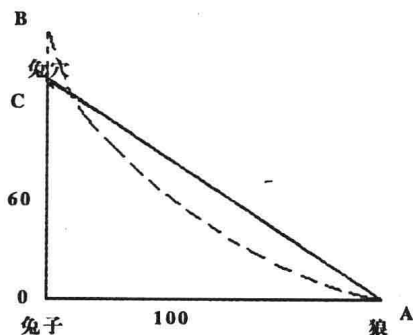
然而世界是一个不断运动的世界。兔子的活动,在时空中划出一条千奇百怪的轨迹,希望这条轨迹能与树木在时空中的轨线再次相交,无疑是极为渺茫的。因此,这正是这位农夫无法再次成功的原因之所在。

这里有一则更为精妙的例子,可以使人们生动地看到问题的症结。

探索未知



意大利文艺复兴时期的艺术大师列奥纳多·达·芬奇曾提出过一个饶有趣味的“饿狼扑兔”问题：



一只兔子正在洞穴(C)南面 60 米的地方(O)觅食，一只饿狼此刻正在兔子正东 100 米的地方(A)游荡。兔子回首间，视线猛然与饿狼贪婪的目光相撞，预感大难临头，于是急忙向自己的洞穴奔去。说时迟，那时快，恶狼见即将到口的美食就要失落，立即以一倍于兔子的速度紧盯着兔子追去。于是，狼与兔之间，展开了一场惊心动魄的生与死的追逐。问：兔子能否逃脱厄运？

有人作过以下一番计算：以 O 为原点，OA、OC 分别为 X、Y 轴，以 1 米为单位长。则 $OA=100$ ， $OC=60$ 。根据勾股定理，在 $Rt\triangle AOC$ 中，

$$AC = \sqrt{OA^2 + OC^2} = \sqrt{100^2 + 60^2} = 116.6$$

这意味着：倘若饿狼沿 AC 方向直奔兔子洞穴，那么由于兔子速度只有狼速度的一半，当饿狼到达兔穴洞口时，兔子只跑了 $116.6 \div 2 = 58.3$ 米距离，离洞口还差 1.7



米。这时先行到达洞口的饿狼，完全可以守在洞口，“坐等”美餐的到来。

以上计算好像天衣无缝，结论只能是兔子厄运难逃。可实际上这是错误的。饿狼不可能未卜先知兔子会直奔洞穴，所以它也不能直奔兔穴洞口去“坐守”。它的策略只能是死死盯住运动中的兔子，这样它本身也就运动成一条曲线，这条曲线可以用解析的方法推导出来：

$$Y = \frac{1}{30}x^{\frac{3}{2}} - 10x^{\frac{1}{2}} + \frac{200}{3}$$

根据公式可知：当 $x=0$ 时，带入上式得到 $y=200/3$ 。这意味着，如若北边没有兔子洞，那么当兔子跑到离原点 $200/3$ 米的 B 点时，恰被饿狼逮住。然而幸运的是，兔子洞离原点仅有 60 米，此时此刻兔子早已安然进洞了。

随着“饿狼扑兔”谜底的解开，“守株待兔”问题好像明朗了。可是后来又有人提出异议，对《守株待兔》故事的真实性表示怀疑，机灵的兔子怎么会自己撞到偌大的树桩上去？它那两只精灵的大眼睛干什么去了？

说得不无道理。不过要说清楚这一点，还得从眼睛的功能谈起。眼睛的视觉功能是有趣的：一只眼睛能够看清周围的物体，但却无法准确判断眼睛与物体之间的距离。下面的实验可以证实这一点。

两只手各拿一支削尖了的铅笔，然后闭上一只眼睛，让两支笔的笔尖从远到近，对准靠拢。这时，你会发现一种奇怪的现象：任你怎么集中注意力，两支笔尖总是交错



探索未知

而过。然而,如若你睁着双眼,要想对准笔尖,那是很容易做到的。

由此可见:用两只眼看,能准确判断物体的位置,而用一只眼看却不能。那么,为什么用两只眼睛便能判定物体的准确位置呢?

原来,同一物体在人的两只眼睛中看出来的图像是不一样的,它们之间存在一定的角度差。大脑通过经验分析,将两副平面图合成一副立体的图像。为了证明这一点,你可以把两副从分别从两个差距较小的角度拍摄的图片摆在面前,然后两眼凝视图中央空隙的地方,如此集中精力几秒钟。无须很久,你的眼前便会看见一副立体的图案,与原物体毫无二致。

现在大家再回到“守株待兔”这个问题上来。读者仔细观察一下便会发现,人眼与兔眼的位置是不相同的:人的两眼长在前方,相距很近,而兔的两眼却长在头的两侧。又根据测定,兔子每只眼睛可见视野为 $189^{\circ}30'$,而人的每只眼睛可见视野约 166° 。不过,由于人的两眼长在前面,因此两眼同时能看到的视野有 124° 左右。在这一区域内的物体,人眼能精确判定其位置。而兔眼虽说能看到周围的任何东西,但两眼重合视野只有 19° ,其中前方 10° ,后方 9° 。因此兔子只有在很小的视区内才能准确判断物体的远近。纵然兔子对来自四方的威胁都能敏锐地感觉,但对鼻子底下的东西却完全看不到。所以兔子撞树的事情是可以理解的,况且它在惊慌失措的奔命中呢。



