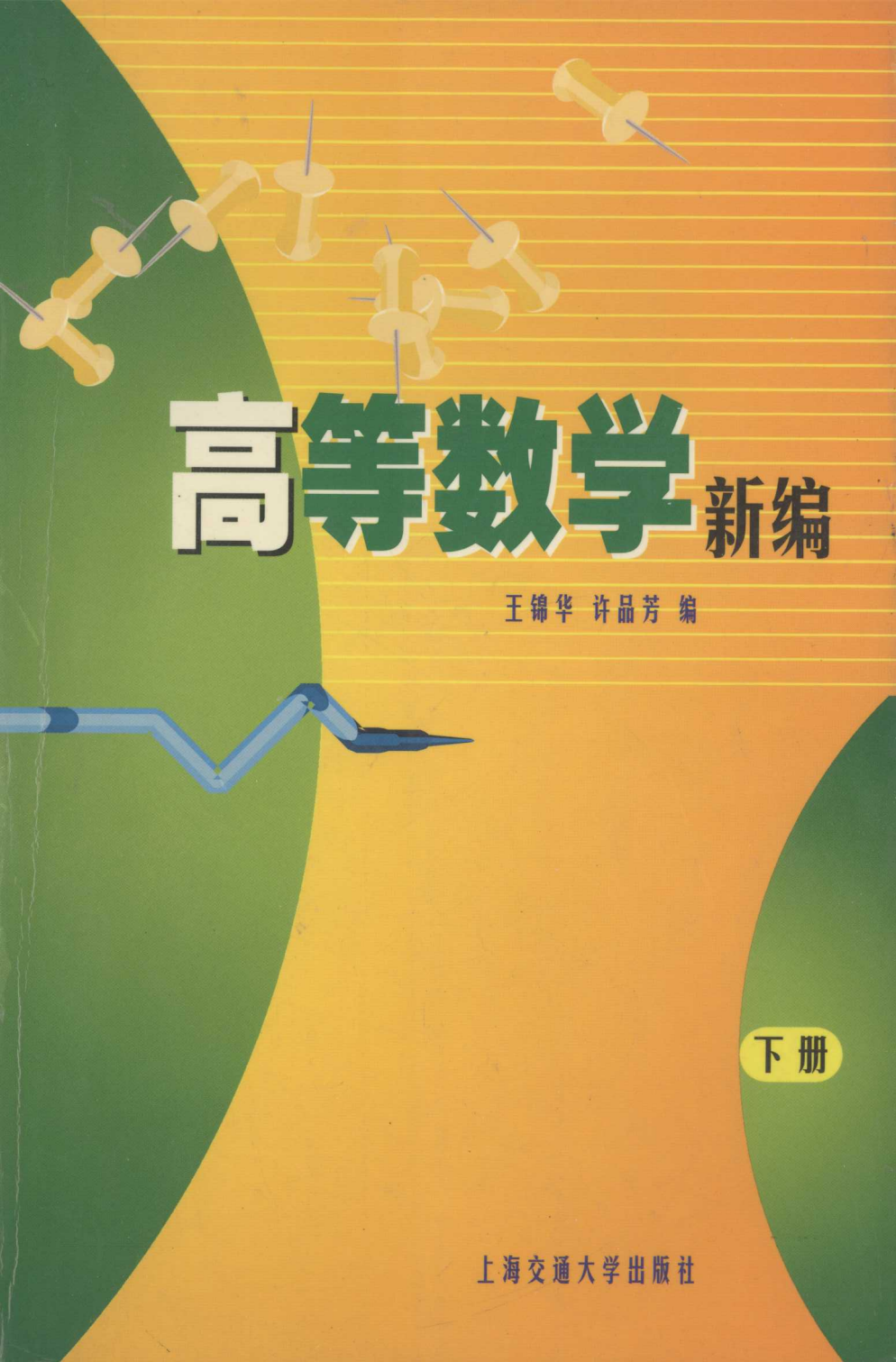


The background of the cover is a warm orange-yellow color with faint horizontal lines. On the left and right sides, there are large, dark green circular shapes. Several yellow pushpins are scattered across the top half of the cover, some pointing upwards and others downwards. A blue pen nib is positioned horizontally across the middle of the cover, pointing to the right.

高等数学新编

王锦华 许品芳 编

下册

上海交通大学出版社

(下册)

王锦华 许品芳 编

上海交通大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学新编 下册/王锦华,许品芳编. —上海:上海交通大学出版社,1999

ISBN 7-313-02291-3

I. 高… II. ①王… ②许… III. 高等数学 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 65988 号

高等数学新编

(下册)

王锦华 许品芳 编

上海交通大学出版社出版发行

上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030

电话 64281208 传真 64683798

全国新华书店经销

立信会计常熟市印刷联营厂·印刷

开本:850×1168(mm)1/32 印张:14 字数:359 千字

版次:1999 年 12 月 第 1 版

印次:1999 年 12 月 第 1 次

ISBN 7-313-02291-3/O · 153

定价(上、下册): 36.50 元

(本册定价:20.00 元)

本书任何部分文字及图片,如未获得本社书面同意,
不得用任何方式抄袭、节录或翻印。

(本书如有缺页、破损或装订错误,请寄回本社更换。)

前 言

本教材的作者是即将退休的教师.在高等数学与工程数学的教学中,教过“工农兵”、用过“樊映川”,也各自编过几套高等数学的教材.“摸爬滚打”几十年,深感我国的工科教学无论是教学内容,教学体系还是教学要求,几十年基本没变,太不正常了.与20世纪科技的飞速发展太不相衬.为此,在1990年自发组织了一个教学研究小组进行调研探讨.搜集了国内外的一些教材与教改文章.同时也开展调查:向本校毕业生们发卷调查;请工程技术专家教授开座谈会调查.大家一同来探讨:工程技术人员应该具备怎样的数学素质?当前工程数学的教学有什么问题?结论是:一、要用的未必学到,学到的未必用到;二、文献看不懂,现代数学的术语、符号成了拦路虎;三、迫切需要学习建模与数值计算的知识.由此可知,工科数学的改革必须是“大手术”,并且要多管齐下,还得分阶段实施.

我们觉得,进行工科数学教学改革,应该采取新观点、建立新体系、运用新技术.只是鉴于人力有限,我们只从工科大学生必学的高等数学、线性代数与数值计算方法入手,提出用现代数学观点统一组织这三门课的内容,构成新体系.要求确保基本知识,注重应用,强化建模,加强计算机应用.新体系要“博、新、浅”,即知识面要广博,内容要新颖,要求要浅显的精神,渗透现代数学观点和方方法,为进一步学习现代数学知识提供接口.新体系还要充分考虑到采用现代化教学手段——投影仪、电视录像、计算机辅助教学等,要加大课堂信息量,压缩授课时数.

必须指出,本教材与我们设想的目标还有一点距离,如数值计

算仅仅在数学实验课中有所体现. 这因为受到学生学习的顺序性限制, 动作太大, 对其他课程影响也大, 牵涉面太多, 难以一步到位.

本教材保留了高等数学与线性代数的经典内容: 函数、极限、连续、导数、微分、各类积分、微分方程、级数、场论三度、行列式、矩阵、线性方程组、线性变换、二次型等. 但线性代数与空间解析几何在 R^n 空间的前提下统一处理了. 一元函数、多元函数、矢值函数、向量函数(即变换)及它们的极限、连续、导数也统一起来了. 按照“以集合论为基础, 充分使用代数构造语言来处理分析问题”的现代数学方式, 本教材引入向量空间、内积、欧氏空间、度量空间的概念, 介绍了集合、关系、映射、笛卡尔乘积、向量函数, 补充定义了数量对向量的导数—— n 维空间的梯度, 向量对向量的导数——雅可比矩阵, 还引进了海赛矩阵. 再借助于多元泰勒公式及二次型正定理论, 使多元极值问题有了完整的讨论结果. 从而, 把微积分从三维推向更高维.

我们开设数学实验课作为我们改革的一部分. 由于“数学软件”的使用引入了数学, 从而使降低微积分符号运算成为可能. 因为繁琐的符号运算完全可以用计算机来完成, 于是可省出时间用于概念的理解, 建模训练和知识应用. 这样使工科数学的教学与实际联系更加紧密, 充分体现数学现代化.

本教材第 1、2、3、4、5、6 章由许品芳老师编写, 第 7、8、9、10、11 章由王锦华老师编写, 数学实验由许春根老师编写, 还有欧景昭、裘慧君老师也做了不少工作.

本教材适合于工科学科生使用, 约需 250 学时, 我们曾在各种类型工科专业试用过四届, 反映良好, 无接受困难.

本教材在出版过程中, 得到了江苏省教委的大力支持, 被列入“江苏省普通高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计

划”重点项目.还得到南京理工大学教务处与应用数学系领导的大力支持,得到各有关专业的领导与同学的积极配合,还有上海交通大学出版社的帮助.在此一并致谢.

由于编者水平有限,加上教学任务又重,编写时推敲不够,错误缺点难免,衷心欢迎批评指教.

编 者

1999 年 8 月

目 录

第 7 章 定积分与不定积分	(1)
§ 7.1 定积分概念	(1)
1° 定积分概念	(1)
2° 定积分的性质	(8)
3° 微积分基本公式	(12)
习题 7-1	(18)
§ 7.2 不定积分	(19)
1° 不定积分概念	(20)
2° 不定积分的性质	(21)
3° 不定积分基本公式	(21)
习题 7-2	(24)
§ 7.3 积分方法	(25)
1° 第一类换元法	(25)
2° 第二类换元法	(30)
3° 分部积分法	(37)
4° 可化成有理函数的不定积分	(43)
习题 7-3	(52)
§ 7.4 定积分的近似计算	(56)
习题 7-4	(61)
§ 7.5 广义积分	(61)
1° 无穷积分	(61)
2° 瑕积分	(64)
3° 广义积分的简单性质	(66)
4° 广义积分的敛散性判别法	(67)

5 ⁰ * Γ -函数	(75)
习题 7-5	(77)
§ 7.6 定积分应用	(78)
1 ⁰ 微元法	(78)
2 ⁰ 定积分的几何应用	(79)
3 ⁰ 定积分的物理应用	(92)
习题 7-6	(99)
第 8 章 微分方程	(102)
§ 8.1 微分方程的基本概念	(102)
1 ⁰ 实例	(102)
2 ⁰ 基本概念	(105)
习题 8-1	(108)
§ 8.2 一阶微分方程	(109)
1 ⁰ 可分离变量的一阶微分方程	(109)
2 ⁰ 齐次方程	(112)
3 ⁰ 一阶线性微分方程	(115)
4 ⁰ 贝努里方程	(118)
5 ⁰ 应用问题举例	(119)
习题 8-2	(126)
§ 8.3 可降阶的高阶微分方程	(128)
1 ⁰ 可降阶的二阶微分方程	(128)
2 ⁰ 应用举例	(132)
习题 8-3	(136)
§ 8.4 线性微分方程解的结构	(137)
1 ⁰ 二阶齐次线性微分方程通解的结构	(138)
2 ⁰ 二阶非齐次线性微分方程解的结构	(141)
习题 8-4	(146)
§ 8.5 常系数线性微分方程的解法	(146)

1° 二阶常系数线性齐次方程的解法	(147)
2° 二阶常系数非齐次线性方程的解法	(151)
3° 欧拉方程	(160)
4° 应用举例	(163)
习题 8-5	(171)
§ 8.6 常系数线性微分方程组的解法	(172)
1° 消元法(克莱姆法)	(172)
2° 常系数线性微分方程组的矩阵解法	(178)
3° 应用举例	(200)
习题 8-6	(209)
第 9 章 重积分与第一类线面积分 (212)	
§ 9.1 二重积分	(212)
1° 二重积分概念及性质	(212)
2° 二重积分的计算法	(216)
3° 二重积分的换元积分法	(226)
4° 曲面面积	(233)
习题 9-1	(236)
§ 9.2 三重积分	(239)
1° 三重积分的概念	(239)
2° 三重积分在直角坐标系下的计算法	(240)
3° 三重积分的换元积分法	(243)
习题 9-2	(250)
§ 9.3 第一类曲线积分与第一类曲面积分	(253)
1° 第一类曲线积分	(253)
2° 第一类曲面积分	(258)
3° 积分的统一定义	(263)
习题 9-3	(266)
§ 9.4 积分应用	(267)

1° 质心	(267)
2° 转动惯量	(274)
3° 引力	(278)
习题 9-4	(281)

第 10 章 向量函数的积分 (284)

§ 10.1 向量函数的不定积分与定积分..... (284)

1° 向量函数的不定积分	(284)
2° 向量函数的定积分	(286)
习题 10-1	(287)

§ 10.2 场向量函数的曲线积分与曲面积分..... (288)

1° 场的概念	(288)
2° 向量函数的曲线积分	(290)
3° 向量函数的曲面积分	(298)
习题 10-2	(307)

§ 10.3 积分定理..... (308)

1° 格林公式	(308)
2° 奥高公式	(328)
3° 斯托克斯公式	(335)
习题 10-3	(340)

§ 10.4 场论初步..... (343)

1° 向量场的通量与散度	(343)
2° 向量场的环量与旋度	(349)
3° 几种常用的场	(353)
习题 10-4	(357)

第 11 章 函数项级数 (359)

§ 11.1 函数项级数的一般概念..... (359)

1° 函数项级数及其收敛域	(359)
---------------------	-------

2 ⁰ *	函数项级数的一致收敛性	(361)
	习题 11-1	(370)
§ 11.2	幂级数	(371)
1 ⁰	幂级数的收敛半径与收敛域	(371)
2 ⁰	幂级数性质	(377)
3 ⁰	函数的幂级数展开式	(382)
4 ⁰	欧拉公式	(393)
	习题 11-2	(395)
§ 11.3	傅立叶级数	(396)
1 ⁰	三角函数系的正交性	(396)
2 ⁰	傅立叶级数及其收敛性	(397)
3 ⁰	任意区间上的傅立叶级数	(408)
	习题 11-3	(411)
	习题答案	(413)

第 7 章 定积分与不定积分

§ 7.1 定积分概念

1° 定积分概念

一、问题的提出

下面从几个实际例子来看定积分概念是怎样提出来的.

1. 曲边梯形的面积

在计算由平面曲线所围成的图形的面积时,总可以将图形放在平面直角坐标系下,化为计算曲边梯形的面积.例如,图 7-1 中由曲线所围成的平面图形的面积 A ,可以化为曲边梯形的面积 A_1 与 A_2 的差,即

$$A = A_1 - A_2.$$

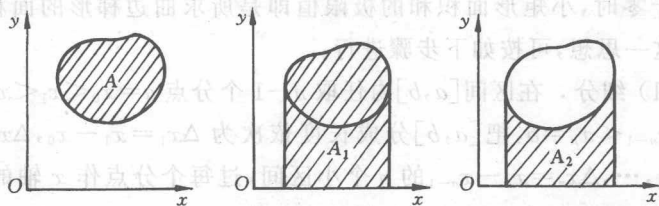


图 7-1

什么是曲边梯形? 如何计算曲边梯形的面积?

设函数 $y=f(x) \in C[a, b]$ ($f(x) \geq 0$), 将 R^2 中的集合 $E = \{(x, y) | 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$ 所表示的图形称为曲边梯形, 如图

7-2 所示. 求曲边梯形 E 的面积.

