初級中學學生用

開明代數教本

下冊

劉薰宇編

一九五〇年一月修訂本

開明書店出版

初級中學學生用

開明代數教本

〔下冊〕

劉薰宇編

開明書店印行

開明代數教本〔下册〕

一九二九年七月初版　一九五〇年二月十五版

每册基價六・六〇

編著者　劉　薰　宇

發行者　上海福州路　開明書店　代表人范洗人

印刷者　開明書店

(114 P.) W　代

下册目次

第十三章　三次以上的式子的因式…… 1

三次的式子的因式(1)　四次的式子的因式(3)

第十四章　最高公因式和最低公倍式…7

第十五章　分式 …………………………………… 17

分式的性質(17)　分式的乘法和除法(21)　分式的加法和減法(24)

第十六章　分式方程式…………………………… 32

分式方程式的解法(32)　聯立一次分式方程式(36)

第十七章　指數和對數…………………………… 44

分數指數(44)　10^0的意義(46)　對數(50)　常用對數(52)　表的用法(57)　對數的性質(59)　對數的應用(62)　複利息(69)

第十八章　高次方程式…………………………… 74

第十九章 聯立二次方程式……………………80

兩方程式有一個是一次的(80) 兩方程式都是二次的(86)

第二十章 不盡根數……………………96

無理數和不盡根數(96) 同類根式和同次根式(98) 共軛式(101)

第二十一章 無理方程式……………………106

無理式和有理式(106) 增根(108) 可逆的步驟(109) 二次形的無理方程式(114) $a\pm2\sqrt{b}$ 的平方根(116)

第二十二章 比和比例……………………119

比(119) 齊次式和齊次方程式(122) 比例(126)

第二十三章 變數法……………………130

正變(130) 反變(133) 合變(137)

第二十四章 級數……………………140

何謂級數(140) 算術級數(140) 算術級數的和(141) 算術級數的和的一般形式(144) 算術中數和算術中項(145) 幾何級數(149) 幾

何級數的和的一般形式 (152)　幾何中數和幾何中項 (154)　兩種級數的比較 (156)　用對數計算幾何級數 (158)　無窮級數 (162)

第二十五章　不等式 ……………………………175

何謂不等式 (175)　不等式的諸性質 (176)　不等式的解法 (178)

第二十六章　$(a+x)$的乘方 ……………………185

$(a+x)^n$的展開 (185)　$(1+x)^n$的近似值 (187)

第二十七章　開方……………………………………194

完全平方 (194)　一般的開平方法 (197)　一般的開立方法 (199)

附錄…………………………………………………201

平方根表 (201)　平方根表用法 (210)　對數表 (211)　七位對數表 (214)　本書所用符號表 (215)　譯名對照表 (217)

第十三章

三次以上的式子的因式

一 三次的式子的因式

134. 由乘法可得下列各恆等式：

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)\equiv a^3+b^3,$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)\equiv a^3-b^3,$$

$$(a+b)^3\equiv a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

$$(a-b)^3\equiv a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,$$

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$
$$\equiv a^3+b^3+c^3-3abc.$$

將這幾個恆等式的兩邊交換，就得幾個分解因式的式子：

$$a^3+b^3\equiv(a+b)(a^2-ab+b^2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(v)},^*$$

$$a^3-b^3\equiv(a-b)(a^2+ab+b^2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(vi)},$$

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\equiv(a+b)^3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(vii)},$$

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\equiv(a-b)^3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(viii)},$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$\equiv(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)\cdots\text{(ix)}$$

