

# 极限

(理论·方法·技巧)

刘俊山 编著

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$



NEUPRESS

东北大学出版社

# 极限

(理论·方法·技巧)

刘俊山 编著

东北大学出版社

# (辽) 新登字第8号

## 内容提要

本书是在作者总结三十多年高等数学教学实践的基础上编写而成的。该书是一本学好高等数学中关于极限的指南。内容包括基本概念与基本理论、极限计算中的技巧与方法、极限问题中的一题多解、极限问题中的是与非、试题精选等。

本书适合理工科院校以及各类成人高等学校学生使用,可供报考研究生的高年级学生使用,也是一本教师讲述极限内容的参考书。

## 极 限 (理论·方法·技巧)

刘俊山 编著

---

东北大学出版社出版发行  
(沈阳·南湖)

中国科学院沈阳分院  
印刷厂印刷

---

开本: 787×1092 1/32 印张: 6.125 字数: 139千字  
1993年9月第1版 1993年9月第1次印刷  
印数: 1~1000册

---

责任编辑: 王金邦  
封面设计: 唐敏智

责任校对: 王令  
责任出版: 高志武

---

ISBN 7-81006-648-X /O · 37 定价: 3.50元

## 前言

极限作为一种数学方法，在于从静认识动，从近似认识精确，又从有限去认识无限。在包含微积分在内的全部数学分析课中，占有主导地位并以各种形式贯穿在全部内容的是极限概念，可以说它在高等数学中占有“统治”地位，是学习高等数学的理论基础。

大学生一进学校，很快就接触到极限方面的问题，由于教学内容多，课程进度快，教师不可能对它的内容和方法进行详细讲解；加之在高等数学中介绍的极限方法又是分散进行的，这样就对本来很难掌握的极限问题更增加了难度。

近年来虽有一些题解手册为初学者提供了具体的方法与技巧，但对如此多的方法与技能予以综合分类，归纳成书的尚不多见。本书正是为补充这方面的不足，以满足广大读者的需要而编写的。

本书在内容上以介绍计算方法与技巧为主，力求在方法的运用中，加深读者对有关概念的理解。在编排上则以方法的归纳类化为主，力求在照顾到教材次序的前提下，按照每类多例和一题多解的框架解剖范例，加强读者对有关运算的掌握。

极限中的是与非问题也作为一个内容编入书中，并且还精选了近年来研究生入学考试有关极限试题 50 道，并附以解答，供读者参考。

本书经李世晋教授认真地审阅，提出了许多宝贵意见，在此表示感谢。

由于时间仓促、业务水平所限，难免有谬误与不妥之处，  
敬请广大读者批评指正。

言前

编者

1993. 3. 4

时人斯武从，虚财从新从于事，皆式学修中一式书属好。  
学及稽全馆内亦代再游合白事。谓无斯人去则盲从又，故游  
最而容内陪金帝串黄左课特各以共处相导主官古。中界诗食  
羊最，分越“备空”言古中半疑者高立了好想何。念游明对  
临基金歌叫半姓奉离不  
于由，魏同四面衣娘寒降幅射符史界，对学牧一主第大  
抵去式堪各内的宣纹馆臣不侧笑，射卖故居着，寒容内半姓  
抵着长虽又去式果尊师的食中学就信高古太时；尊托时苦于

重取了地歌更藏何别外也。歌者求本以舞并丝，印符  
良老式内都集不共张音学将水“振予舞恶违一音星来手式  
升你醉印”，类伐合采以千虫改井已老式能走典械拟且。古井  
夷大九五尚坎，弘不南面式宜乐井式虽正许本。视之不尚尚

。阳春歌折要需28卦  
者，口言水式，主式伊封吉数式算卦坐食以土容内查卦本  
者宜复损土卦起宜。增距由会断关音振苦游深咏，中用互卦  
移酒邀，不毁酒的乳火林透接震别者华式，主长卦类容曰酒  
始算或关音权苦游深咏，横蓝加释采野的融深跟一峰因浅类

到君

不日并，中华人矣容内个一式卦山趣同非手易种中探井  
通以脚井；虽 03 蓝友丽娇关音局李羊人主猪稻米争豆丁进都  
。若登音郊哉，管  
苏，风意贵宝未肯丁出塾。图中帆真人觉连晋山李登牛车  
。歌歌示苏的

# 目录

1 基本概念与基本理论 .....	(1)
1.1 数列的极限 .....	(1)
1.2 函数的极限 .....	(8)
1.3 无穷小与无穷大 .....	(14)
1.4 两个重要极限 .....	(19)
1.5 函数的连续与间断点 .....	(21)
2 极限计算中的技巧与方法 .....	(24)
2.1 约简分式法 .....	(24)
2.2 分解因式法 .....	(25)
2.3 有理化分子或分母法 .....	(26)
2.4 用代数或三角公式化简法 .....	(27)
2.5 变量代换法 .....	(29)
2.6 部分和法 .....	(30)
2.7 拆项相消法 .....	(32)
2.8 确定极限式中的待定常数法 .....	(35)
2.9 用 $\varepsilon$ - $N$ 定义验证极限 .....	(38)
2.10 用 $\varepsilon$ - $\delta$ 定义验证极限 .....	(40)
2.11 用数列极限与函数极限的关系求极限 .....	(43)
2.12 用夹逼准则法 .....	(45)
2.13 用不等式法 .....	(48)
2.14 用 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .....	(53)
2.15 用单调有界法则 .....	(56)
2.16 用 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ .....	(59)
2.17 用等价无穷小代换法 .....	(62)

2.18	用有界变量乘无穷小等于无穷小法	.....	(65)
2.19	用无穷大与无穷小的关系	.....	(67)
2.20	用左、右极限法	.....	(68)
2.21	用函数的连续性	.....	(71)
2.22	用算术平均值与几何平均值的极限法	...	(72)
2.23	用数列的递推关系法	.....	(76)
2.24	用导数定义法	.....	(78)
2.25	用拉格朗日微分中值公式法	.....	(80)
2.26	用台劳公式法	.....	(82)
2.27	用罗彼塔法则	.....	(85)
2.28	用公式 $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} [u(x)-1]^{v(x)}}$	.....	(88)
2.29	用积分中值定理	.....	(90)
2.30	用定积分定义法	.....	(93)
2.31	用级数收敛的一些结论	.....	(95)
2.32	用施笃兹 (Stolz) 法则	.....	(97)
3	二元函数的极限	.....	(100)
3.1	二元函数的极限定义	.....	(100)
3.2	二元函数的极限求法举例	.....	(102)
4	极限运算中的其他问题	.....	(113)
4.1	极限问题的特殊解法举例	.....	(113)
4.2	一题多解举例	.....	(121)
4.3	极限的综合证明题	.....	(133)
5	极限问题中的是与非	.....	(144)
5.1	数列极限中的是与非	.....	(144)
5.2	函数极限中的是与非	.....	(152)
6	试题精选及解答	.....	(162)
	附表	.....	(188)

于你，理解的点都具备一个基本的逻辑思维能力。尤其在学习数学时，逻辑思维能力是必不可少的。

# 1 基本概念与基本理论

## 1.1 数列的极限

### 1.1.1 数列极限的概念

**数列极限的定义** 如果对于每一个预先给定的任意小的正数  $\varepsilon$ , 总存在着一个正整数  $N = N(\varepsilon)$ , 使得对于  $n > N$  时的一切  $x_n$ , 都有

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

成立, 则称数列  $\{x_n\}$  以常数  $a$  为极限, 且记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

对于数列极限的这个定义, 为便于记忆和掌握, 可以用逻辑符号表述为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n (n \geq N) : |x_n - a| < \varepsilon$$

其中符号  $\forall$  —— “任意的”;  $\exists$  —— “存在一个”。

这个定义有三个要素:

- (1) 正数  $\varepsilon$ ;
- (2) 正整数  $N$ ;
- (3) 不等式  $|x_n - a| < \varepsilon (n > N)$ .

首先, 定义中的正数  $\varepsilon$  是一个距离指标, 用它来刻划  $x_n$  与  $a$  的接近程度. 由于  $\varepsilon$  的任意性, 才能刻划  $x_n$  与  $a$  无限接近; 由于  $\varepsilon$  的相对固定性, 才能找到  $\{x_n\}$  从哪一项开始有

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

其次，定义中的正整数  $N$  是一个具有特点的项数，对于该项，强调的是它的存在性，它是在  $\varepsilon$  固定以后才能确定的，因此，它与所给定的  $\varepsilon$  有着密切关系，定义中记为  $N = N(\varepsilon)$  是比较恰当的。一般来说， $\varepsilon$  变小时， $N$  就变大。这里必须指出，对一个固定的  $\varepsilon$  来说，合乎定义要求的正整数  $N$  不是唯一的，这是因为， $n > N$  时，点  $x_{N+1}, x_{N+2}, \dots$  都落入  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  内，如改用  $N + 1, N + 2, \dots$  作为  $N$  也都可以使  $|x_n - a| < \varepsilon$ 。由于定义中指出总存在一个正数  $N$ ，所以只要能找到一个  $N$  即可。不一定是最小的一个。