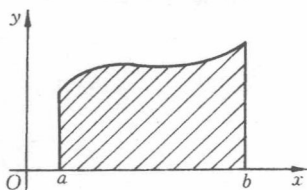


图 7-2

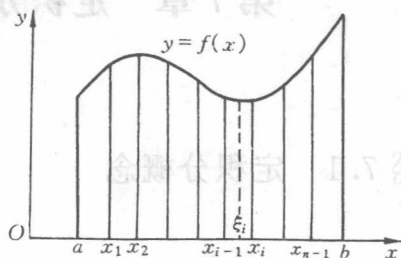


图 7-3

若 $f(x) \equiv h (> 0)$, $x \in [a, b]$, 则图形为矩形, 其面积为

$$A = (b - a)h.$$

现 $y=f(x)$ 表示一条曲线, 不能这样计算, 但是由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则当 x 变化很小时, $f(x)$ 变化也很小, 这就启发我们, 若把区间 $[a, b]$ 上的曲边梯形分成许多小曲边梯形 (见图 7-3). 由于每一个小曲边梯形的底边长度很小, 其面积可用一个小矩形近似代替, 这些小矩形面积的和, 即是曲边梯形面积的近似值. 小曲边梯形底边长度越小, 近似程度就越好, 当小曲边梯形的底边长度趋于零时, 小矩形面积和的极限值即是所求曲边梯形的面积. 根据这一思想, 可按如下步骤进行:

(1) 细分. 在区间 $[a, b]$ 内任取 $n-1$ 个分点 $a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n=b$, 把 $[a, b]$ 分成长度依次为 $\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ 的 n 个小区间, 过每个分点作 x 轴的垂线, 将曲边梯形 E 分割成 n 个小曲边梯形:

$$E_i = \{(x, y) | 0 \leq y \leq f(x), x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, (i=1, 2, \dots, n).$$

E_i 的面积记作 ΔA_i , 则

$$A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i.$$

(2) 近似. 在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取点 ξ_i , 用以 $f(\xi_i)$ 为

高,以 $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为底的小矩形面积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 近似代替小曲边梯形 E_i 的面积:

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

(3) 求和.

$$A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

(4) 取极限. 当 n 为有限值时, n 个小矩形面积的和既依赖于区间 $[a, b]$ 的分点, 也依赖于点 ξ_i 的取法. 只有当分点无限增多, 且每个小区间的长度 $\Delta x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 都趋于零时, 和式

$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ 无限接近曲边梯形 E 的面积 A . 为此, 记 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$, 则当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 曲边梯形 E 的面积 A 定义为

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

2. 变速直线运动的路程

设质点作变速直线运动, 其速度 $v=v(t)$ 是时间 t 的连续函数. 求质点从时刻 $t=a$ 到时刻 $t=b (a < b)$ 所经过的路程 S (见图 7-4).

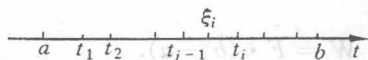


图 7-4

这一问题的解决方法类似于本节 1.

(1) 将区间 $[a, b]$ 用分点 $a=t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n=b$ 任意分成 n 个小区间 $[t_{i-1}, t_i]$, 记 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1} (i=1, 2, \dots, n)$, 质点在时间间隔 $[t_{i-1}, t_i]$ 内所经过的路程记作 $\Delta S_i (i=1, 2, \dots, n)$, 则质点所经过的路程

$$S = \sum_{i=1}^n \Delta S_i.$$

(2) 由于 $v=v(t) \in C[a, b]$, 当 Δt_i 很小时, $v(t)$ 变化很小, 所以在每个小的时间间隔 $[t_{i-1}, t_i]$ 上任取点 ξ_i , 以匀速直线运动路程 $v(\xi_i)\Delta t_i$ 近似代替 ΔS_i , 即

$$\Delta S_i \approx v(\xi_i) \Delta t_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

(3) 从时刻 $t=a$ 到 $t=b$ 所经过的路程

$$S = \sum_{i=1}^n \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^n v(\xi_i) \Delta t_i.$$

(4) 记 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta t_i\}$, 则当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 定义路程

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v(\xi_i) \Delta t_i.$$

3. 变力作功

设一质点在一平行于 x 轴的变力 $F=F(x)$ 的作用下, 沿 x 轴正向由点 a 移动到点 b ($a < b$), 如图 7-5 所示, 其中 $F(x) \in C[a, b]$. 求变力 $F(x)$ 所做的功 W .

