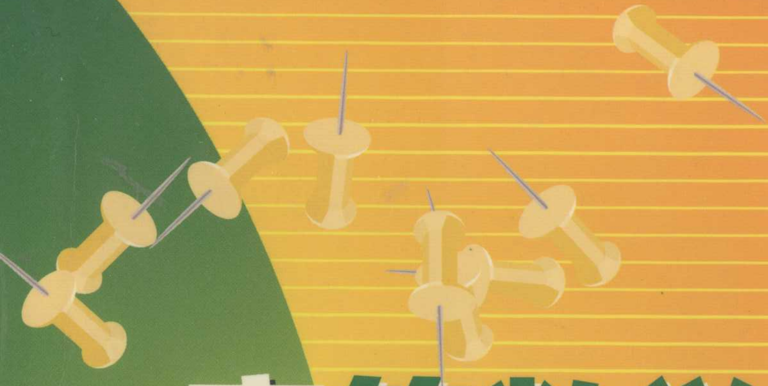
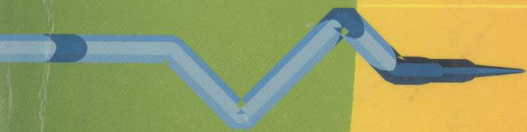


高等数学新编

王锦华 许品芳 编



下册

上海交通大学出版社

高等数学新编

（下册）

王锦华　许品芳　编

上海交通大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学新编 下册/王锦华，许品芳编. 一上海：上海交通大学出版社，1999

ISBN 7-313-02291-3

Ⅰ.高… Ⅱ.①王… ②许… Ⅲ.高等数学 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 65988 号

高等数学新编

(下册)

王锦华 许品芳 编

上海交通大学出版社出版发行

上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030

电话 64281208 传真 64683798

全国新华书店经销

立信会计常熟市印刷联营厂·印刷

开本：850×1168(mm)1/32 印张：14 字数：359 千字

版次：1999 年 12 月 第 1 版

印次：1999 年 12 月 第 1 次

ISBN 7－313－02291－3/O·153

定价(上、下册)：36.50 元

(本册定价：20.00 元)

前　言

本教材的作者是即将退休的教师.在高等数学与工程数学的教学中,教过“工农兵”、用过“樊映川”,也各自编过几套高等数学的教材.“摸爬滚打”几十年,深感我国的工科教学无论是教学内容,教学体系还是教学要求,几十年基本没变,太不正常了.与20世纪科技的飞速发展太不相衬.为此,在1990年自发组织了一个教学研究小组进行调研探讨.搜集了国内外的一些教材与教改文章.同时也开展调查:向本校毕业生们发卷调查;请工程技术专家教授开座谈会调查.大家一同来探讨:工程技术人员应该具备怎样的数学素质?当前工程数学的教学有什么问题?结论是:一、要用的未必学到,学到的未必用到;二、文献看不懂,现代数学的术语、符号成了拦路虎;三、迫切需要学习建模与数值计算的知识.由此可知,工科数学的改革必须是“大手术”,并且要多管齐下,还得分阶段实施.

我们觉得,进行工科数学教学改革,应该采取新观点、建立新系体、运用新技术.只是鉴于人力有限,我们只从工科大学生必学的高等数学、线性代数与数值计算方法入手,提出用现代数学观点统一组织这三门课的内容,构成新体系.要求确保基本知识,注重应用,强化建模,加强计算机应用.新体系要“博、新、浅”,即知识面要广博,内容要新颖,要求要浅显的精神,渗透现代数学观点和方法,为进一步学习现代数学知识提供接口.新体系还要充分考虑到采用现代化教学手段——投影仪、电视录像、计算机辅助教学等,要加大课堂信息量,压缩授课时数.

必须指出,本教材与我们设想的目标还有一点距离,如数值计

算仅仅在数学实验课中有所体现.这因为受到学生学习的顺序性限制,动作太大,对其他课程影响也大,牵涉面太多,难以一步到位.

本教材保留了高等数学与线性代数的经典内容:函数、极限、连续、导数、微分、各类积分、微分方程、级数、场论三度、行列式、矩阵、线性方程组、线性变换、二次型等.但线性代数与空间解析几何在 R^n 空间的前提下统一处理了.一元函数、多元函数、矢值函数、向量函数(即变换)及它们的极限、连续、导数也统一起来了.按照"以集合论为基础,充分使用代数构造语言来处理分析问题"的现代数学方式,本教材引入向量空间、内积、欧氏空间、度量空间的概念,介绍了集合、关系、映射、笛卡尔乘积、向量函数,补充定义了数量对向量的导数——n 维空间的梯度,向量对向量的导数——雅可比矩阵,还引进了海赛矩阵.再藉助于多元泰勒公式及二次型正定理论,使多元极值问题有了完整的讨论结果.从而,把微积分从三维推向更高维.

我们开设数学实验课作为我们改革的一部分.由于"数学软件"的使用引入了数学,从而使降低微积分符号运算成为可能.因为繁琐的符号运算完全可以用计算机来完成,于是可省出时间用于概念的理解,建模训练和知识应用.这样使工科数学的教学与实际联系更加紧密,充分体现数学现代化.

本教材第 1、2、3、4、5、6 章由许品芳老师编写,第 7、8、9、10、11 章由王锦华老师编写,数学实验由许春根老师编写,还有欧景昭、裘慧君老师也做了不少工作.

本教材适合于工科本科生使用,约需 250 学时,我们曾在各种类型工科专业试用过四届,反映良好,无接受困难.

本教材在出版过程中,得到了江苏省教委的大力支持,被列入"江苏省普通高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计

划”重点项目.还得到南京理工大学教务处与应用数学系领导的大力支持,得到各有关专业的领导与同学的积极配合,还有上海交通大学出版社的帮助.在此一并致谢.

由于编者水平有限,加上教学任务又重,编写时推敲不够,错误缺点难免,衷心欢迎批评指教.

编　者

1999 年 8 月

目　　录

第 7 章　定积分与不定积分

§7.1　定积分概念

1^0　定积分概念

一、问题的提出

下面从几个实际例子来看定积分概念是怎样提出来的.

1. 曲边梯形的面积

在计算由平面曲线所围成的图形的面积时，总可以将图形放在平面直角坐标系下，化为计算曲边梯形的面积. 例如，图 7-1 中由曲线所围成的平面图形的面积 A，可以化为曲边梯形的面积 A_1 与 A_2 的差，即

$$A = A_1 - A_2.$$

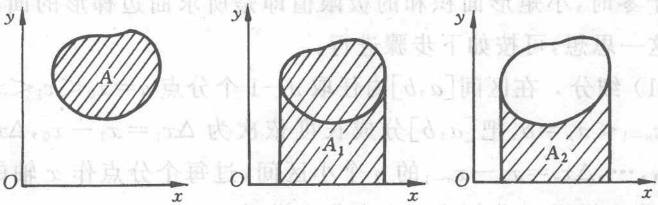


图 7-1

什么是曲边梯形？如何计算曲边梯形的面积？

设函数 $y=f(x)\in C[a,b]$($f(x)\geqslant 0$)，将 R^2 中的集合 $E=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant f(x), a\leqslant x\leqslant b\}$ 所表示的图形称为曲边梯形，如图

7-2 所示. 求曲边梯形 E 的面积.

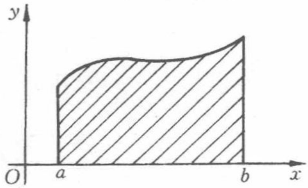


图 7-2

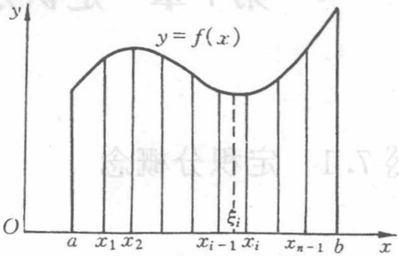


图 7-3

若 $f(x)\equiv h(>0)$, $x\in[a,b]$, 则图形为矩形, 其面积为

$$A=(b-a)h.$$

现 $y=f(x)$ 表示一条曲线, 不能这样计算, 但是由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则当 x 变化很小时, $f(x)$ 变化也很小, 这就启发我们, 若把区间 $[a,b]$ 上的曲边梯形分成许多小曲边梯形(见图 7-3). 由于每一个小曲边梯形的底边长度很小, 其面积可用一个小矩形近似代替, 这些小矩形面积的和, 即是曲边梯形面积的近似值. 小曲边梯形底边长度越小, 近似程度就越好, 当小曲边梯形的底边长度趋于零时, 小矩形面积和的极限值即是所求曲边梯形的面积. 根据这一思想, 可按如下步骤进行:

(1) 细分. 在区间 $[a,b]$ 内任取 $n-1$ 个分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, 把 $[a,b]$ 分成长度依次为 $\Delta x_1=x_1-x_0$, $\Delta x_2=x_2-x_1$, $\cdots$, $\Delta x_n=x_n-x_{n-1}$ 的 n 个小区间, 过每个分点作 x 轴的垂线, 将曲边梯形 E 分割成 n 个小曲边梯形:

$$E_i=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant f(x), x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i\}, (i=1,2,\cdots,n).$$

E_i 的面积记作 ΔA_i, 则

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i.$$

(2) 近似. 在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取点 ξ_i, 用以 $f(\xi_i)$ 为

高，以 $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i (i=1,2,\cdots,n)$ 为底的小矩形面积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 近似代替小曲边梯形 E_i 的面积：

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

(3) 求和．

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

(4) 取极限．当 n 为有限值时，n 个小矩形面积的和既依赖于区间 $[a,b]$ 的分点，也依赖于点 ξ_i 的取法．只有当分点无限增多，且每个小区间的长度 $\Delta x_i (i=1,2,\cdots,n)$ 都趋于零时，和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 无限接近曲边梯形 E 的面积 A. 为此，记 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$，则当 $\lambda \to 0$ 时，曲边梯形 E 的面积 A 定义为

$$A = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

2. 变速直线运动的路程

设质点作变速直线运动，其速度 $v=v(t)$ 是时间 t 的连续函数. 求质点从时刻 $t=a$ 到时刻 $t=b(a<b)$ 所经过的路程 S(见图 7-4).

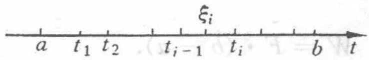


图 7-4

这一问题的解决方法类似于本节 1.

(1) 将区间 $[a,b]$ 用分点 $a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$ 任意分成 n 个小区间 $[t_{i-1},t_i]$，记 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1} (i=1,2,\cdots,n)$，质点在时间间隔 $[t_{i-1},t_i]$ 内所经过的路程记作 $\Delta S_i (i=1,2,\cdots,n)$，则质点所经过的路程

$$S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i.$$

(2) 由于 $v=v(t)\in C[a,b]$，当 Δt_i 很小时，$v(t)$ 变化很小，所以在每个小的时间间隔 $[t_{i-1},t_i]$ 上任取点 ξ_i，以匀速直线运动路程 $v(\xi_i)\Delta t_i$ 近似代替 ΔS_i，即

$$\Delta S_i \approx v(\xi_i)\Delta t_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

(3) 从时刻 $t=a$ 到 $t=b$ 所经过的路程

$$S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i.$$

(4) 记 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta t_i\}$，则当 $\lambda\to 0$ 时，定义路程

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i.$$

3. 变力作功

设一质点在一平行于 x 轴的变力 $F=F(x)$ 的作用下，沿 x 轴正向由点 a 移动到点 $b(a<b)$，如图 7-5 所示，其中 $F(x)\in C[a,b]$. 求变力 $F(x)$ 所做的功 W.

我们知道，如果平行于 x 轴的力 F 是常力，则在常力的作用下，质点沿 x 轴正向由点 a 移动到点 b 所做的功

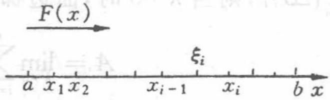


图 7-5

$$W=F\cdot(b-a).$$

但现在 $F=F(x)$ 是一平行于 x 轴的变力，不能用上述公式，与前两个问题一样，可按下列步骤解决：

用分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 将区间 $[a,b]$ 任意分成 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$，记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，质点从点 x_{i-1} 移动到点 x_i 时，变力所做的功记为 ΔW_i，则质点从点 a 移动到点 b 所做的功是各小区间所做功的和，即

$$W=\sum_{i=1}^{n}\Delta W_i.$$

在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 $\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$，则以 $F(\xi_i)$ 作为 $[x_{i-1},x_i]$ 上的力，有

$$\Delta W_i \approx F(\xi_i)\Delta x_i \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

于是

$$W=\sum_{i=1}^{n}\Delta W_i \approx \sum_{i=1}^{n}F(\xi_i)\Delta x_i.$$

记 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$，则定义变力 $F(x)$ 从点 a 到点 b 所做的功

$$W=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}F(\xi_i)\Delta x_i.$$

上述三个问题的实际意义不同，但解决问题的思想方法却完全一样，且从数学结构上看都归结为计算某个特定和式的极限．不仅如此，在物理、力学及众多学科的研究中，类似的问题不胜枚举．抛开这些问题的具体意义，把这一数学结构的精华抽象出来，即得到定积分的定义．

二、定积分定义

定义 设 f 是定义在区间 $[a,b]$ 上的一个函数，用分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，将区间 $[a,b]$ 任意分成 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$，其长度记作 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$，在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 $\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$，作和式

$$I_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

称为 f 在 $[a,b]$ 上的积分和(或黎曼(Reimann)和)．记 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$，如果对区间 $[a,b]$ 的任意分法，点 ξ_i 的任意取法，当 $\lambda\to 0$ 时，积分和 I_n 都有极限 I，则称此极限值 I 为函数 f 在区间 $[a,b]$ 上的定积分，记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

且称 f 在 $[a,b]$ 上可积．其中“$\int$”称为积分号，a,b 分别为定积分的积分下限与积分上限，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，x 为积分变量．这一积分也称为黎曼积分，简记 (R).

这样，上述三个问题可分别写成

曲边梯形的面积

$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

变速直线运动的路程

$$S=\int_a^b v(t)\mathrm{d}t.$$

变力做功

$$W=\int_a^b F(x)\mathrm{d}x.$$

用“$\varepsilon-\delta$”语言描述上述定积分定义为：

设函数 f 在区间$[a,b]$上有定义，I 为常数，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使对$[a,b]$的任意分法及点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$的任意取法，当 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}<\delta$ 时，有

$$|I_n-I|=\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon$$

成立，则称 I 为函数 f 在区间$[a,b]$上的定积分，记作

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

三、定积分的几何意义

(1) 由本节 1 可知，若 $f(x)\geqslant 0$，$x\in[a,b]$，则定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围成曲边梯形 E 的面积(见图 7-6(a))。

(2) 若 $f(x)\leqslant 0$，$x\in[a,b]$，则 $-f(x)\geqslant 0$，相应的曲边梯形的面积

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[-f(\xi_i)]\Delta x_i=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

所以，当 $f(x)\leqslant 0$ 时，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是曲边梯形面积的相反数(见图 7-6(b))。

(3) 若 $f(x)$在$[a,b]$上有正值也有负值，则定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示各部分面积的代数和，在 x 轴上方部分取正，在 x 轴下方部