**数列极限的几何解释** 通过数列  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  的“ $\varepsilon-N$ ”

定义的几何解释，将有助于对数列极限概念的进一步理解。由于数列  $\{x_n\}$  的每一项在数轴上可以用一个点表示，因此，数列  $\{x_n\}$  在数轴上就对应一个点列。先把数列  $\{x_n\}$  的每一项和  $a$  在数轴上的对应点表示出来，再作出以  $a$  为中心， $\varepsilon$  为半径的开区间  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 。由于不等式  $|x_n - a| < \varepsilon$  等价于

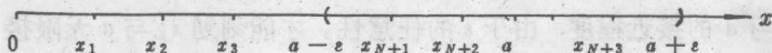
$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

而后一不等式表示点  $x_n$  落在开区间  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  之内。这样就可以知道数列极限的定义在几何上表示为：

如果任意作出一个以  $a$  为中心，以无论多么小的正数  $\varepsilon$  为半径的开区间  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ，总可以在数列  $\{x_n\}$  中确定某一项  $x_n$ ，使得随后的所有项

$$x_{N+1}, x_{N+2}, x_{N+3}, \dots$$

的对应点全都落在这个区间内。如图所示：



这就是数列极限的几何解释.

### 1.1.2 数列极限的性质

下面讲述数列极限的 5 个基本性质，包括 7 个定理

#### 1. 极限的唯一性

**定理 1** 若数列  $\{x_n\}$  收敛，则其极限唯一。

**证明** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b, a > b$ . 按极限的  $\varepsilon-N$  定义，对于任意给定的  $\varepsilon > 0$ ，存在  $N_1$ ，使当  $n > N_1$  时有

$$|x_n - a| < \varepsilon/2$$

同时存在  $N_2$ ，使当  $n > N_2$  时有

$$|x_n - b| < \varepsilon/2$$

现在取  $N = \max\{N_1, N_2\}$ ，则当  $n > N$  时有

$$|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < \varepsilon$$

$a$  和  $b$  是两个定数，今它们之差的绝对值可以小于任意小的量，所以这两个数必须相等： $a = b$ ，即数列的极限唯一。

#### 2. 极限的夹逼性

**定理2** 如果数列  $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$  满足

①  $y_n \leq x_n \leq z_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

②  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

**证明** 按极限定义，对于任意给定的  $\varepsilon > 0$ ，存在  $N_1$ ，使当  $n > N_1$  时有  $|y_n - a| < \varepsilon$ ；又存在  $N_2$ ，使当  $n > N_2$  时有  $|z_n - a| < \varepsilon$ .

现在取  $N = \max\{N_1, N_2\}$ ，于是当  $n > N$  时，有

$$|y_n - a| < \varepsilon, \quad |z_n - a| < \varepsilon$$

同时成立，即

1927  
504028

$$a - \varepsilon < y_n \leq x_n \leq z_n < a + \varepsilon$$

从而

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

成立, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

上面的定理又称为夹逼定理.

### 3. 数列的逐项可比性

**定理3** 若数列  $\{x_n\}, \{y_n\}$  的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

满足  $a > b$ , 则存在  $N$ , 使当  $n > N$  时有

$$x_n > y_n$$

**证明** 按极限的定义, 取  $\varepsilon = \frac{a - b}{2} > 0$ , 一定存在  $N_1$ ,

使当  $n > N_1$  时有

$$|x_n - a| < \frac{a - b}{2}, \quad x_n > a - \frac{a - b}{2} = \frac{a + b}{2}$$

同时一定存在  $N_2$ , 使当  $n > N_2$  时有

$$|y_n - b| < \frac{a - b}{2}, \quad y_n < b + \frac{a - b}{2} = \frac{a + b}{2}$$

于是, 取  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , 当  $n > N$  时有

$$x_n > \frac{a + b}{2} > y_n \quad \text{①}$$

所以

$$x_n > y_n$$

### 4. 收敛数列的有界性

**定理4** 收敛数列必有界.

**证明** 设数列  $\{x_n\}$  收敛且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . 依据数列极限的定义, 对于  $\varepsilon = 1$ , 存在着正整数  $N$ , 使当  $n > N$  时的一切  $x_n$ , 有

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

成立. 于是, 当  $n > N$  时有

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

取  $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, 1 + |a|\}$ . 于是  $\{x_n\}$  中的一切  $x_n$  都满足

$$|x_n| \leq M$$

这就证明了数列  $\{x_n\}$  是有界的.

### 5. 收敛数列的运算性质

**定理 5** 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \pm b$$

**证明** 下面仅就和的情况进行证明. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1, \forall n (n \geq N_1): |x_n - a| < \varepsilon/2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_2, \forall n (n \geq N_2): |y_n - b| < \varepsilon/2$$

取  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , 则当  $n > N$  时有

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (a + b)| &\leq |x_n - a| + |y_n - b| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a + b$$

**定理 6** 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \cdot b$$

**证明** 由收敛数列的有界性可知: 存在正数  $M$ , 使对一切自然数有  $|y_n| \leq M$ . 因为

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ab| &= |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \\ &\leq |x_n - a| |y_n| + |a| |y_n - b| \end{aligned}$$

所以

$$|x_n y_n - ab| \leq M |x_n - a| + |a| |y_n - b|$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1, \forall n (n \geq N_1) : |x_n - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_2, \forall n (n \geq N_2) : |y_n - b| < \varepsilon$$

取  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , 则当  $n > N$  时有

$$|x_n y_n - ab| \leq M\varepsilon + |a|\varepsilon = (M + |a|)\varepsilon$$

因  $(M + |a|)\varepsilon$  也是任意的正数, 故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \cdot b$$

**定理 7** 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{a}{b}$$

**证明** 因为  $\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n}$ , 所以只须证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$$

就可以了. 由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0$ , 从而对任给的正数  $\varepsilon$ , 存在

$N_1$ , 使当  $n > N_1$  时有  $|y_n - b| < \varepsilon$ . 于是有

$$|b| - |y_n| < \varepsilon, \quad |y_n| > |b| - \varepsilon$$

若取  $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$ , 则存  $N_2$ , 使当  $n > N_2$  时有  $|y_n| > \frac{|b|}{2}$ , 从

而当  $n > N = \max\{N_1, N_2\}$  时有

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n b|} < \frac{2\varepsilon}{|b|^2}$$

这就证明了

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{1}{b}$$

### 1.1.3 如何用 $\varepsilon$ - $N$ 定义验证数列的极限

用  $\varepsilon$ - $N$  定义来验证某常数  $a$  为数列的极限大致可分为如下三个步骤：

- (1) 把要证的命题用定义形式写出；
- (2) 分析不等式  $|x_n - a| < \varepsilon$ , 找出使  $|x_n - a| < \varepsilon$  成立的条件；
- (3) 根据第二步的分析, 证明第一步所列出的命题. 在验证过程中, 一般分为两种情况:

①直接解  $|x_n - a| < \varepsilon$ , 求出  $n > N(\varepsilon)$ , 此时可取  $N \geq N(\varepsilon)$ , 也可以取  $N = [N(\varepsilon)]$ , 即  $N(\varepsilon)$  的最大整数部分.

②适当放大原不等式, 使得  $N(\varepsilon)$  易于求出, 即所谓“放大法”:

令  $|x_n - a| \leq |\varphi(n)| < \varepsilon$ , 只要从  $|\varphi(n)| < \varepsilon$  解出  $n \geq N(\varepsilon)$ , 则取  $N \geq N(\varepsilon)$  或  $N = [N(\varepsilon)]$  即可.

例如 试证数列  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$  的极限为 1.

解 ①任意给定  $\varepsilon > 0$ , 要找一正整数  $N$ , 使当  $n > N$  时有  $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$  成立.

②要找  $N = [N(\varepsilon)]$ , 使它满足当  $n > N$  时, 不等式  $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$  成立, 这说明满足不等式  $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$  或  $n > [\frac{1}{\varepsilon} - 1]$ , 这样的  $N$  就能使  $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$ .

③于是, 对任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N = [\frac{1}{\varepsilon} - 1]$ , 当  $n > N$  时总有  $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ .

## 1.2 函数的极限

### 1.2.1 函数极限的概念

**函数极限的定义 1** 如果对于每一个预先给定的任意小的正数  $\varepsilon$ , 总存在着一个正数  $\delta = \delta(\varepsilon)$ , 使得满足  $0 < |x - x_0| < \delta$  的一切  $x$ , 都有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立, 则称  $x \rightarrow x_0$  时, 函数  $f(x)$  以常数  $A$  为极限, 且记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

可用逻辑符号表述为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$$

$$\text{出错 } s > |(s)| \forall x (0 < |x - x_0| < \delta) : |f(x) - A| < \varepsilon$$

函数极限定义和数列极限定义一样, 也有三个要素:

(1) 正数  $\varepsilon$ ;

(2) 正数  $\delta$ ;

(3) 不等式  $|f(x) - A| < \varepsilon$ . ( $0 < |x - x_0| < \delta$ ).

$\varepsilon$  是给定的,  $\delta$  是相应找到的,  $\delta$  是依赖于  $\varepsilon$  的.  $|f(x) - A| < \varepsilon$  是找  $\delta$  的根据, 一旦找到了  $\delta$ , 对满足不等式  $0 < |x - x_0| < \delta$  的  $x$ , 就有  $|f(x) - A| < \varepsilon$  成立, 这时, 不等式  $0 < |x - x_0| < \delta$  又成为  $|f(x) - A| < \varepsilon$  成立的条件. 对于一个固定的  $\varepsilon$  来说, 合乎定义要求的正数  $\delta$  也不是唯一的, 定义中要求成立的不等式  $|f(x) - A| < \varepsilon$  是指对满足  $0 < |x - x_0| < \delta$  的那些  $x$  而言的. 对于不满足  $0 < |x - x_0| < \delta$  的那些  $x$ , 没有要求不等式  $|f(x) - A| < \varepsilon$  成立.

函数极限的几何解释 当 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  的“ $\varepsilon-\delta$ ”

定义有明显的几何解释，由于不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$  等价于 $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta (x \neq x_0)$ ，表示一个以 $x_0$ 点为中心，以 $\delta$ 为半径的去心邻域；而不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$  等价于 $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ ，表示函数 $y = f(x)$  的图形夹在直线 $y = A - \varepsilon$  与 $y = A + \varepsilon$  之间。这样一来，就可以知道函数极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  的“ $\varepsilon-\delta$ ” 定义在几何上表示为：

如果任意给定一个无论多么小的正数 $\varepsilon$ ，然后作出一个以直线 $y = A - \varepsilon$  和 $y = A + \varepsilon$  为边界的带形域，总可以确定一个以 $x_0$ 点为中心，以某一正数 $\delta$ 为半径的去心邻域，使得函数 $y = f(x)$  在这个去心邻域部分对应的图形都落在带形域内。

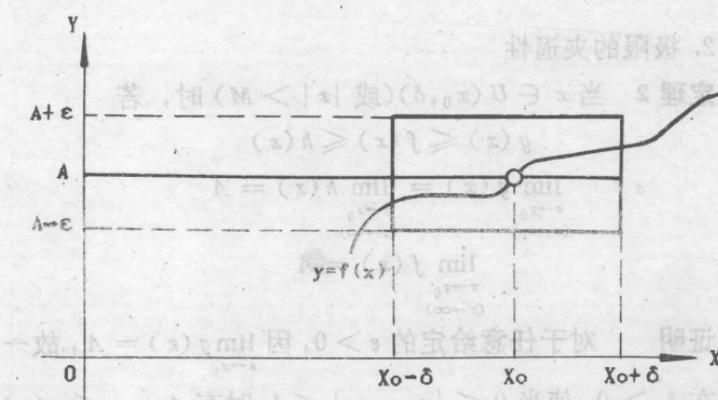


图 2

函数极限的定义 2 如果对于每一个预先给定的任意小的正数 $\varepsilon$ ，总存在着一个正数 $X$ ，当 $|x| > X$  时都有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立，则称常数  $A$  为函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow \infty$  时的极限，记为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

### 1.2.2 函数极限的性质

#### 1. 极限的唯一性

**定理 1** 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B$ , 则  $A = B$ .

**证明** 由于

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1, \forall x (0 < |x - x_0| < \delta_1), |f(x) - A| < \varepsilon/2$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2, \forall x (0 < |x - x_0| < \delta_2), |f(x) - B| < \varepsilon/2$$

现在取  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , 则当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时有

$$|A - B| = |A - f(x) + f(x) - B| \leq |f(x) - A| + |f(x) - B| < \varepsilon$$

考虑到  $\varepsilon$  的任意性，这两个确定的实数只得相等： $A =$

$B$ .

#### 2. 极限的夹逼性

**定理 2** 当  $x \in U(x_0, \delta)$  (或  $|x| > M$ ) 时，若

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

且

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} h(x) = A$$

则

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = A$$

**证明** 对于任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 因  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$ , 故一

定存在  $\delta_1 > 0$ , 使当  $0 < |x - x_0| < \delta_1$  时有  $A - \varepsilon < g(x)$

$< A + \varepsilon$ ; 又因  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$ , 同时一定存在  $\delta_2 > 0$ , 使当  $0$

$< |x - x_0| < \delta_2$  有  $A - \varepsilon < h(x) < A + \varepsilon$ .

现在取  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , 则当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时有

$$A - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < A + \varepsilon$$