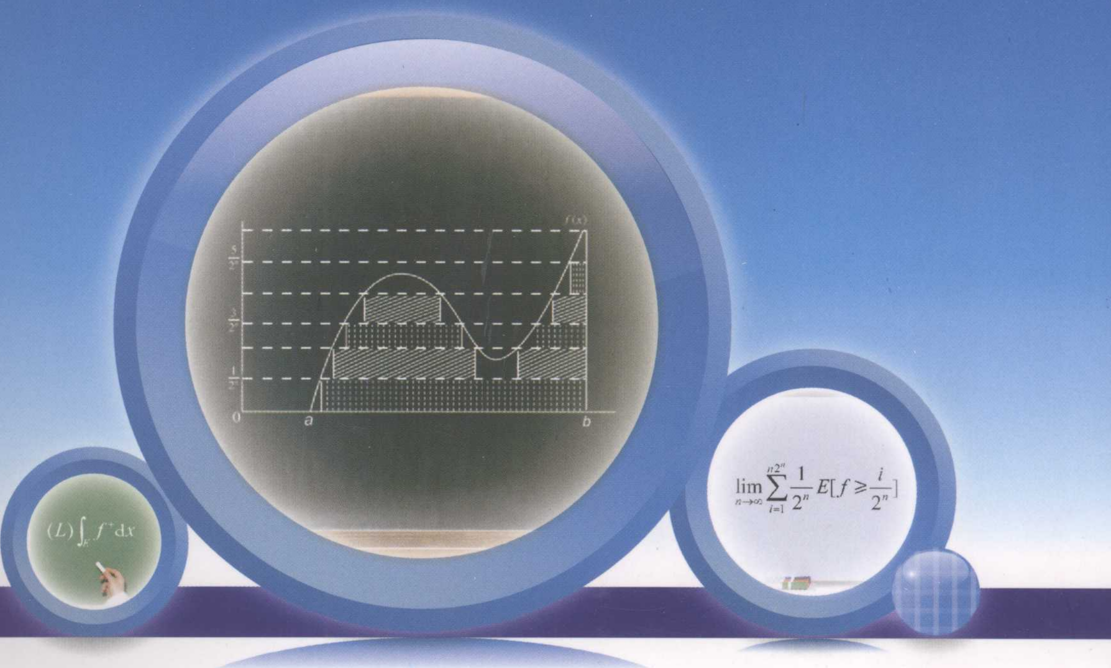
高等教育“十一五”规划教材

SHIBIAN HANSHULUN XINBIAN

实变函数论新编

魏 勇 编著



科学出版社

高等教育“十一五”规划教材

实变函数论新编

魏 勇 编著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

全书分为三章：第一章“集合论基础与点集初步”介绍了集合的概念、运算、势，讨论了 $\mathbf{R}^n$ 中集合的特殊点和特殊集及其性质；第二章“可测集与可测函数”，介绍了可测集合与可测函数概念，讨论了各自具有的性质和相互关系，为改造积分定义作必要的准备；第三章“Lebesgue积分及其性质”定义了新积分，并讨论了新积分的性质.

鉴于学时所限，同时为了培养学生的自学能力，让学生通过学习“实变函数”更多体会数学创新方法，本书提供了四个附录供学生自学，也便于教师概略性地选讲.

本书的适用对象为数学与应用数学专业本、专科学生. 因本书注重挖掘“实变函数”中数学创新思维与初等数学或日常思维的联系，因而尤其适宜师范院校数学专业本、专科学生使用.

图书在版编目（CIP）数据

实变函数论新编/魏勇编著. —北京：科学出版社，2010
（高等教育“十一五”规划教材）
ISBN 978-7-03-028296-5

Ⅰ. ①实… Ⅱ. ①魏… Ⅲ. ①实变函数论-高等学校-教材 Ⅳ. ①O174.1

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第133886号

策划：姜天鹏 宋 芳
责任编辑：王纯刚 李 瑜 / 责任校对：王万红
责任印制：吕春珉 / 封面设计：东方人华平面设计部

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年1月第一版 开本：B5（720×1000）
2011年1月第一次印刷 印张：8 3/4
印数：1—3 000 字数：164 000

定价：18.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉）
销售部电话 010-62140850 编辑部电话 010-62135763-2038

前　言

作者于 1982 年开始教授《实变函数论》(以下简称《实函》)习题辅导课，1986 年起主讲《实函》课程，先后使用过多种教材，学生都有一种共同的感觉，《实函》内容深奥难学，方法多变莫测，再加之扩招以后生源多元化，学生水平参差不齐，对各门课程均感觉困难的学生越来越多，因此师范院校部分师生认为："《实函》太难，与中学无关，应该砍！"．针对这一现实，结合师范院校学生的使命及特点，作者早就想写一本介于《实函》教材和《数学思维方法论》之间的读物，以达到既能系统传授《实函》知识，又能以该学科知识为载体，还原数学家在当时知识背景下的原始创新过程，剖析定义的引入、方法的产生、定理的发现等过程的自然性，即展示数学创新思维方法的目的．

本教材基于上述理念作了初步尝试，如通过建立 1-1 对应比较元素个数多少时学生感觉非常抽象和深奥，就将其与原始人在只能数 1、2，无法数到 3 及其以上时，将 3 个及其以上统统称为"许多"的情况下，利用"你给我一个苹果我才给你一个梨子"，即"以一换一"保证自己"不吃亏"或"不亏欠"别人的方法进行对比，使学生加深了对方法的自然性、合理性的理解；又如在中学"不包含任一端点的区间叫开区间，包含所有端点的区间叫闭区间"的概念基础上，首先将"端点"自然平移为一般集合的"边界点"，然后称"不包含任一边界点的集合为开集，包含所有边界点的集合为闭集"增强了"开集"、"闭集"概念与中学"开区间"、"闭区间"概念的衔接性，减少了抽象性；再如依据研究测度理论的目的是"将'体积'概念从区间拓广到一般集合"，于是将区间的测度直接规定为"体积"，由于开集可以表示成互不相交的区间之并，故可以规定开集的"体积"就是这些区间"体积"之和，对于不规则集合 E 可以用包含 E 且与 E 接近的规则集合——开集的"体积"取而代之，然而包含 E 且与 E 接近的开集并非唯一，为了保证取代值的确定性产生了用"最小"的念头，但无限集中最小者不一定存在，于是不得已利用了"下确界"概念，合理地还原再现了外测度概念的创新过程．

对于有些问题仅仅还原为原始创新过程是不够的，还必须随着研究的深入、新结果的发现而与时俱进．如在介绍 Lebesgue 积分针对 Riemann 积分弊病对症下药的新思路后得出结论：究竟哪些函数能保证形如 $E[b > f \geqslant a]$ 的集合可以求测度是问题的关键，而 $E[b > f \geqslant a] = E[f \geqslant a] - E[f \geqslant b]$，所以问题又转化为研究哪些函数能保证形如 $E[f \geqslant a]$ 的集合可测，这就是传统教材的可测函数定义．随着对新积分性质研究的深入，发现 Lebesgue 积分的几何意义是函数图像与定义域所在"坐标平面"围成的上、下方图形"体积"之代数和，于是改变积

分定义的关键就转化为研究哪些函数的上、下方图形为可测集，于是可以通过 f 上、下方图形可测来定义函数 f 可测，进而产生积分新定义

$$\int_E f\,\mathrm{d}x = mG_{(f^+,\ E)} - mG_{(f^-,\ E)}$$

其中 $mG_{(f^+,\ E)}$，$mG_{(f^-,\ E)}$ 至少一个有限.

这种定义强化了积分结果的几何意义，虽然对 Lebesgue 积分与 Riemann 积分分割、求和、取极限一脉相承的联系有所弱化，但在对 Lebesgue 积分计算步骤及计算技巧的探讨中得到了弥补.

概念的产生如此，定理结论的发现也类似，лузин 定理从形式上看感觉抽象，证明过程复杂冗长，学生自然要问：这么复杂的东西，лузин 是如何想到的？作者试图采用合乎逻辑的推理、猜测、想象还原 лузин 定理被发现的背景：当人们通过众所周知的 Dirichlet 函数在[0，1]上处处间断，去掉[0，1]中有理数集后，每点相对无理数集连续，就自然联想到对于一般可测函数而言是否都是去掉一个恰当的零测度集后就相对连续呢？遗憾！探索过程中发现了反例，于是只有退而求其次得到一个更弱的结果："对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 闭集 $F_\varepsilon \subseteq E$ 满足 $m(E-F_\varepsilon) < \varepsilon$，$f$ 在 F_ε 上相对连续"，这便是著名的 лузин 定理.

新概念的提出与新结果的产生是截然不可分割的，往往交替出现，且互为因果，如 Riemann 积分与极限交换顺序有一个"一致收敛"的苛刻条件，欲去掉这个苛刻条件并非易事，因为 Dirichlet 函数

$$D(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$$

其中 $F_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)$，且

$$f_i(x) = \begin{cases} 1 & x = r_i \\ 0 & x \neq r_i \end{cases}$$

其中$\{r_1, r_2, r_3, \cdots\}$为[0，1]中有理数全体．虽然所有 $f_i(x)$、$F_n(x)$ 都间断点有限，从而 $f_i(x)$、$F_n(x)$ 都是(R)可积函数，但其极限、无穷和 $D(x)$ 却不再是(R)可积函数，其根本原因仍然在于 Riemann 积分定义条件太苛刻．Lebesgue 通过对积分定义的改造去掉了苛刻条件，拓广了可积范围，当每个 $f_i(x)$，$F_n(x)(L)$ 可积时，可以证明 $f_i(x)$ 的无穷和，即 $F_n(x)$ 的极限 $D(x)$ 也(L)可积．于是在几乎处处收敛意义下即可获得 Levi 定理、Lebesgue 逐项积分定理、Lebesgue 控制收敛定理．但人们不满足于这点收获，还想扩大战果，不局限于去掉"一致收敛"中的"一致"二字，还想拓展"收敛"二字的内涵，具体如何拓展呢？可先从集合论角度对"一致收敛"的实质进行剖析：

$$f_n \xrightarrow{n\to+\infty} f \Leftrightarrow \forall\sigma>0,\ \exists N,\ \text{当}\ n>N\ \text{时，有}\ E[\,|\,f_n-f\,|\geqslant\sigma]=\varnothing$$

这里要求当 $n>N$ 时，有 $E[\,|\,f_n-f\,|\geqslant\sigma]=\varnothing$ 显然很苛刻．能否将 $E[\,|\,f_n-f\,|\geqslant\sigma]=\varnothing$ 改为 $mE[\,|\,f_n-f\,|\geqslant\sigma]=0$，甚至放得更宽一点，不仅允许 $E[\,|\,f_n-f\,|\geqslant\sigma]\neq\varnothing$，而且允许 $mE[\,|\,f_n-f\,|\geqslant\sigma]>0$，且只要求 $mE[\,|\,f_n-f\,|\geqslant\sigma]\to 0\ (n\to+\infty)$ 呢？这就导致了依测度收敛这个全新概念的产生．将 Lebesgue 控制收敛定理中的收敛拓展为依测度收敛后就必然大大提高了 Lebesgue 积分操作的灵活性．诸如此类在系统传授知识的同时展示数学创新思维方法的例子随处可见，在此不一一列举．

《实函》应集中展示数学思维方法论，“通过有限把握无限，通过简单把握复杂，通过具体把握抽象”是数学这门学科中分析问题和解决问题的普遍思维方法．“通过有限把握无限”虽然已在《数学分析》的极限、级数、积分理论中有充分体现，《实函》将可以通过有限把握的无限与不可以通过有限把握的无限，区分为可数无限与不可数无限，测度可加性仅限于有限或可数无限，“无限个0之和仍然是0”必须在“无限”前加条件“可数”限制．将测度理论用于概率时，即“零概率事件不一定是不可能事件，不可数无限个零概率事件之并有可能组成必然事件”．“通过简单把握复杂，通过具体把握抽象”更应是《实函》从多角度反复体现的基本内容，众多结构定理便是理论保证，如开、闭集结构定理保证通过区间把握开集、闭集，可测集构造定理保证先通过开集、闭集把握 G_δ、F_σ 型集，然后通过 G_δ、F_σ 型集把握可测集，可测函数结构定理保证通过简单函数把握非负可测函数，通过非负可测函数把握一般可测函数，有界变差函数的结构定理保证通过对单调函数把握有界变差函数．

лузин 定理的证明过程具有“通过简单把握复杂，通过具体把握抽象”的典型性和代表性，先证对简单函数结论成立，然后在测度有限条件下通过简单函数极限逼近非负可测函数证结论成立，接着将正部、负部两个非负可测函数之差表示为一般可测函数证结论仍然成立．最后将测度无限集分解成可数个互不相交的测度有限集，并予以各个击破．又如直接积的测度定理、积分可加性证明、截面定理、“不定积分的导函数刚好是被积函数”定理本身和引理的证明均为类似方法．

总之，无论是概念、命题的引入，还是各种结论的论证，本教材都力图从最简单的实例出发，阐明抽象概念的原始形态及其发展演化过程，对复杂命题的证明注重解决问题的层层递进思路，让学生感悟数学的思维方式．

