Basic Analytic Number Theory

HIT

数论经典著作系列

解析数论基础

[俄] 卡拉楚巴 著　潘承彪　张南岳 译

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数论经典著作系列

解析数论基础

Basic Analytic Number Theory

[俄] 卡拉楚巴 著

潘承彪 张南岳 译

由黑龍江省精品圖書出版工程專項資金資助出版

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

本书以解析数论的三个著名问题：素数分布、Goldbach 问题和 Waring 问题为中心，很好地阐明了解析数论的三个重要方法：复积分法、圆法及三角和法. 本书的特点是少而精，叙述和证明简洁. 阅读本书仅需要初等数论、微积分及复变函数基础知识. 书中有不少习题，其中一些是近代解析数论的最重要的成果，读者可通过这些习题了解近代解析数论的研究领域.

本书可供大专院校数学系师生、研究生及有关的科学工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

解析数论基础/(俄罗斯)卡拉楚巴著；潘承彪，张南岳译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2012.8

ISBN 978-7-5603-3634-3

Ⅰ. ①解… Ⅱ. ①卡… ②潘… ③张… Ⅲ. ①解析数论 Ⅳ. ①O156.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 149452 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　王勇钢
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 10　字数 200 千字
版　　次　2012 年 8 月第 1 版　2012 年 8 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－3634－3
定　　价　28.00 元

◎ 序言

数论是研究整数性质的.解析数论乃是数论的一个分支,除了数论特有的方法外,它本质上是利用数学中的解析工具研究数论.

本书的目的是向广大读者介绍解析数论的中心问题.撇开次要的细节,作者力求叙述那些导致该理论的现代状况的主要内容.所以书中给出的结果常常不是目前已知的最好结果,但二者之间并无原则差异.

本书讨论解析数论中的三个问题:素数在自然数列和算术数列中的分布,Goldbach 问题与 Waring 问题.以解决这些问题为例,阐明解析数论的基本方法:复积分法,G. H. Hardy-J. E. