

SCIENCE MASTERS

科学大师佳作系列

自然之数

—— 数学想象的虚幻实境

[英] 伊恩·斯图尔特 著

潘涛 译 刘华杰 校 谈祥柏 审

第2版



NLIC2970870074

 上海科学技术出版社

国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

 科学大师佳作系列

自然之数

——数学想象的虚幻实境

(第2版)

[英] 伊恩·斯图尔特 著

潘涛译 刘华杰校 谈祥柏审



NLIC2970870074

上海科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

自然之数:数学想象的虚幻实境/(英)斯图尔特
(Stewart, I.)著;潘涛译.—2版.—上海:上海科学技术
出版社,2012.12

(科学大师佳作系列)

ISBN 978-7-5478-1597-7

I. ①自… II. ①斯… ②潘… III. ①数学—普及
读物 IV. ①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 299830 号

Nature's Numbers: The Unreal Reality of Mathematics

Copyright © 1995 by Ian Stewart

Chinese (Simplified Characters) Trade Paperback Copyright © 2007

by Shanghai Scientific & Technical Publishers.

Published by arrangement with Brockman, Inc.

ALL RIGHTS RESERVED.

上海世纪出版股份有限公司 出版、发行
上海科学技术出版社

(上海钦州南路71号 邮政编码200235)

新华书店上海发行所经销

苏州望电印刷有限公司印刷

开本 700×1000 1/16 印张 8.5

字数:170千字

2012年12月第2版 2012年12月第3次印刷

ISBN 978-7-5478-1597-7/O·15

定价:15.00元

本书如有缺页、错装或损坏等严重质量问题,
请向工厂联系调换

中文版序

从记事起,我就着迷于数学与自然界间的关系。我小时候家在海边,那里有一条蜿蜒的海岸线,其间夹杂着白垩层和沙石层的一层黏土与岸相遇。你要是在礁石周围寻觅,就会找到化石菊石和海百合的枝段——“海百合”(sea lilies)。菊石形成美丽的螺旋形,海百合呈现五角星。在那些早年岁月,我从这些化石中的规则模式中找到了极大乐趣。它们是百万年前古代生命的遗迹,但我对此却印象不深,真正触动我的是它们的形状。

刚成为职业数学家时,我专攻抽象代数方向。但是 10 年后,我不满足于此了,我再次对自然界的数学模式产生了兴趣。我开始致力于动力学系统理论(dynamical systems theory)——系统按照特定的一组规则随时间而改变的数学。海浪、沙丘、行星的运行,凡此种种,都可以建模为动力学系统,那些系统的数学特征解释了我们在真实世界里观察到的许多模式。

动力学系统中的模式形成最重要的影响之一,在于该系统的对称性(symmetries)。对称性是一个大约 180 年前在数学上得到表述的概念。奇特的是,这一概念先在代数领域备受重视,但不久就推广到数学的其他领域。其关键之处在于,某种数学结构的对称性并不是事物,而是一种变换。它是一种特殊类型的变换:不干扰该结构的重要特征。例如,如果把正方形旋转 90 度角,它还是正

方形。于是，“旋转 90 度角”就是正方形的一种对称性。假如正方形不被扭曲，保持刚硬，那就还有 7 种对称性——另外 3 种旋转对称性和 4 种反射对称性。

这 8 种对称性的集合——“对称群”——出现于几乎所有关于正方形的数学问题中。例如，假如你用水装满一个正方形的碟子，让碟子振动，水就会形成波的模式。这些模式由该正方形的对称群所决定。

对称性是基本数学原理与大自然之间众多特殊联系之一。还存在许多其他的联系：数值模式、牛顿力学、混沌理论和分形几何。大约 12 年前，我决定为非专业读者就这些论题写一本小册子。我想告诉人们，数学不仅仅关于计算、海量的数学或者恼人的公式，数学还跟我们生活于其中的世界密切相关，它讲述宇宙的深刻和显著特征。那本书就是《自然之数》。