《实函》课程建设与教学改革一直得到西华师范大学和四川省教育厅的高度重视和支持．1990 年《实函》获四川师范学院（现西华师范大学）基础课程评估一等奖，2000 年《实变函数论课程体系与教法改革》获四川师范学院教学成果二等奖，2003 年《实函》被评为西华师范大学精品课程，2004 年《实函》被评为四川省省级

精品课程，并以本课程改革成果作为“挖掘数学思想方法，提高学生数学素养”的重要组成部分，2005 年《实函》获四川省政府教学成果二等奖，2009 年《实变函数分层教学策略与教改探索》获四川省教学成果二等奖．本教材出版得到了四川省教育厅精品课程建设项目和西华师范大学优秀教材出版基金的资助．

本教材的形成与完善得益于我校数学与信息学院的众多老前辈和同仁的帮助、指点，如从作者担任助教开始，顾永兴、陈国先、邓坤贵等老师对如何处理《实函》教材给予了多方面的示范和指导，在形成讲义初稿后承蒙王庆平、何中全老师的试用，在试用过程中老师和同学都提出了许多宝贵的修改意见，借此机会向这些老师、同学表示衷心的感谢，感谢他们为本教材日趋成熟所作的贡献．

本教材尽力将作者所在教学团队实践中的系列教学探索结果融入其中，同时吸收了众多优秀教材的精华，书中许多直观示意图由陈友军、李俊杰等老师帮助完成，在此向各位原创作者表示衷心感谢．

由于本人才疏学浅，未能完全实现初衷，以上尝试可能导致了非驴非马、不伦不类的局面，故在敬请各位同仁海涵的同时，也期盼各位同仁不吝赐教，以便进一步完善教材结构和内容．

魏　勇

2010 年 8 月

于四川南充，西华师范大学

目　录

绪 论

一、《实变函数论》的内容

顾名思义，《实变函数论》即讨论以实数为变量的函数. 这样的内容早在中学就已学过，中学学的函数概念都是以实数为变量的函数，大学的数学分析、常微分方程研究的也是以实数为变量的函数，那么《实变函数论》还有哪些内容可学呢？简单地说：《实变函数论》只做一件事，那就是恰当地改造积分定义使得更多的函数可积，使得积分的操作更加灵活.

何以说明现有的积分范围狭窄呢？因为像 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}0 & x\text{ 为}[0,\ 1]\text{ 中的无理数时}\\ 1 & x\text{ 为}[0,\ 1]\text{ 中的有理数时}\end{cases}$$

这种形式极为简单的函数按现有积分定义也不可积，所以我们有足够的理由认为现有可积范围确实太狭窄.

如何改造积分定义来达到拓广积分范围的目的呢？让我们先剖析一下造成这一缺陷的根本原因在何处，只有先找准病根，才能对症下药. 由数学分析知：对任意分划 T：$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，由于任意一个正长度区间内既有有理数又有无理数，于是关于 Dirichlet 函数 $D(x)$ 在$[0,\ 1]$上的大小和之差恒有

$$S(T,\ D)-s(T,\ D)\equiv 1-0\equiv 1\not\to 0$$

从而不可积，如果分划不是很呆板，不需苛刻地要求一定要分成区间的话，还是有可能满足大小和之差任意小的. 比如，只要允许将函数值为 1 的有理数分在一起，将函数值为 0 的无理数分在一起，那么大小和之差就等于零了. 法国的著名数学家 Lebesgue 就抓住这个着眼点，首先让分划概念更加广泛，更加灵活，从而允许将函数值接近的点分在一起，以保证大小和之差任意小. 即

$$D\text{：}E=\bigcup_{i=1}^{n}E[y_{i-1}\leqslant f<y_i]$$

其中 $m\leqslant f<M$，$m=y_0<y_1<\cdots<y_n=M$ 时，要

$$S(D,\ f)-s(D,\ f)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-y_{i-1}]mE[y_{i-1}\leqslant f<y_i]\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}[y_i-y_{i-1}]mE<\varepsilon$$

只需取 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}[y_i-y_{i-1}]<\dfrac{\varepsilon}{mE+1}$，而 y_i-y_{i-1} 正是新思维下可以人为控制的重要因素，这里 $mE[y_{i-1}\leqslant f<y_i]$ 相当于集合 $E[y_{i-1}\leqslant f<y_i]$ 的长度.

虽然思路非常简单，但实现起来并非易事. 因为 $E[y_{i-1} \leqslant f < y_i]$ 可能很不规则，如何求 $mE[y_{i-1} \leqslant f < y_i]$ 呢？这就是一般集合的测度问题，即测度理论本来是为了推广长度、面积、体积概念到一般集合，然而在实施过程中却使我们非常遗憾，我们无法对直线上所有集合规定恰当测度同时满足两点最基本要求：① 落实到具体区间的测度就是长度，即测度确为长度概念的推广；② 总体测度等于部分测度之和，即可列可加性成立. 只能对部分集合规定满足这两点基本要求的测度，这一部分集合便是所谓的可测集合. 那么哪些函数才能保证形如 $E[y_{i-1} \leqslant f < y_i]$ 的集合均为可测集合呢？由于 $E[y_{i-1} \leqslant f < y_i] = E[f \geqslant y_{i-1}] - E[f \geqslant y_i]$，于是我们采用"对 $\forall a$，有 $E[f \geqslant a]$ 可测"作为函数 f 在 E 上可测的定义. 先研究集合可测性，然后通过研究系列集合 $E[f \geqslant a](\forall a)$ 是否均可测来研究函数可测性及其性质，这就是第二章内容 —— 可测集与可测函数.

有了以上准备之后，才根据前述思路对可测集 E 上定义的可测函数先定义大（小）和

$$S(D, f) = \sum_{i=1}^{n} y_i mE[y_{i-1} \leqslant f < y_i], \quad s(D, f) = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} mE[y_{i-1} \leqslant f < y_i]$$

然后规定 $\inf\limits_{D} S(D, f)$，$\sup\limits_{D} s(D, f)$ 分别为 f 在 E 上的上、下积分值. 当上、下积分值相等时，将其公共值定义为积分值，然后从多角度讨论积分性质.

Lebesgue 基于对直观集合概念的深刻洞察，放弃了对函数定义域进行直接分割进而求和的方法，转而通过对函数值域进行分割以达到对定义域间接分割的目的，然后再求和. 这既是法国著名数学家 Lebesgue 在 20 世纪创立新型积分的原始思路，也是传统的《实变函数论》教材介绍 Lebesgue 积分定义的普遍方法.

鉴于人们在研究可测函数时的发现：可测函数的本质特征是正、负部函数的下方图形均为可测集. 结合 Riemann 积分的几何意义的启发，本教材直接规定其测度之代数和为积分值，当然要以代数和存在为前提，即必须加条件避免 $\infty - \infty$. 最后通过对新旧积分范围的比较、新积分的计算技巧探讨，以及对新积分对非负可测函数积分几乎无条件满足函数可列可加，集合可列可加，积分与极限交换顺序可以将一致收敛放宽到几乎处处收敛或依测度收敛等系列性质的证明，经检验实现了预期目标：可积范围更加宽阔，运算操作更加灵活. 这就是本教材第三章内容 ——Lebesgue 积分及其性质.

而测度理论所度量的对象是集合，尤其是多元函数定义域所在空间 $\mathbf{R}^n$ 的子集，因此在研究可测集与可测函数之前，有必要先介绍集合初步知识与常见点集及其结构、性质，这就是第一章内容 —— 集合论基础与点集初步.

二、《实变函数论》的特点

由以上叙述可以看出《实变函数论》内容单纯，学习起来应该简单，然而实际情况却大相径庭，各届同学都感到学习《实变函数论》有一定困难. 原因在何处呢？从学生反映意见看集中在以下三点.

1)《实变函数论》高度抽象，防不胜防.

抽象到什么程度呢？有人用八个字概括为："似是而非，似非而是"，并有例为证.

例 1　若许多同学站成一列，且男女生交叉排列，任意两个男生中间有女生，任意两个女生中间有男生，在其中任取一个片段，男女生的个数关系无非只有三种可能：或男女生一样多，或男生比女生多一个，或女生比男生多一个. 也就是说在任一片段中男女生个数似乎至多相差一个. 与直线上的有理数、无理数排列表面看来很类似，任意两个有理数中间有无理数，任意两个无理数中间有有理数，在直线上任取一节线段，有理数、无理数的个数似乎无非只有三种可能：或有理数、无理数一样多或有理数多一个或无理数多一个，也就是说在任一片段中有理数、无理数个数似乎至多相差一个. 但严密的逻辑推理告诉我们：这种说法是完全错误的. 事实上，有理数相对无理数而言少得多. 少到什么程度呢？即使是有理数开头有理数结尾这样对有理数最有利的情形，有理数与无理数相比也是微不足道的，"有它不多，无它不少". 即去掉有理数后的无理数居然还与所有实数一样多，这就是所谓的"似是而非".