---

* 以前的式子見第九章。

〔例題1〕 分解$27x^3-8$的因式。

$$27x^3-8\equiv(3x)^3-2^3$$
$$\equiv(3x-2)(9x^2+6x+4).$$

〔例題2〕 分解$(3x-2y)^3+(2x-3y)^3$的因式。

$$原式\equiv\{(3x-2y)+(2x-3y)\}$$
$$\{(3x-2y)^2-(3x-2y)(2x-3y)+(2x-3y)^2\}$$
$$\equiv(5x-5y)\{(9x^2-12xy+4y^2)$$
$$-(6x^2-13xy+6y^2)+(4x^2-12xy+9y^2)\}$$
$$\equiv5(x-y)(7x^2-11xy+7y^2).$$

〔例題3〕 分解$1-12x^2y^2+48x^4y^4-64x^6y^6$的因式。

$$原式\equiv1-3(4x^2y^2)+3(4x^2y^2)^2-(4x^2y^2)^3$$
$$\equiv(1-4x^2y^2)^3$$
$$\equiv(1+2xy)^3(1-2xy)^3.$$

〔例題4〕 分解$x^3+a^3-1+3ax$的因式。

$$原式\equiv x^3+a^3+(-1)^3-3xa(-1)$$
$$\equiv(x+a-1)(x^2+a^2+1+a+x-ax).$$

習題一〇三

分解下列各式的因式:

1. a^3+8b^3.
2. $27a^3-b^3$.
3. y^3+1.
4. $1-125z^3$.
5. a^4+ab^3.
6. x^3y-8y^4.
7. $a^{3n}+b^{3n}$.
8. $a^{3n}-b^{3n}$.

9. x^3+3x^2+3x+1.　　10. $1-3y+3y^2-y^3$.

11. $p^3+6p^2q+12pq^2+8q^3$.　　12. $27-27x+9x^2-x^3$.

13. $a^6+6a^4b^2+12a^2b^4+8b^6$.

14. $x^4-30x^3y+300x^2y^2-1000xy^3$.

15. $x^3+y^3-z^3-3xyz$.　　16. $x^3-y^3+z^3+3xyz$.

17. $1-x^3-y^3-3xy$.

18. $x^{3n}+y^{3n}+z^{3n}-3x^ny^nz^n$.

19. $(x+2y)^3-(2x+y)^3$.　　20. $(x-2y)^3+(y-2x)^3$.

21. $(x-y)^3+(y-x)^3$.　　22. $(x-y)^3-(y-x)^3$.

二　四次的式子的因式

135. 下面的恆等式也是很有用的:

$$\begin{aligned} a^4+a^2b^2+b^4 &\equiv a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2 \\ &\equiv (a^2+b^2)^2-(ab)^2 \\ &\equiv (a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2). \end{aligned}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a^4+a^2b^2+b^4\equiv(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)}\cdots\cdots(\text{x}).$$

這也是可注意的,a^2+b^2 不能被分解成實有理因式,而 a^4+b^4 卻能夠這樣;即

$$\begin{aligned} a^4+b^4 &\equiv a^4+2a^2b^2+b^4-2a^2b^2 \\ &\equiv (a^2+b^2)^2-(\sqrt{2}\,ab)^2 \\ &\equiv (a^2+\sqrt{2}\,ab+b^2)(a^2-\sqrt{2}\,ab+b^2). \end{aligned}$$

這兩個因式都是實數,並且是有理數,雖然 ab 的係數是無理數,但在代數上,全式是不作爲無理數看的。

習題一〇四

分解下列各式的因式:

1. x^4+x^2+1.
2. $a^4-7a^2b^2+b^4$.
3. $a^4-6a^2b^2+b^4$.
4. p^6-q^6.
5. p^6+q^6.
6. a^4+4.
7. $a^4+2a^2b^2+9b^4$.
8. a^4+16.
9. x^8+x^4+1.
10. x^8+1.
11. $(3a^2-b^2)^2-(a^2-3b^2)^2$.
12. $a^2b^2-a^2-b^2+1$.
13. $x^2(x+y)^2-(x^2+y^2)^2$.
14. $9a^2+6ab-4c^2+4cb$.
15. $a^4-ya^3+z^3a-z^3y$.
16. $(a^2+4a)-(b^2-4b)$.
17. $6x^2+7ax-2x-3a^2-3a$.
18. $a^2-b^2+8bc-16c^2$.
19. $a^2+b^2+2(ab+ac+bc)$.
20. $(x^2+4x)^2-2(x^2+4x)-15$.
21. $\{x^2-(y-z)^2\}\{y^2-(z-x)^2\}\{z^2-(x-y)^2\}$.
22. $(x-1)(x-2)(x-3)+(x-1)(x-2)-(x-1)$.
23. $3ax^4-3ay^4$.
24. $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$.
25. $4(ad+bc)^2-(a^2-b^2-c^2+d^2)^2$.
26. $(x+y)^2+x+y$.
27. x^2-y^2+x-y.
28. $x-xy+(1-y)^2$.
29. $9(a+b)-(a^3+b^3)$.
30. x^4+x^3+x+1.
31. $(a+1)^4+(a+1)^2(b-1)^2+(b-1)^4$.
32. $(ac-bd)^2-(bc-ad)^2$.
33. $125x^6-64y^6$.

34. $81x^4-16y^4$.

35. $(a+b)^3-(a-b)^3-2b^3$.

36. $12a^2b^3-30a^3b^2+18ab^4-24a^4b$.

37. $3(x-y)^2(x+y)-3(x+y)^2(x-y)$.

38. $15a^2x^2-30a^2x^3+105a^2x^4-75a^2x^5$.

39. $x^{m+n}y^m-x^{2n}y^{m+n}-x^ny^{2m}$.

40. $a^2-b^2+x^2-y^2+2(ax-by)$.

41. $a^2-b^2-c^2+d^2-2(ad-bc)$.

42. $x^{5m}-9x^{3n}y^{4n}$.

43. $a^3b^3+3a^2b^2xy+3abx^2y^2+x^3y^3$.

44. $3a^2x^3y+6a^2x^2y^2+3a^2xy^3-3a^2xyz^2$.

45. $36a^2x^5y^3-25a^3x^4y^2z+4a^4x^3yz^2$.

46. $4a^7x^5-24a^6x^6+36a^5x^7$.

47. $(x-y)(x^2-z^2)-(x-z)(x^2-y^2)$.

48. $(a-b)^3+3(a+b)(a-b)^2+3(a+b)^2(a-b)+(a+b)^3$.

習題一〇五

應用分解因式的法則,求下列各二式的積:

1. $(a^2+a^4+a^6)(a^2-1)$.

2. $(a+4b-c)(a-4b+c)$.

3. $(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$.

4. $(a^4+a^3b+a^2b^2)(a-b)$.

5. $(a^2-b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)$.

6. $(1+2a+3b+4c)(1+2a-3b-4c)$.

7. $\{(a+c)+(b-d)\}\{(a-c)+(b+d)\}$.

8. $\{x^2+x(a+b)+ab\}\{x^2-x(a+b)+ab\}$.

9. $(x^2-y^2)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

第十四章

最高公因式和最低公倍式

136. 因式,公因式,倍式,公倍式這些名詞的意義,和算術中說過的因數,公因數,倍數,公倍數的相似。在算術中,一個數的因數一定不比原數大,如35的因數爲1,5,7,35等;而牠的倍數一定不比牠小,如35的倍數爲35,70,105等。但在代數上,一個式子的因式只有次數不比原來的高,牠的倍式的次數不比原來的低;至於數值的大小卻不一定;所以在代數中,和最大公約數以及最小公倍數相當的是'最高公因式'和'最低公倍式'。

〔例題1〕 xy, x^2y 是 x^3y 的因式嗎?回答下面的問題。

(i) 各式的次數如何?那一個的最高?

(ii) 若 $x=1, y=2$,那一個式子的值最大?

(iii) 若 $x=2, y=1$,那一個式子的值最大?

(iv) 若 $x=-2, y=1$,那一個式子的值最大?

