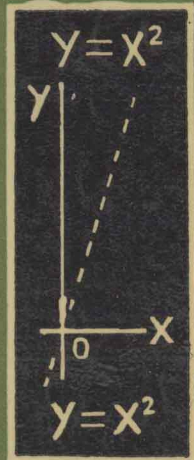
朱长山 译

HSMTX
XTXJF

HSMT



XTX JF

HSMTX
TXJF

函数命题新题型解法技巧

河南教育出版社

函数命题新题型解法技巧

朱长山 译

河南教育出版社

函数命题新题型解法技巧

朱长山　译

责任编辑　张国旺

河南教育出版社出版
河南周口地区印刷厂印刷
河南省新华书店发行

787×1092毫米　32开本　5.25印张　108千字
1989年1月第1版　1990年8月第1次印刷
印数 1— 1,770册

ISBN 7-5347-0479-0/G·414

定价　1.50元

内容简介

本书译自1988年元月由日本进口的数学读物《日本全国高中入学试题解法3000题》。书中集中选译了函数问题的不同命题方法和不同的解题方法10个组、40个类型、103个例。通过实例叙述，揭示了由变量与函数、点的坐标为主线结合代数知识、几何图形所组成的各种问题和不同的入手处理方法。有趣的是其中的这103个例竟是日本各所名高中的这两年的入学试题。本书原文中，对这10个组、40个类型、103个例，分别对每一个组以知识结构划分了类型；对每一个类型的典型题，都提示了解题关键、解法技巧和知识要点；对每一个例题，均附有解答。本书的文字叙述中尽力保持了原文的精炼、准确、科学性强的特点。值得注目的是，由变量与函数及其点的坐标所组成的不同的命题和不同的解题方法的独特风格是很有参考意义的。因此，本书是广大数学教师难得的例题教学的参考资料；同时，也是正在学习相关知识的广大初、高中学生较好的一本课外读物。

目　录

（一）

▲ 二次函数·图象·方程·图形

（二）

▲ 一次函数·图象·方程·图形

（三）

▲ 函数图象·直线形

（四）

▲ 函数图象·旋转体·圆

（五）

▲ 动点·对称点·几何图形

（六）

▲ 直线·平行·垂直

（七）

▲ 函数的图象·方程组的解

（八）

▲ 抛物线·直线·点的坐标·几何图形

（九）

▲ 正比例·反比例·定义域·值域

（十）

▲ 函数·方程·图形·比例线段

（一） 二次函数·图象·方程·图形

§1 二次函数与变化率

例 1 右图1-1是函数$y=\frac{1}{4}x^2$的图象，抛物线上A、B两点的x坐标分别是-6、-2。

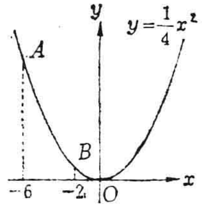


图 1-1

下列(1)至(4)的各题中，对于小括号（ ）填入适当的数；对于方括号[ ]填入适当的式；对于方框$\boxed{\quad}$填入适当的词．

(1) 关于函数$y=\frac{1}{4}x^2$，当$x<0$，x的值增加时，y的值$\boxed{\quad}$；当$x>0$，x的值增加时，y的值$\boxed{\quad}$．

(2) 关于函数$y=\frac{1}{4}x^2$，当x的值，由2增加到6时，其函数的变化率为（ ）．

(3) 关于函数$y=\frac{1}{4}x^2$，当x的值，由-6增加到-2时，其函数的变化率表示过两点A、B的直线$y=$[ ]的$\boxed{\quad}$．

（4）函数 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的定义域为 $-2\leqslant x\leqslant 4$ 时．其值域为（　　）$\leqslant y\leqslant$（　　）．