例 2　有理数在直线上密密麻麻，自然数在直线上稀稀拉拉. 如果在学习《实变函数论》以前有人说自然数与有理数一样多的话，谁也不会承认，而《实变函数论》却严密论证该结论无可非议，这就是所谓的"似非而是".

2)《实变函数论》的定理、定义、引理、推论多，例题少，计算内容少，理论性强.

理论性强是由《实变函数论》的内容结构所决定的，因它只做一件事：恰当地改造积分定义，使得更多的函数可积. 这就使得《实变函数论》的绝大部分篇幅只是在做理论上的准备，而很少有应用、例题. 但从另一个角度来讲，《实变函数论》的习题几乎全是证明题，而定理、引理、推论的证明本身就是一些典型的示范性的例子.

3)《实变函数论》对近代数学方法有较多体现，并对数学创新思维从多角度进行训练.

可测函数可以表示成简单函数、连续函数的极限，于是由简单函数全体到可

测函数全体的扩充，由连续函数全体到可测函数全体的扩充，完全类似于《泛函分析》、《拓扑学》中度量空间、拓扑空间的完备化.

可测集合簇对“交”、“并”、“余”、“差”、“上极限”、“下极限”、“极限”运算的封闭性，可测函数对“加”、“减”、“乘”、“除”、“最大值”、“最小值”、“上确界”、“下确界”、“上极限”、“下极限”、“极限”运算的封闭性类似于近世代数中对“群”、“环”、“域”等代数结构的研究.

基于各种结构定理(如开集结构、可测集结构、可测函数结构、有界变差函数结构等定理）和各种运算封闭性的证明和应用，对“通过有限把握无限，通过简单把握复杂，通过具体把握抽象”等共通性数学方法作了全方位、多角度的示范.

因此，学好《实变函数论》不仅有利于后继各门课程的学习，也有利于对初等数学思维方法的训练和引导.

三、学习《实变函数论》的方法

针对《实变函数论》的特点，下面介绍几种学习本门课程较为有效的方法.

1）由于《实变函数论》高度抽象、理论性强，所以对于每一个尚未证明的结论都应持谨慎态度，不能简单类比后就盲目相信或否定，而要经过严格论证或举出反例，否则就有可能出现类似例 1、例 2 的错误.

2）对于每一个已经证明的结论不仅仅是记住，更重要的是理解其证明思想，只有理解其证明思想才能借鉴其方法. 之所以有人将“可数集并上至多可数集仍为可数集”记得滚瓜烂熟，却无法证明“无限集并上一个至多可数集后其势不变”；有人懂得“无限集并上一个至多可数集后其势不变”的证明，却对直接建立$(0,1)$与$[0,1]$之间的1-1对应束手无策，根本想不到要用的是证明定理的思想，而不是其结论本身. 其原因就在于未消化其证明，从而未能达到举一反三的目的. 也有人知道“可数个可数集之并仍为可数集”，却不知道反过来如何将一个可数集分解成可数个互不相交的可数集之并，原因也是如此.

3）尽管凭直观想象可能会出现例 1、例 2 那样“似是而非，似非而是”的结论，但也不能因噎废食. 在对每一个定理、引理、推论作证明之前，都应尽量想象其合理的直观意义. 直观解释虽然不能代替严格的论证，却会给我们的证明思路带来启迪，直观想象永远是数学发现联系、揭示规律、猜测命题的重要依据和行之有效的手段.

4）既然《实变函数论》是《数学分析》研究内容的扩展，研究方法的改进和完善，那么新旧知识之间就难免存在诸多内在联系. 因此，及时复习相关旧知识可以达到温故而知新的目的，同时要注重体会如何借鉴旧方法来解决新问题的思

路，并要特别注意新，旧方法的实质区别，从而把握创新点.