对闭眼打转问题的探讨

公元 1896 年,挪威生理学家古德贝尔对闭眼打转的问题进行了深入的研究。他收集了大量事例后分析说:“这一切都是由于人自身两条腿在作怪。长年累月养成的习惯,使每个人一只脚伸出的步子,要比另一只脚伸出的步子长一段微不足道的距离。而正是这一段很小的步差 x ,导致了这个人走出一个半径为 y 的大圈子。”

现在大家来研究一下 x 与 y 之间的函数关系:假定某个两脚踏线间相隔为 d 。很明显,当人在打圈子时,两只脚实际上走出了两个半径相差为 d 的同心圆。设该人平均步长为 1。那么,一方面这个人外脚比内脚多走路程

$$2\pi(y + \frac{d}{2}) - 2\pi(y - \frac{d}{2}) = 2\pi d$$

另一方面,这段路程又等于这个人走一圈的步数与步差的乘积,即:

$$2\pi d = (\frac{2\pi y}{1}) \cdot x$$

$$\text{化简得 } y = \frac{2d}{x}。$$

对一般的人, $d = 0.1$ 米, $1 = 0.7$ 米,代入得(单位



探索未知

米): $y = \frac{0.14}{x}$ 。这就是所求的迷路打圈子的半径公式。现在设迷路两脚差为 0.1 毫米, 仅此微小的差异, 就足以使他在大约三公里的范围内绕圈子。

上述公式中变量 x, y 之间的关系, 在数学上称为反比例函数关系。所谓反比例函数, 局势形如 $y = k/x$ (k 为常量) 这样的函数。它的图像是两条弯曲的曲线, 数学上称为“等边双曲线”, 它在工业、国防、科技等领域都很有用。

下面大家再来看一个有趣的游戏:

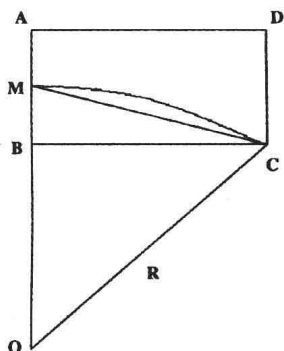
在世界著名的“水都”威尼斯有个马尔克广场。广场的一端有一座宽 82 米的雄伟教堂。教堂的前面是一片开阔地。这片开阔地经常吸引着四方游人到这里做一种奇特的游戏: 把眼睛蒙上, 然后从广场的一端向另一端教堂走去, 看谁能到达教堂的正前面。奇怪的是, 尽管这段距离只有 175 米, 但却没有一名游客能幸运地做到这一点——全都走成了弧线, 或左或右, 偏斜到了一边。

为什么是这样呢? 我们就先来计算一下, 当人们闭起眼睛, 从广场一端中央的 M 点抵达教堂 CD 的最小的弧半径是多少。

注意到矩形 $ABCD$ 边 $BC = 175$ (米), $AM = MB = 41$ (米)。那么上述问题, 无疑相当于几何中的命题: 一直 BC 与 MB 求弧 MC 的半径 R_d 大小。

因为 $BC^2 = R^2 - (R - MB)^2 = MB(2R - MB)$

所以 $175^2 = 41 \times (2R - 41)$



解得： $R=394$

这就是说，游人要想成功，他所走的弧线半径必须不小于 394 米。那么就让我们再计算一下，要达到上述要求，游人的两脚的步差需要什么限制。根据公式：

$$y = \frac{4}{x}$$

因为 $y - R \geq 394$

所以 $x \leq \frac{0.14}{394} = 0.00035(\text{米})$

这表明游人的两只脚的步差必须小于 0.35 毫米，否则是不可能成功的。然而在闭上眼睛的前提下，使两脚的步差这么小一般人是办不到的，这便是在游戏中为什么没有人能被蒙上眼睛走到教堂前面的道理。



“钟表定向”的科学原理

对于在沙漠、草原或雪野上迷了路的人，识别方向无疑是至关重要的。大家设想一位迷失了方向的人正面临着一种艰难的境地——他在旅行中赖以辨认方向的罗盘不幸丢失了。他如何才能从这一困境中解脱出来呢？

倘若故事发生在晴天的夜晚，那是不用愁的，因为北天的那颗北极星，可以准确地为他指示方向。

倘若故事发生在阴天，情况就比较棘手。不过，只要细心观察周围，还是有希望找到一些辨别方向的标志。如北半球树木的年轮一般是偏心的，靠北方向(N)年轮较密，而靠南方向(S)年轮较疏，这是由于树木向阳一面生长较快的缘故。又如，有时在荒野中我们会看到一些残垣断壁、破败的寺庙，按中国的习俗，这些建筑物一般是坐北朝南的。

假如那个人是在一望无际的沙漠中迷失了方向，周围当然不可能奇迹般地出现庙宇和树桩。当空的烈日，正使他陷入一种茫然和绝望。此时，还有他手上戴着的手表——一只标准的“指北针”，能够派上大用场。

也许读者会疑虑重重，然而事实确是这样。钟表定向的方法是：把手表放平，以时针的时数(一天以24小时计)一半的位置对向太阳，则表面上“12时”指的方向便