解题关键

利用由 x 值求 y 的对应值，求出两点的 x、y 的变化量．

解法技巧

在于求出变化率，它是

$$\frac{y\text{ 的增量}}{x\text{ 的增量}}$$

它在已确定的一次函数中，表示它的斜率．

解答

（1）当 $x<0$ 时，从函数图象中看到，随着 x 值接近于 0，其 y 的值趋近于 0，此时 y 的值递减；当 $x>0$ 时，在函数图象中也可以看到，随着 x 值的增加，y 的值也增加，此时 y 的值递增．

（2）

$$\text{变化率}=\frac{\frac{1}{4}\times 6^2-\frac{1}{4}\times 2^2}{6-2}=\frac{8}{4}=2.$$

（3）由已知 A、B 的坐标分别是 $A(-6,9)$，$B(-2,1)$，得

$$\text{变化率}=\frac{\frac{1}{4}\times(-2)^2-\frac{1}{4}\times(-6)^2}{(-2)-(-6)}=\frac{1-9}{4}=-2.$$

直线 AB 的方程是

$y=-2x-3$。

变化率-2表示过A、B两点的直线的斜率。

（4）$0\leqslant y\leqslant 4$。

本题要点

要掌握函数$y=ax^2$的图象是以y轴为轴的轴对称图象，这一对称性使题(2)、(3)中其变化率：2与-2的绝对值相同符号相反。

例 2 右图1-2是函数$y=ax^2$ $(0\leqslant x\leqslant 4)$的图象。点$A(4,\ 8)$是图象上的一点，点$P$在$1\leqslant x\leqslant 4$的范围内是一个动点，并有点$B$的坐标是$(0,\ 3)$。此时解答以下(1)～(3)题。

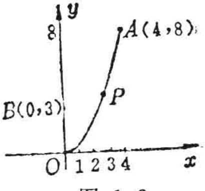


图 1-2

（1）试求a的值。

（2）该函数在x的值由2增加至4时，试求函数的变化率。

（3）过两点B、P的直线的斜率设为m时，试用等号和不等号来表示其m的取值范围。

解题关键

（2）着眼于运用算式

$$函数变化率=\frac{y\text{的增量}}{x\text{的增量}}$$

解法技巧

（3）m的最小值是取连结点$B(0,\ 3)$、$P\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$的直线的斜率；$m$的最大值是取直线$AB$的斜率。

解答

(1) ∵ 函数 $y=ax^2$ 的抛物线通过点 $A(4,\ 8)$,

∴ $a=\frac{1}{2}$.

(2) 函数变化率 $=\frac{8-2}{4-2}=3$.

(3) 由点 $B(0,\ 3)$ 过点 $A(4,\ 8)$ 的直线斜率为

$$\frac{8-3}{4-0}=\frac{5}{4};$$

由点 $B(0,\ 3)$ 过点 $P\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$ 时的直线斜率为

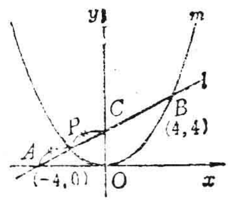
$$\frac{\frac{1}{2}-3}{1-0}=-\frac{5}{2}.$$

所以斜率 m 的取值范围是

$$-\frac{5}{2}\leqslant m\leqslant\frac{5}{4}.$$

§2 抛物线与两个三角形面积的比

例 3 如右图1-3，曲线 m 是以原点 O 为顶点的抛物线，直线 l 过 $A(-4,\ 0)$、$B(4,\ 4)$ 两点。又点 C 是直线 l 与 y 轴的交点，点 P 是线段 AC 的中点。



(1)

解答下列各题。

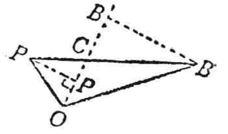
（1）求直线AB的方程。

（2）试求点P的坐标，

（3）求出曲线m的方程。

（4）求出$\triangle POC$与$\triangle BOC$的面积的比。

（东京工业高中）



(2)

图 1-3

解题关键

（4）着眼于两个三角形有公共的底边，抓住其面积的比等于高的比这一点

解法技巧

（4）如右图1-3(2)，具有

$$\frac{\triangle POC\text{的面积}}{\triangle BOC\text{的面积}}=\frac{PP'}{BB'}.$$

解答

（1）由已知的A、B坐标，得$y=\frac{1}{2}x+2$。

（2）由题设 $AP=PC$ 及 $A(-4,\ 0)$、$C(0,\ 2)$，有$P(-2,\ 1)$；$C(0,2)$是根据 $y=\frac{1}{2}x+2$，$x=0$时$y=2$获得。

（3）因为$y=ax^2$过点$B(4,\ 4)$，所以有 $4=4\times4\times a$，得$a=\frac{1}{4}$，$\therefore\ y=\frac{1}{4}x^2$。

（4）$\frac{\triangle POC\text{的面积}}{\triangle BOC\text{的面积}}=\frac{PP'}{BB'}=\frac{1}{2}$.

本题要点

利用同底边三角形面积的比等于其高的比，其中将两个三角形的高应设在与坐标轴平行或垂直的位置上。

例 4 如图1-4，在抛物线 $y=x^2$ 上有 4 点 A、B、C、D，线段AB、BC、CD分别交 y 轴于L、M、N，且满足

$$\frac{AL}{LB}=\frac{1}{2},\ \frac{BM}{MC}=\frac{2}{3},\ \frac{CN}{ND}=\frac{3}{4}.$$

此时.

解答下列各题中的方框□.

（1）当点A的坐标为（-1，1)时，

i） 直线AB的方程，是

$$y=\boxed{①}x+\boxed{②}.$$

ii）直线CD的方程，是

$$y=\boxed{③}x+\boxed{④}\boxed{⑤}.$$

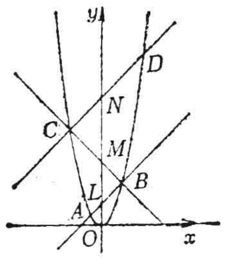


图 1-4

（2）当点A在第 2 象限，而点N的坐标为(0，27)时，

直线 AB 的斜率是$\dfrac{\boxed{⑥}}{\boxed{⑦}}$.

直线CD 的斜率是$\dfrac{\boxed{⑧}}{\boxed{⑨}}$.

（3）$\triangle ABC$与$\triangle BCD$的面积的比是$\boxed{⑩}:\boxed{⑪}$.

（桐荫学园高中）

解答

（1）由$\dfrac{AL}{LB}=\dfrac{1}{2}$，且点$A$的 x 坐标为-1，所以点B的

x坐标为2．以$x=2$代入$y=x^2$，得$y=4$，$\therefore$ $B(2,4)$．同理，得$C(-3,9)$，$D(4,16)$．所以

AB的方程是：$y=x+2$．

CD的方程是：$y=x+12$．

答：其中① 1，② 2，③ 1，④ 1，⑤ 2．

（2）设 $A(-a,a^2)$、$B(2a,4a^2)$、$C(-3a,9a^2)$、$D(4a,16a^2)$．则

$$AB\text{ 的斜率是}\frac{4a^2-a^2}{3a}=a.$$

$$CD\text{ 的斜率是}\frac{16a^2-9a^2}{7a}=a.$$

由$C(-3a,9a^2)$和斜率a，有$N(0,12a^2)$，由此得$12a^2=27$，

$a=\frac{3}{2}$．即两直线的斜率是$\frac{3}{2}$．

答：其中的⑥ 3，⑦ 2，⑧ 3，⑨ 2．

（3）由（2）知$AB\parallel CD$，设$\triangle ABC$和$\triangle BCD$的底边为AB、CD，则其高相等．因此，有

$$\frac{\triangle ABC\text{的面积}}{\triangle BCD\text{的面积}}=\frac{AB}{CD}=\frac{|A\text{、}B\text{的 }x\text{ 坐标的差}|}{|C\text{、}D\text{的 }x\text{ 坐标的差}|}$$

$$=\frac{3a}{7a}=\frac{3}{7}.$$

答：⑩ 3，⑪ 7．

例 5 如图1-5，有

抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$, ①

直 线 $y=2x$. ②

在抛物线①与直线②的交点中，通过非原点的交点A引直线l平行于x轴交y轴于点C。以BC为一边求作如图1-5的正方形$BCDE$，点E在直线②上，则

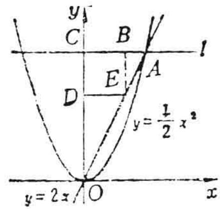


图 1-5

（1）试求点E的坐标.

