极 限

（理论·方法·技巧）

刘俊山 编著

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

NEUPRESS
东北大学出版社

极 限

（理论·方法·技巧）

刘俊山 编著

东北大学出版社

（辽）新登字第 8 号

内容提要

本书是在作者总结三十多年高等数学教学实践的基础上编写而成的。该书是一本学好高等数学中关于极限的指南。内容包括基本概念与基本理论、极限计算中的技巧与方法、极限问题中的一题多解、极限问题中的是与非、试题精选等。

本书适合理工科院校以及各类成人高等学校学生使用，可供报考研究生的高年级学生使用，也是一本教师讲述极限内容的参考书。

极　限（理论·方法·技巧）

刘俊山　编著

东北大学出版社出版发行（沈阳·南湖）　　中国科学院沈阳分院印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　　印张：6.125　　字数：139 千字

1993 年 9 月第 1 版　　1993 年 9 月第 1 次印刷

印数：1～1000 册

责任编辑：王金邦　　责任校对：王　令

封面设计：唐敏智　　责任出版：高志武

ISBN　7-81006-648-X /O·37　　定价：3.50 元

前言

极限作为一种数学方法，在于从静认识动，从近似认识精确，又从有限去认识无限。在包含微积分在内的全部数学分析课中，占有主导地位并以各种形式贯串在全部内容的是极限概念，可以说它在高等数学中占有“统治”地位，是学习高等数学的理论基础。

大学生一进学校，很快就接触到极限方面的问题，由于教学内容多，课程进度快，教师不可能对它的内容和方法进行详细讲解；加之在高等数学中介绍的极限方法又是分散进行的，这样就对本来很难掌握的极限问题更增加了难度。

近年来虽有一些题解手册为初学者提供了具体的方法与技巧，但对如此多的方法与技巧能予以综合分类，归纳成书的尚不多见。本书正是为补充这方面的不足，以满足广大读者的需要而编写的。

本书在内容上以介绍计算方法与技巧为主，力求在方法的运用中，加深读者对有关概念的理解。在编排上则以方法的归纳类化为主，力求在照顾到教材次序的前提下，按照每类多例和一题多解的框架解剖范例，加强读者对有关运算的掌握。

极限中的是与非问题也作为一个内容编入书中，并且还精选了近年来研究生入学考试有关极限试题50道，并附以解答，供读者参考。

本书经李世晋教授认真地审阅，提出了许多宝贵意见，在此表示感谢。

由于时间仓促、业务水平所限，难免有谬误与不妥之处，敬请广大读者批评指正.

编者

1993. 3. 4

目录

1 基本概念与基本理论

1.1 数列的极限

1.1.1 数列极限的概念

数列极限的定义 如果对于每一个预先给定的任意小的正数 ε，总存在着一个正整数 $N = N(\varepsilon)$，使得对于 $n > N$ 时的一切 x_n，都有

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

成立，则称数列 $\{x_n\}$ 以常数 a 为极限，且记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

对于数列极限的这个定义，为便于记忆和掌握，可以用逻辑符号表述为

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N, \forall\ n(n \geqslant N): |x_n - a| < \varepsilon}$$

其中符号∀ ——“任意的”；∃ ——“存在一个”.

这个定义有三个要素：

(1) 正数 ε；

(2) 正整数 N；

(3) 不等式 $|x_n - a| < \varepsilon(n > N)$.

首先，定义中的正数 ε 是一个距离指标，用它来刻划 x_n 与 a 的接近程度. 由于 ε 的任意性，才能刻划 x_n 与 a 无限接近；由于 ε 的相对固定性，才能找到 $\{x_n\}$ 从哪一项开始有

$|x_n - a| < \varepsilon$.