(v) $x=\frac{1}{2}, y=8$,那一個式子的值最大?

〔例題2〕 x^5 是 x^3, x^2 的倍式嗎?再回答下面的問題。

(i) 各式的次數如何?那一個的最低?

(ii) $x=1, 2, -1, \frac{1}{2}$ 時,各式的值怎樣?最小的是那一個?

137. 最高公因式就是幾個式子所公有的次數最高的因式。

如 $a^2x^3y^4$, $a^3x^2y^3$ 的公因式有 $a, a^2, x, x^2, y, y^2, y^3, ax, ay, xy, axy, ax^2y, a^2x^2y, a^2x^2y^2, a^2x^2y^3$……等,其中一次,二次,三次,四次,五次,六次,七次的都有,以七次爲最高,所以 $a^2x^2y^3$ 就是牠們的'最高公因式'。

最低公倍式就是幾個式子所公有的次數最低的倍式。

如 $3\,xy^2$, $5\,x^2y$ 的公倍式有 $15\,x^2y^2$, $15\,x^3y^2$, $15\,x^2y^3$……等,其中 $15\,x^2y^2$ 的次數只有四次,是最低的,所以就是 $3\,xy^2$ 和 $5\,x^2y$ 的'最低公倍式'。

138. 求最高公因式和最低公倍式的法則,和算術中求最大公約數及最小公倍數的完全相同,也是分兩種。

〔例題 3〕 求 $9\,a^2bc$, $12\,ab^2c$, $8\,abc^2$ 的 $H.C.F.$ 和 $L.C.M.$*

$\because \quad 9\,a^2bc \equiv 3^2\cdot a^2bc,\ 12\,ab^2c \equiv 2^2\cdot 3\cdot ab^2c,\ 8\,abc^2 \equiv 2^3\cdot abc^2.$

$\therefore \quad H.C.F. \equiv abc,$

$\quad\quad L.C.M. \equiv 2^3.3^2\cdot a^2b^2c^2 = 72\,a^2b^2c^2.$

〔例題 4〕 求 $4(x^2-4\,y^2)$, $6(x^2+xy-2\,y^2)$, $9(x^2-xy-2\,y^2)$

*$H.C.F.$ 和 $L.C.M.$ 就是最高公因式和最低公倍式的英文名詞 Highest Common Factor 和 Lowest Common Multiple 的略寫。

的 $H.C.F.$ 和 $L.C.M.$

$$\because \quad 4(x^2-4y^2)\equiv 2^2(x+2y)(x-2y),$$

$$6(x^2+xy-2y^2)\equiv 2\cdot 3(x+2y)(x-y),$$

$$9(x^2-xy-2y^2)\equiv 3^2(x-2y)(x+y).$$

$$\therefore \quad H.C.F.\equiv 1,$$

$$L.C.M.\equiv 2^2\cdot 3^2(x+2y)(x-2y)(x+y)(x-y)$$

$$\equiv 36(x^2-4y^2)(x^2-y^2)$$

$$\equiv 36(x^4-5x^2y^2+4y^4).$$

通常 $H.C.F.$ 和 $L.C.M.$ 都留着因式相乘的形式，無須展開.

習 題 一 〇 六

求下列各式的 $H.C.F.$ 和 $L.C.M.$：

1. $4ab^2c^3,\ 3a^4c^2,\ 12ab^4c,\ 9a^2b^3c.$

2. $20p^4q^2,\ 15q^4r^2,\ 5r^4p^2.$ 3. $16x^5y^4,\ 12x^3y^2z^4,\ 24y^4z^5.$

4. $a^2-ab,\ (a-b)^2.$ 5. $x^2-y^2,\ x^4-y^4.$

6. $a^2-3ab+2b^2,\ a^2+2ab-8b^2.$

7. $x^4-9x^2,\ x^3-5x^2+6x.$ 8. $x^2-x-6,\ x^2-2x-3.$

9. $x^2+x-6,\ 2x^2+3x-2.$

10. $2x^2-3x-2,\ 4x^2+8x+3.$

11. $x^2-4,\ x^2-x-2,\ x^2+x-2.$

12. $a^2+5ab+6b^2,\ a^2+ab-2b^2,\ a^2+2ab-3b^2.$

13. $x^3-3x^2+2x,\ x^4-x^2,\ x^2+x-2.$

14. $2a^2(a^2-b^2), 6ab(a^2-3ab+2b^2), 5a^3b^2(a^2-ab-2b^2)$.

15. $9x^2-4, 4x^2-36, 3x^2-7x-6, 3x^2+7x-6$.

139. 遇着兩式不容易分解因式的時候,牠們的最高公因式,可以照算術中輾轉相除的方法去求。在這裏先來證明這個方法一下。

如要求 A, B 兩式的 $H.C.F.$ 而 B 的次數低於 A 的。

則 $B)\ A\ (Q_1$……第一次的商

第一次的餘式,牠的 $\underline{BQ_1}$
次數必低於 B 的……$R_1)\ B\ (Q_2$……第二次的商

第二次的餘式,牠的 $\underline{R_1Q_2}$
次數必低於 R_1 的……$R_2)\ R_1\ (Q_3$……第三次的商

第三次的餘式,牠的 $\underline{R_2Q_3}$
次數必低於 R_2 的……R_3

第 n 次的餘式,牠的……$R_n)\ R_{n-1}\ (Q_{n+1}$……末次的商
次數必低於 R_{n-1} 的

$$\frac{R_nQ_{n+1}}{0}$$

由上式可得下列各式:

$R_{n-1} \equiv R_nQ_{n+1} \equiv R_n$ 的倍式。

$R_{n-2} \equiv R_{n-1}Q_n + R_n \equiv R_n$ 的倍式。 爲什麼?

…………………………………

$R_2 \equiv R_3Q_4 + R_4 \equiv R_n$ 的倍式。 爲什麼?

$R_1 \equiv R_2Q_3 + R_3 \equiv R_n$ 的倍式。 爲什麼?

$B \equiv R_1Q_2 + R_2 \equiv R_n$ 的倍式。 爲什麼?

$A \equiv BQ_1 + R_1 \equiv R_n$ 的倍式。 爲什麼?

所以R_n是A和B的公因式。

現在,我們來證明R_n就是A和B的$H.C.F.$

設f是A和B的$H.C.F.$

$$\because \quad A \equiv BQ_1 + R_1,$$

$$\therefore \quad R_1 \equiv A - BQ_1.$$

f既是A和B的公因式,也就是B和R_1的公因式。

又
$$B \equiv R_1Q_2 + R_2,$$

$$\therefore \quad R_2 \equiv B - R_1Q_2.$$

f既是B和R_1的公因式,也就是R_1和R_2的公因式。

而
$$R_1 \equiv R_2Q_3 + R_3,$$

$$\therefore \quad R_3 \equiv R_1 - R_2Q_3.$$

f既是R_1和R_2的公因式,也就是R_2和R_3的公因式。

………………………………………………

照樣繼續推證下去,f也就是R_{n-2}, R_{n-1}的公因式。

而
$$R_{n-2} \equiv R_{n-1}Q_n + R_n,$$

$$\therefore \quad R_n \equiv R_{n-2} - R_{n-1}Q_n.$$

$\therefore$ f是R_n的因式。換句話說,就是R_n包含着A和B的$H.C.F.$;而R_n又是A和B的公因式,所以牠就是A和B的$H.C.F.$

〔例題5〕　求$2x^4-11x-10x^2-x^3+8$和$5-3x^2-9x+2x^3$的$H.C.F.$

第一步必須將兩式同樣照降冪或升冪排列,然後用次數較低的去除次數較高的。