自我写《自然之数》以来，数学和科学继续在发展，但其要义并没有改变。事实上，本书讨论的诸多数学领域变得对我们认识世界更为相关了。数学结构与自然模式之间关联的新例子层出不穷。我自己的研究围绕着前庭系统，那是由 6 个半规管（左右耳各 3 个）组成的系统，给我们平衡感。研究表明，前庭系统具有对称性。事实上，前庭系统的此种对称群在数学上是一个熟悉的群：它跟管的对称群一模一样。抽象地说，半规管与颈肌间的中枢联系就像管表面的网络布线，具有管的所有对称性——恰好 48 种。这些对称性影响前庭系统的行为，因此值得搞清楚它们是如何工作的。

我很高兴，《自然之数》现在将为中文读者再版。这使得它能够在这个世界上伟大的科学和数学国家广为传播。中国的数学家和科学家正在认识大自然和我们宇宙的全球性行动方面发挥着重

要作用。数学,乃是最为重要的人类发现之一,对我们的世界和我们的生活影响甚巨。

伊恩·斯图尔特

于考文垂

目 录

序言 虚拟幻境机	1
第一章 自然之秩序	5
第二章 数学有何用	15
第三章 数学是什么	29
第四章 变动之常数	43
第五章 从小提琴到录像机	55
第六章 破缺的对称	65
第七章 生命的节律	81
第八章 骰子掷上帝吗	93
第九章 液滴、动力学与雏菊	109
尾声 形态数学	123

序 言

虚拟幻境机

我做了一个梦。

我被空无包围。不是虚无的空间,因为没有什么空间是虚无的。不是黑暗,因为没有任何东西是黑色的。只是缺无,有待成为存在的缺无。我用思维下指令:要有空间*。但要有何种空间呢?我有一个选择:三维空间,多维空间,甚至弯曲空间。

我选择了。

我又用思维下了一条指令,这个空间充满了到处渗透的流体,流体以波浪和涡旋形式旋转。这里是平静的波浪,那里是泛泡的湍乱的大漩涡。

我给空间着上蓝色,在流体中画许多白色的流线,使流动模式显现。

我在流体中放一个小红球。它无依无靠地盘旋,对围绕它的混沌一无所知,直到我发话为止。后来,它沿一条流线流走了。我把自己压缩到原先的百分之一大小,置身于这球的表面,鸟瞰那些逐渐显露的事件。每隔数秒,我在流体中放一个绿色图标,以记录球的流程。要是我轻按一个图标,它就像下雨时沙漠仙人掌的延时摄影那样开花,并且在每一片花瓣上都有图形、数字和符号。我也可以使小红球开花,开花的时候,那些图形、数字和符号随着球的运动而变化。

* 仿《圣经·创世记》中的话:要有光——译者

由于对符号的行进不满意,我把球轻推到一条不同的流线上,细微地调节它的位置,直到看见我正寻求的清楚的奇点轨迹为止。我捻响手指,球推断出它自身的将来,并报告它所发现的事情。前景大有希望……突然,有一整片均为流体所荷载的红球,它们像一大群很快散布开来的鱼那样打旋、伸出卷须、展平成片。然后,有更多的球群加入到这一游戏中来——金色球、紫色球、棕色球、银色球、粉红色球……我的色彩已近枯竭。各种色彩的球片以复杂的几何形式截交。我将它们冻结,打磨光滑,画上条纹。我用手势将球挥去。我把图标召来,审视它们展现的花瓣。我把有些花瓣取下,系在一个半透明的网上,这个网已经像从薄雾中显露的地形那样显现了。

好!

我发布一条新指令。“存盘。标题:三体问题中一个新的混沌现象。日期:今天。”

空间崩溃,空空如也。然后,上午的研究结束了,我从我的虚拟幻境机(Virtual Unreality Machine)中脱身出来,去寻觅我的午餐。

这个奇特的梦几近事实。我们已经拥有了模拟“正常”空间中发生的事件的虚拟实境系统*。我把我的梦叫做虚拟幻境,因为它可以模拟任何由数学家丰富的想象力创造出来的东西。虚拟幻境机的大部分部件已经存在。计算机图形软件可以让你“飞越”任何选定的几何对象;动力学系统软件可以刻画任何选定方程的演化状态;符号代数软件可以解除令人生畏的演算所带来的痛苦,并

* 指利用高性能的计算机软硬件和传感器,给操作者创造一种具有身临其境的沉浸感、完善的交互作用、激发想象的信息环境的计算机系统。虚拟实境(Virtual Reality)又译虚拟现实、临境等——译者

且得出正确的答案。对于数学家来说,能够进入他们自己的创造物的内部,看来只是时间问题。

尽管虚拟幻境机这种技术可能美妙无比,但是,我们并不需要它使我从梦境中醒来。如今,这个梦已是一种现实,它出现在每一位数学家的头脑里。这正是当你在进行数学创造时所能体会到的。数学家世界中的对象,通常用符号标签或名称,而不是用色彩来区分。但那些符号标签对生活在数学世界里的人来说,如色彩一样鲜明。事实上,尽管我的想象丰富多彩,但我的梦只是生活在其间的每一位数学家想象力世界的苍白的投影。在这个世界里,弯曲空间或三维以上空间不但司空见惯,而且无可置疑。你可能发现,我描述的梦境既陌生又奇怪,与数学的代数符号截然不同。这是因为数学家迫不得已才用符号和图形来描述他们的世界。但符号并不是那个世界,恰如音符不是音乐一样。

几个世纪以来,数学家们用集体的智慧创造了他们自己的世界。我不知道这个世界在什么地方——就“地方”这个词的通常语义而言,我认为它并不存在,但我向你保证:当你沉浸在其中时,这个世界看起来非常真实。数学这个精神世界不仅仅非常独特,而且正是由于这些独特性,才使人类对周围的世界有了许多深刻的认识。

我将引导你在那个数学世界里游览观光。我将力图赋予你一双数学家的眼睛,并将尽我所能来改变你观照自身世界的方式。

第一章

自然之秩序

我们生活在一个由诸多模式组成的宇宙中。

繁星夜夜周而复始地划过天空。一年四季循环更替。这世界上没有两片完全相同的雪花,但所有雪花都具有六重对称性;老虎和斑马身披条带花纹,而美洲豹和袋狼则身着斑点花纹。错综的波列穿越海洋;非常相似的沙丘成列地横越沙漠。五颜六色的光弧交织成彩虹装扮天空;明亮的圆晕有时环绕着冬夜的月亮;球形的雨滴会从云中飘落。

人类的心智和文化已经为模式的识别、分类和利用建立了一套规范的思想体系。我们把它称作数学。通过运用数学建立有关模式的概念并使之条理化,我们揭示了一个很大的秘密:自然之模式不仅令人赞叹,而且它是阐明支配自然过程的规律至关重要的线索。400年前,德国天文学家约翰尼斯·开普勒(Johannes Kepler)写了一本名为《六角雪花》(*The Six-Cornered Snowflake*)的书,他在书中指出,雪花必定是由微小的相同单元集聚在一起而成。开普勒的这一认识远远早于物质是由原子组成的理论被世人所公认。开普勒并不是通过实验得出这样的结论的,他只不过对各种各样的常识进行了深入的思考。他的结论的主要证据是雪花的六重对称性,这种对称性是物体有规则集聚的自然结果。假如你在桌子上平铺一大堆相同的硬币,并尽可能密实地把它们集聚在一起,这样你就得到一个蜂窝状排布,这一排布中的每1枚硬

币——那些在边缘处的硬币除外——均为6枚其他硬币包围,并呈正六角形。

星星夜间有规则的运动也是一条线索,通过这条线索我们可以认识到地球运转这一事实。波浪和沙丘是了解水、沙和空气流动规律的线索。老虎的条纹和袋狼的斑纹显示了生物生长和生物形态中的数学规律。天上的彩虹告诉了我们有关光的散射知识,并间接地证明了雨滴是小水珠这一事实。此外,月晕也是一条了解冰晶形状的线索。

在各种各样的自然线索中蕴含着许多美妙的事物,我们毋需受任何数学训练就可认识到。在数学史话中从线索出发推断自然潜在的规则和规律也存在美,但那是另一种美,它适合于思想而不是事物。数学之于自然,恰如歇洛克·福尔摩斯(Sherlock Holmes)之于证据。这位具有传奇色彩的大侦探能根据雪茄烟蒂推断出吸烟者的年龄、职业和收入状况。然而,他的搭档华生(Watson)医生对此种事情却不敏感。很多时候,他只能怀着疑惑而又钦佩之情做一个旁观者,看着这位破案大师铺展出无懈可击的逻辑链条。对一个数学家而言,当六角形雪花的证据呈现在面前时,他就能推断出冰晶的原子几何结构。假如你是华生,这一证据可能仅仅是一个令人困惑的圈套,但假如你是福尔摩斯,你将洞悉其中的奥秘。

模式不但蕴含美,而且很有用。一旦我们学会了辨识背景模式,许多例外就会突然变得格外醒目。例如,作为背景的沙漠处于静止状态,奔跑中的狮子就会格外抢眼;在映衬着恒星的循环背景中,少数以截然不同的方式运行的星星因特别引人注目而会被区分出来。希腊人把这些星星称为“planetes”,意思是“漫游者”,它被保留在我们的术语“行星”(planet)中。理解行星运动模式,比理解

恒星何以在夜晚循环运动所花的时间要长得多,其原因主要在于我们都处在太阳系内,与太阳系一起运动。有些事物从外部观察要比从内部观察简单得多。行星是揭示隐藏在引力与运动背后规律的线索。

我们仍然在学习认识新的模式。就在最近 30 年里,人类已逐渐清楚地认识到两类模式,即如今被称作“分形”(fractal)和“混沌”(chaos)的模式。分形是在愈来愈细微的尺度上重复其结构的几何形状,我将在本章末尾详谈。混沌是一种表观无规性,而其起源是完全确定性的,我将在第八章详述。自然界在亿万年前就“知道”这些模式,例如云朵是分形,天气呈混沌。要想理解这些,得花点功夫才行。

最简单的数学对象是数字,自然界最简单的模式是数字模式。月相从新月到满月再回到新月,每 28 天完成一个循环;一年大约有 365 天;人有 2 条腿;猫有 4 条腿;昆虫有 6 条腿;蜘蛛有 8 条腿;海星有 5 条臂(有的有 10 条、11 条臂,甚至 17 条臂,这取决于物种)。三叶草通常有 3 片叶,4 片叶的三叶草表示幸运,这种迷信反映了一种由来已久的信念——模式的例外是特别的。在花的花瓣中存在着一个奇特的模式。几乎所有的花,花瓣数目是如下奇特序列的数字中的一个:3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89。例如,百合花花瓣有 3 瓣;毛茛属植物有 5 瓣;许多翠雀属植物有 8 瓣;万寿菊有 13 瓣;紫菀属植物有 21 瓣;大多数雏菊有 34、55 或 89 瓣。你几乎找不到其他如此常见的数字。这些数字有一个明显的模式,人们稍加努力即可发现:每一个数字都是前两个数字的和。例如: $3+5=8$, $5+8=13$, 依此类推。在向日葵葵花盘内葵花籽的螺旋模式中亦可找到同样一些数字。这一特定模式在几个世纪前就被注意到了,此后又被广泛研究,但真正满意的解释到 1993 年才给出。这在

第九章中有详述。

就寻找模式而言,数字命理学方法是最容易的,因而也是最危险的。说它容易,是因为任何人都会做。说它危险,乃基于同样理由。困难在于把非偶然的数字模式与偶然的数字模式区分开来。这里有一个恰当的例子。开普勒曾醉心于研究自然界中的数学模式,他花了大半辈子的时间来寻找行星行为中的数学模式。他根据太阳系恰好存在 6 颗行星这一现象(当时只知道水星、金星、地球、火星、木星和土星),提出了一个简洁的理论。他还发现了一个很奇特的模式:6 颗行星的公转周期(即行星绕太阳运转一周所需的时间)与它们距太阳的距离有关联。回想一下,一个数的平方由它自乘而得,例如 4 的平方是 $4 \times 4 = 16$ 。同理,一个数的立方由它自乘两次而得,例如 4 的立方是 $4 \times 4 \times 4 = 64$ 。开普勒发现,若取任一行星距太阳距离的立方,除以其公转周期的平方,则总能得到同一个数。这并不是一个特别雅致的数,但它对所有 6 颗行星而言都相同。

以上这些数字命理学上的观测哪个更重要?后人认为是第二个,即带平方和立方的计算。因为这一数字模式是通往艾萨克·牛顿(Isaac Newton)万有引力理论的关键步骤之一。开普勒就行星数目建立起来的简洁理论早已被埋葬得无影无踪了。这首先因为,这一理论必然是错误的,我们现在知道太阳系有九大行星,而不是 6 颗,甚至可能存在更多的行星,离太阳更远的行星,它们小得、暗淡得无法检测。但更重要的是,我们不再期望就行星的数目找到一个简洁的理论。我们认为,太阳系由围绕太阳的一团星云浓缩而成,行星的数目取决于星云中的物质有多少、物质如何分布、物质运动得快慢以及向什么方向运动。一团似乎同样的星云可能使太阳系存在 8 颗或 11 颗行星。这个数字是偶然的,而不是

普适的,它依赖于星云的初始条件,并不反映自然界的一般规律。

用数字命理学办法搜寻模式所面临的一个很大的问题是,每个可产生许多偶然模式。何者是普遍的,何者是偶然的,并不总是显而易见的。例如,猎户星座腰带上有3颗亮星,它们近乎等间距,并且位于一条直线上。那是自然界内在规律的一条线索吗?这儿有一个类似的问题。木卫一、木卫二和木卫三是木星3颗较大的卫星,它们分别以1.77天、3.55天和7.16天绕木星运转一周。在这3个数字中,后一个数几乎恰好是前一个数的两倍。那是一个非偶然模式吗?3颗亮星根据位置排成行;3颗卫星则根据运转周期“排成行”。如果算作模式的话,哪一个模式是重要线索呢?请先考虑一会儿,我在下一章再作讨论。

除了数字模式之外,还存在着几何模式。实际上,本书本应当取名为《自然之数与形》,之所以没有这样做有两条理由。第一,书名没有“与形”两字读起来更上口。第二,数学形状总是可以归并为数——计算机就是藉此处理图形的。图形中的每一小像点是以荧屏上横向和纵向位置的一对数字来存贮和操作的。这两个数被称为小像点的坐标。普通的形状是小像点的集合体,它可以表示成一系列数对。不过,最好还是把形状视为形状,因为我们可以利用我们强大的直观视觉能力来对付形状,而最好将一系列复杂的数字留给我们较弱的、较差的符号能力去处理。

直到最近,吸引数学家主要的是一些很简单的形状:三角形、四边形、五边形、六边形、圆形、椭圆形、螺旋形、立方体、球体和锥体等等。这些形状都可在自然界中找到。例如,彩虹就是许多圆的集合体,每个圆有一种颜色。我们通常看不到完整的圆,见到的只是一段弧。但从大气中看到的彩虹可以是完整的圆。你还可以从池塘里的波纹、人眼以及蝴蝶翅膀上的花斑中见到圆。