我们知道, 如果平行于 x 轴的力 F 是常力, 则在常力的作用下, 质点沿 x 轴正向由点 a 移动到点 b 所做的功

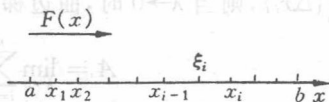


图 7-5

$$W = F \cdot (b - a).$$

但现在 $F=F(x)$ 是一平行于 x 轴的变力, 不能用上述公式, 与前两个问题一样, 可按下列步骤解决:

用分点 $a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n=b$ 将区间 $[a, b]$ 任意分成 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ ($i=1, 2, \dots, n$), 记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, 质点从点 x_{i-1} 移动到点 x_i 时, 变力所做的功记为 ΔW_i , 则质点从点 a 移动到点 b 所做的功是各小区间所做功的和, 即

$$W = \sum_{i=1}^n \Delta W_i.$$

在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i ($i=1, 2, \dots, n$), 则以 $F(\xi_i)$ 作为 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的力, 有

$$\Delta W_i \approx F(\xi_i) \Delta x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

于是

$$W = \sum_{i=1}^n \Delta W_i \approx \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta x_i.$$

记 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$, 则定义变力 $F(x)$ 从点 a 到点 b 所做的功

$$W = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta x_i.$$

上述三个问题的实际意义不同,但解决问题的思想方法却完全一样,且从数学结构上看都归结为计算某个特定和式的极限. 不仅如此,在物理、力学及众多学科的研究中,类似的问题不胜枚举. 抛开这些问题的具体意义,把这一数学结构的精华抽象出来,即得到定积分的定义.

二、定积分定义

定义 设 f 是定义在区间 $[a, b]$ 上的一个函数,用分点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 将区间 $[a, b]$ 任意分成 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$, 其长度记作 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} (i=1, 2, \cdots, n)$, 在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 $\xi_i (i=1, 2, \cdots, n)$, 作和式

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

称为 f 在 $[a, b]$ 上的积分和 (或黎曼 (Reimann) 和). 记 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$, 如果对区间 $[a, b]$ 的任意分法, 点 ξ_i 的任意取法, 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 积分和 I_n 都有极限 I , 则称此极限值 I 为函数 f 在区间 $[a, b]$

上的定积分, 记作 $\int_a^b f(x) dx$, 即

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

且称 f 在 $[a, b]$ 上可积. 其中 “ $\int$ ” 称为积分号, a, b 分别为定积分的积分下限与积分上限, $f(x)$ 称为被积函数, $f(x) dx$ 称为被积表达式, x 为积分变量. 这一积分也称为黎曼积分, 简记 (R) .

这样, 上述三个问题可分别写成
曲边梯形的面积

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

变速直线运动的路程

$$S = \int_a^b v(t) dt.$$

变力做功

$$W = \int_a^b F(x) dx.$$

用“ ϵ - δ ”语言描述上述定积分定义为:

设函数 f 在区间 $[a, b]$ 上有定义, I 为常数, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使对 $[a, b]$ 的任意分法及点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 的任意取法, 当 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} < \delta$ 时, 有

$$|I_n - I| = \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - I \right| < \epsilon$$

成立, 则称 I 为函数 f 在区间 $[a, b]$ 上的定积分, 记作

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

三、定积分的几何意义

(1) 由本节 1 可知, 若 $f(x) \geq 0, x \in [a, b]$, 则定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 表示由曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=a, x=b$ 及 x 轴所围成曲边梯形 E 的面积(见图 7-6(a)).

(2) 若 $f(x) \leq 0, x \in [a, b]$, 则 $-f(x) \geq 0$, 相应的曲边梯形的面积

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [-f(\xi_i)] \Delta x_i = - \int_a^b f(x) dx.$$

所以, 当 $f(x) \leq 0$ 时, 定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 是曲边梯形面积的相反数(见图 7-6(b)).

(3) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有正值也有负值, 则定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 表示各部分面积的代数和, 在 x 轴上方部分取正, 在 x 轴下方部