其次，定义中的正整数 N 是一个具有特点的项数，对于该项，强调的是它的存在性，它是在 ε 固定以后才能确定的，因此，它与所给定的 ε 有着密切关系，定义中记为 $N = N(\varepsilon)$ 是比较恰当的．一般来说，ε 变小时，N 就变大．这里必须指出，对一个固定的 ε 来说，合乎定义要求的正整数 N 不是唯一的，这是因为，$n > N$ 时，点 $x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots$ 都落入 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内，如改用 $N+1, N+2, \cdots$ 作为 N 也都可以使 $|x_n - a| < \varepsilon$．由于定义中指出总存在一个正数 N，所以只要能找到一个 N 即可．不一定是最小的一个．

数列极限的几何解释　　通过数列 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 的“ε-N”定义的几何解释，将有助于对数列极限概念的进一步理解．由于数列 $\{x_n\}$ 的每一项在数轴上可以用一个点表示，因此，数列 $\{x_n\}$ 在数轴上就对应一个点列．先把数列 $\{x_n\}$ 的每一项和 a 在数轴上的对应点表示出来，再作出以 a 为中心，ε 为半径的开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$．由于不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 等价于

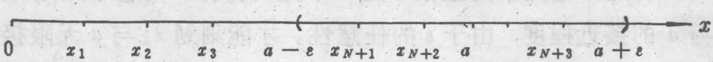
$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

而后一不等式表示点 x_n 落在开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 之内．这样就可以知道数列极限的定义在几何上表示为：

如果任意作出一个以 a 为中心，以无论多么小的正数 ε 为半径的开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$，总可以在数列 $\{x_n\}$ 中确定某一项 x_n，使得随后的所有项

$$x_{N+1}, x_{N+2}, x_{N+3} \cdots$$

的对应点全都落在这个区间内．如图所示：



这就是数列极限的几何解释.

1.1.2 数列极限的性质

下面讲述数列极限的 5 个基本性质，包括 7 个定理

1. 极限的唯一性

定理 1 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则其极限唯一.

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty}x_n = b, a > b$. 按极限的 ε-N 定义，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 N_1，使当 $n > N_1$ 时有

$$|x_n - a| < \varepsilon/2$$

同时存在 N_2，使当 $n > N_2$ 时有

$$|x_n - b| < \varepsilon/2$$

现在取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则当 $n > N$ 时有

$$|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leqslant |x_n - a| + |x_n - b| < \varepsilon$$

a 和 b 是两个定数，今它们之差的绝对值可以小于任意小的量，所以这两个数必须相等：$a = b$，即数列的极限唯一.

2. 极限的夹逼性

定理 2 如果数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 满足

① $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

② $\lim\limits_{n\to\infty}y_n = \lim\limits_{n\to\infty}z_n = a$

则

$$\lim_{n\to\infty}x_n = a$$

证明 按极限定义，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 N_1，使当 $n > N_1$ 时有 $|y_n - a| < \varepsilon$；又存在 N_2，使当 $n > N_2$ 时有 $|z_n - a| < \varepsilon$.

现在取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，于是当 $n > N$ 时，有

$$|y_n - a| < \varepsilon, \quad |z_n - a| < \varepsilon$$

同时成立，即

$$a-\varepsilon<y_n\leqslant x_n\leqslant z_n<a+\varepsilon$$

从而
$$|x_n-a|<\varepsilon$$

成立,即
$$\lim_{n\to\infty}x_n=a$$

上面的定理又称为夹逼定理.

3.数列的逐项可比性

定理3 若数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 的极限

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=b$$

满足 $a>b$,则存在 N,使当 $n>N$ 时有

$$x_n>y_n$$

证明 按极限的定义,取 $\varepsilon=\dfrac{a-b}{2}>0$,一定存在 N_1,使当 $n>N_1$ 时有

$$|x_n-a|<\frac{a-b}{2},\quad x_n>a-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}$$

同时一定存在 N_2,使当 $n>N_2$ 时有

$$|y_n-b|<\frac{a-b}{2},\quad y_n<b+\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}$$

于是,取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,当 $n>N$ 时有

$$x_n>\frac{a+b}{2}>y_n$$

所以
$$x_n>y_n$$

4.收敛数列的有界性

定理4 收敛数列必有界.