（2）设$\triangle ABE$的面积为S_1，设$\triangle EDO$的面积为S_2，则用简单的整数比来表示$S_1:S_2$.

（东京电机大学高中）

解法技巧

（1）设点E的坐标为$(a,\ 2a)$，由$BC=CD=a$，得点D的y坐标为$8-a$.

解答

（1）由已知 $y=\frac{1}{2}x^2$、$y=2x$，有$C(0,8)$、$D(0,8-a)$；

根据题意及所设 $E(a,\ 2a)$，得 $8-a=2a$，$\therefore\ a=\frac{8}{3}$. 即

$E\left(\frac{8}{3},\ \frac{16}{3}\right)$.

（2）$\because\ \triangle ABE\backsim\triangle EDO$，$\therefore\ S_1{}^2:S_2=BA^2:DE^2$.

$\because\ BA=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$，$DE=\frac{8}{3}$，

$$\therefore\ S_1:S_2=\left(\frac{4}{3}\right)^2:\left(\frac{8}{3}\right)^2=1:4.$$

§3 抛物线与两个相似三角形

例 6 如右图1-6，抛物线$y=ax^2(a>0)$与直线$y=b(b>0)$交于两点A、B，点A的x坐标为$-\sqrt{2}$．在x轴上于原点右侧取点D，连结DA的线段交抛物线于点E．且过两点BE的直线交x轴于点C．设$\triangle AEB$与$\triangle CDE$的面积的比为9:1．此时解答下列各题中的方框$\boxed{\quad}$．

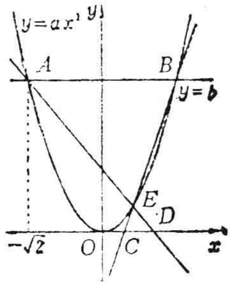


图 1-6

（1）a与b之间，下列关系成立。

$$a=\frac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}}b.$$

（2）点E的x坐标是$\frac{\sqrt{\boxed{\quad}}}{\boxed{\quad}}$.

（3）点C的x坐标是

$$\frac{\sqrt{\boxed{\quad}}}{\boxed{\quad}}.$$

（4）当$a=2$时，过两点B、C的直线的方程为

$$y=\boxed{\quad}\sqrt{\boxed{\quad}}\,x-\boxed{\quad}.$$

（成城高中）

解题关键

（2）由$\triangle AEB \backsim \triangle DEC$，有相似比为3:1。

解法技巧

（1）由函数$y=ax^2$在点A、B的对称性，因为点A的x坐标是$-\sqrt{2}$，所以，点B的x坐标为$\sqrt{2}$。由此，点B的y坐标是$y=a\cdot(\sqrt{2})^2$。

（2）由点B的y坐标是$2a$，且有$\triangle AEB \backsim \triangle DEC$，相似比为3:1。又有对应高的比等于相似比，所以

$$\frac{\text{点}B\text{的}y\text{坐标}-\text{点}E\text{的}y\text{坐标}}{\text{点}E\text{的}y\text{坐标}}=\frac{3}{1}$$

即

设点E的y坐标以y来表示，则

$$\frac{2a-y}{y}=\frac{3}{1}, \quad y=\frac{1}{2}a.$$

解答

（1）由$2a=b$，得$a=\frac{1}{2}b$。

（2）关于$y=ax^2$在点E的y坐标为$\frac{1}{2}a$，所以，有

$\frac{1}{2}a=ax^2$，解得　$x=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

（3）由图1-6中，可以看出