5）注意“下连上串，左顾右盼”．如在学习 $\mathbf{R}^n$ 中点与点之间的距离时，请先复习初中学的直线上两点间的距离公式，高中《平面解析几何》学的平面上两点间的距离公式，大学《空间解析几何》学的立体空间中两点间的距离公式，即“下连”；然后浏览本课程的后继课程《泛函分析》的度量空间中距离的相关内容即“上串”，从而把握距离概念的实质．又如，在学习抽象测度 μ 的定义时，验证概率统计中的概率是一种测度，子集中元素的个数是一种测度，非负可测函数关于任一已有测度在每一子集上的积分都构造出了另一新测度，并思考还有哪些问题实质上是测度论问题，即“左顾右盼”．

6）无论是以个案形式出现的例题解法，还是为主线服务的定理、引理、推论，或者是以本门课程的核心结论体现的方法，如果感觉深奥难懂，就尝试在常见思维中寻找共同或相似之处，尽力使自己感觉方法自然．如果感觉简单、常见，千万别不屑一顾，要尽量将此具体方法通过抽象化、一般化转变成带普遍性的方法，从而通过一门课、甚至仅仅只是一个定理、公式的学习，达到掌握一类问题的解决方法之目的.

7）既要注重“顾名思义”，又要切忌“望文生义”．顾名思义有利于理解记忆，有利于已有知识的梳理和融会贯通．但通过“顾名”只能“思义”，不能“生义”．数学是一门非常严谨的学科，所有概念都有严格的逻辑界定，不能凭主观臆测，如“几乎”在日常语言中是“差不多”的意思，那么数学中的“几乎处处”成立通过顾名思义理解成“差不多”每处都成立，既然是“差不多”就应允许有例外点不成立，例外点有多少才算“差不多”呢，是1个？2个？有限个？可数个？不能望文生义，必须钻研严格的数学定义，数学没有从例外点的个数(即势)的角度来界定“差不多”，而是从例外点全体的测度角度界定了“差不多”，即“例外点全体的测度为0时”就是严格数学意义下的“差不多”．从而不排除例外点多到 c 势个．一旦有了严格定义就限制了自由发挥余地，就不能说“例外点全体测度非常非常小时也可以称几乎处处成立”．

8）注重内容初步理解后的思路梳理．理顺发展脉搏，注重各概念、命题之间先后顺序、逻辑依承关系，从整体体会、把握、回味《实变函数论》的基本内容与常见思维方法．并立足《实变函数论》，将共性思维方法上升到一般，平移至相关.

9）遇到困难及时与同学讨论，或请老师释疑，不要拖延到问题成堆才来梳理，造成时间紧迫来不及，甚至因问题太多而丧失攻克难关的勇气.

四、本教材的几点特色处理

为了实现“写一本介于传统《实函》教材和《数学思维方法论》之间的读物”的初衷，本教材在保证系统传授“实变函数论”知识的前提下，尽量以该学科知识为载体，通过剖析学科的产生、定义的引入、方法的形成、定理的发现等过程的自然性，还原数学家在当时知识背景下的原始创新过程，多角度地展示数学创新思维方法. 为此,我们主要从以下几个方面进行初步尝试.

1）将“不含端点的区间称为开区间，包含所有端点的区间称为闭区间”一般化为“不含边界点的集合称为开集，包含所有边界点的集合称为闭集”，从而使概念更加直观，便于学生理解其实质的同时，开集与闭集的对偶性等定理证明也被简化.

2）在过去的“区间体积”概念和“开集构造”理论基础上，引入了开集“体积”概念，为简化测度定义及性质讨论奠定了基础. 用

$m^*E=\inf\{|G|\,|\,G$开，且$G\supset E\}$取代$m^*E=\inf\{\sum\limits_{i=1}^{+\infty}|I_i|\,|\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}I_i\supset E$，$I_i$为区间$\}$

不仅使测度概念在保证实质不发生变化的前提下，形式上得到简化、直观化，而且使得诸如$m^*E=|I|$等一系列命题的证明过程得到大大简化.

3）将传统教材中在学习了 Fubini 定理之后才讲的乘积空间测度，提前到紧接着测度的概念和性质讲，保证了在讲可测函数时能证明可测函数的下方图形可测，为直接用非负可测函数下方图形的测度规定其积分值提供了保证.

4）直接用正、负部函数下方图形的测度之差规定积分值，不仅使得积分概念简单、直观、明了，学生易于接受，同时也使得诸如并集上的积分等于各子集上的积分求和、Levi 定理等一系列命题的证明过程得到大大简化.

5）对函数列的“一致收敛”、“近一致收敛”、“几乎处处收敛”、“依测度收敛”四者的关系通过图示概括总结，简单、明了、直观、全面.

6）既注重紧扣《实变函数论》发展主线，又试图使思维活跃的学生在每个知识的枢纽点能浮想联翩. 紧接概念定义和命题证明后的思考与注释，以及答案无标准、不唯一的条件探寻类习题都是为此目的作的尝试.