证明 设数列 $\{x_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 依据数列极限的定义,对于 $\varepsilon=1$,存在着正整数 N,使当 $n>N$ 时的一切 x_n,有

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

成立. 于是,当 $n>N$ 时有

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \leqslant |x_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

取 $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, 1 + |a|\}$. 于是 $\{x_n\}$ 中的一切 x_n 都满足

$$|x_n| \leqslant M$$

这就证明了数列 $\{x_n\}$ 是有界的.

5. 收敛数列的运算性质

定理 5 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 则

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n = a \pm b$$

证明 下面仅就和的情况进行证明. 由于

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N_1, \forall\, n (n \geqslant N_1): |x_n - a| < \varepsilon/2$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N_2, \forall\, n (n \geqslant N_2): |y_n - b| < \varepsilon/2$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时有

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (a + b)| &\leqslant |x_n - a| + |y_n - b| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = a + b$$

定理 6 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 则

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = a \cdot b$$

证明 由收敛数列的有界性可知: 存在正数 M, 使对一切自然数有 $|y_n| \leqslant M$. 因为

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ab| &= |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \\ &\leqslant |x_n - a||y_n| + |a||y_n - b| \end{aligned}$$

所以

$$|x_n y_n - ab| \leqslant M|x_n - a| + |a||y_n - b|$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N_1, \forall\ n(n \geqslant N_1): |x_n - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N_2, \forall\ n(n \geqslant N_2): |y_n - b| < \varepsilon$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则当 $n > N$ 时有

$$|x_n y_n - ab| \leqslant M\varepsilon + |a|\varepsilon = (M + |a|)\varepsilon$$

因 $(M + |a|)\varepsilon$ 也是任意的正数，故有

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = a \cdot b$$

定理 7 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b}$$

证明 因为 $\dfrac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \dfrac{1}{y_n}$，所以只须证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$$

就可以了. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$，从而对任给的正数 ε，存在 N_1，使当 $n > N_1$ 时有 $|y_n - b| < \varepsilon$. 于是有

$$|b| - |y_n| < \varepsilon, \quad |y_n| > |b| - \varepsilon$$

若取 $\varepsilon = \dfrac{|b|}{2}$，则存 N_2，使当 $n > N_2$ 时有 $|y_n| > \dfrac{|b|}{2}$，从而当 $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ 时有

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n b|} < \frac{2\varepsilon}{|b|^2}$$

这就证明了

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{1}{b}$$

1.1.3 如何用 ε-N 定义验证数列的极限

用 ε-N 定义来验证某常数 a 为数列的极限大致可分为如下三个步骤：

(1) 把要证的命题用定义形式写出；

(2) 分析不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$，找出使 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立的条件；

(3) 根据第二步的分析，证明第一步所列出的命题．在验证过程中，一般分为两种情况：

①直接解 $|x_n - a| < \varepsilon$，求出 $n > N(\varepsilon)$，此时可取 $N \geqslant N(\varepsilon)$，也可以取 $N = [N(\varepsilon)]$，即 $N(\varepsilon)$ 的最大整数部分.

②适当放大原不等式，使得 $N(\varepsilon)$ 易于求出，即所谓“放大法”：

令 $|x_n - a| \leqslant |\varphi(n)| < \varepsilon$，只要从 $|\varphi(n)| < \varepsilon$ 解出 $n \geqslant N(\varepsilon)$，则取 $N \geqslant N(\varepsilon)$ 或 $N = [N(\varepsilon)]$ 即可.

例如 试证数列 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$ 的极限为 1.

解 ①任意给定 $\varepsilon > 0$，要找一正整数 N，使当 $n > N$ 时有 $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$ 成立.

②要找 $N = [N(\varepsilon)]$，使它满足当 $n > N$ 时，不等式 $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$ 成立，这说明满足不等式 $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ 或 $n > [\frac{1}{\varepsilon} - 1]$，这样的 N 就能使 $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$.