7）注重引导“下连上串，左顾右盼”，注重“他山之石，可以攻玉”的应用示范. 除了传统教材中已有的利用 Lebesgue 积分性质获得了数学分析中 Riemann 可积的本质特征外，还利用集合势理论获得了概率论中非离散随机变量全体既不只是分布函数连续的随机变量，也不只是再加上所有可能值连续充满某个区间的随机变量，而是“所有可能值全体在承认 Cantor 连续统假设前提下具有连续统的

势”．利用集合势理论获得了随机过程中样本实现远远多于样本函数的重要结论等．

8）既注重知识的传授，又注重数学创新思维的挖掘和点拨，并着力将创新之处归结为常见思维的必然，让学生在欣赏别人创新思维的同时感到创新并不很难，且机遇常在身边．注重共通性思维方法的提炼，在适当章节对本教材中反复出现的共通性方法给予对比、概括、总结，并配置相应习题以便于学生实践、训练．

9）尽管《实变函数论》结论的深刻性已大大超越直观，许多复杂情形根本无法通过直观展现，但这些深刻结论的发现却与直观有着千丝万缕的联系．因此，本教材尝试用较多直观示意图来帮助学生理解新概念和命题，期盼对激发学生创新思维有益处．

10）鉴于学时所限，为了培养学生自学能力，为了让学生通过学习《实变函数论》体会数学创新方法，本教材将以下三种类型的内容以附录形式列出，供学生自学，或供教师概略性选讲．

① 结论重要，细节繁琐，不宜详细讲授，适宜教师介绍条件结论、直观描述含义、概述证明思路的内容．如“不可测集的构造”，“单调函数的可微性证明”皆属于此类．

② 发展过程曲折，虽讲授不宜完全重复历史发展轨迹，但了解思维转变、方法逐渐完善的过程对创新不乏启迪和借鉴意义的内容．如“可测集合、可测函数定义演变过程追踪”便是如此．

③ 学科内容的自然扩展与延伸，将具体结论上升到一般理论的内容．如“一般集合的抽象测度和抽象积分”便是如此．

总之，编写尝试贯穿于包含附录在内的整个教材，此处不一一列举．

第一章　集合论基础与点集初步

本章先介绍了集合的概念、集合的运算及其规律、集合列的上下极限及其性质；以集合间的一一对应为工具定义了集合的势，讨论两类特殊势的集合——可数集与 c 势集的定义、性质、例子、运算封闭性；证明了无最大势的集合存在，介绍了Contor连续统假设及其研究现状．其目的是为研究点集及其测度作必要的准备，当然，它又是众多数学分支的共同基础．

接着针对具体距离空间 $\mathbf{R}^n$ 介绍了距离、极限、邻域、区间、区间体积等基本概念，然后定义内点、聚点、外点、边界点、开集、闭集、自密集、完备集、Contor P_0 集、Contor G_0 集等特殊的点和集．介绍了有界集的聚点原理、有限覆盖定理、距离可达定理、隔离性定理．最后讨论了直线上开集、闭集以及完备集的构造，并在一般 $\mathbf{R}^n$ 空间中研究了开集的构造，且针对 $\mathbf{R}^n$ 空间中开集规定了“体积”．

第一节　集合概念与运算

一、集合的概念

集合是数学中最基本、最原始、最简单的概念之一．它与中、小学已经学习过的点、线、面概念一样，不能由其他已有概念来定义．严格的集合定义只能采用一组公理来刻画，这里只采用下述朴素的说法予以描述．

所谓的集合是指一定范围内研究对象的全体，其中每一个对象称为元素．我们约定用小写字母表示元素，大写字母表示集合．元素 a 在集合 A 中时，记为 $a \in A$，读作 a 属于 A，或 A 包含 a；元素 a 不在集合 A 中时，记为 $a \notin A$，读作 a 不属于 A，或 A 不包含 a．

例 1.1.1　实数全体构成一个集合，常用 $\mathbf{R}^1$ 记之．

n 元实数组全体组成一个集合，用 $\mathbf{R}^n$ 记之．

区间 $[a, b]$ 上连续函数的全体构成一个集合，记为 $C[a, b]$．

E 中满足 $f(x) \geqslant a$ 的所有 x 的全体构成一个集合，记为 $E[f \geqslant a]$．

在一定范围内包含了所有研究对象的集合，称为全集，记为 S．为了形式上的方便，我们引入了不含任何元素的集合，称为空集，记为 $\varnothing$．

集合中的元素具有三条基本性质：① 明确性：即一个元素 a 要么属于 A，要