③于是，对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $N = [\frac{1}{\varepsilon} - 1]$，当 $n > N$ 时总有 $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

1.2 函数的极限

1.2.1 函数极限的概念

函数极限的定义 1 如果对于每一个预先给定的任意小的正数 ε，总存在着一个正数 $\delta=\delta(\varepsilon)$，使得满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x，都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则称 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 以常数 A 为极限，且记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$$

可用逻辑符号表述为

$$\boxed{\begin{aligned}&\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\,\varepsilon>0,\exists\,\delta>0,\\&\qquad\qquad\forall\,x\,(0<|x-x_0|<\delta):|f(x)-A|<\varepsilon\end{aligned}}$$

函数极限定义和数列极限定义一样，也有三个要素：

(1) 正数 ε；

(2) 正数 δ；

(3) 不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$. $(0<|x-x_0|<\delta)$.

ε 是给定的，δ 是相应找到的，δ 是依赖于 ε 的. $|f(x)-A|<\varepsilon$ 是找 δ 的根据，一旦找到了 δ，对满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 x，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，这时，不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 又成为 $|f(x)-A|$ 成立的条件. 对于一个固定的 ε 来说，合乎定义要求的正数 δ 也不是唯一的，定义中要求成立的不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 是指对满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的那些 x 而言的. 对于不满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的那些 x，没有要求不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

函数极限的几何解释 函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的“ε-δ”定义有明显的几何解释，由于不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 等价于 $x_0-\delta<x<x_0+\delta(x\neq x_0)$，表示一个以 x_0 点为中心，以 δ 为半径的去心邻域；而不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 等价于 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$，表示函数 $y=f(x)$ 的图形夹在直线 $y=A-\varepsilon$ 与 $y=A+\varepsilon$ 之间．这样一来，就可以知道函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的“ε-δ”定义在几何上表示为：

如果任意给定一个无论多么小的正数 ε，然后作出一个以直线 $y=A-\varepsilon$ 和 $y=A+\varepsilon$ 为边界的带形域，总可以确定一个以 x_0 点为中心，以某一正数 δ 为半径的去心邻域，使得函数 $y=f(x)$ 在这个去心邻域部分对应的图形都落在带形域内．

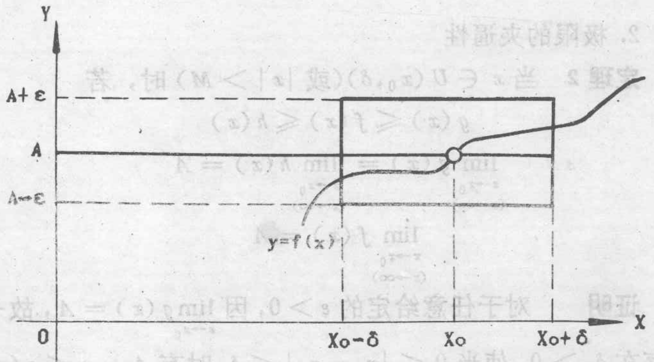


图2

函数极限的定义 2 如果对于每一个预先给定的任意小的正数 ε，总存在着一个正数 X，当 $|x|>X$ 时都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A$$

1.2.2 函数极限的性质

1. 极限的唯一性

定理 1 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=B$，则 $A=B$.

证明 由于

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Rightarrow \forall\, \varepsilon>0, \exists\, \delta_1, \forall\, x\,(0<|x-x_0|<\delta_1): |f(x)-A|<\varepsilon/2$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=B \Rightarrow \forall\, \varepsilon>0, \exists\, \delta_2, \forall\, x\,(0<|x-x_0|<\delta_2): |f(x)-A|<\varepsilon/2$$

现在取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有

$$|A-B|=|A-f(x)+f(x)-B|\leqslant|f(x)-A|+|f(x)-B|<\varepsilon$$

考虑到 ε 的任意性，这两个确定的实数只得相等：$A=B$.

2. 极限的夹逼性

定理 2 当 $x\in U(x_0,\delta)$（或 $|x|>M$）时，若

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$$

且

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} h(x)=A$$

则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$$

证明 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，因 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$，故一定存在 $\delta_1>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时有 $A-\varepsilon<g(x)<A+\varepsilon$；又因 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$，同时一定存在 $\delta_2>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 有 $A-\varepsilon<h(x)<A+\varepsilon$.

现在取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有

$$A-\varepsilon<g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)<A+\varepsilon$$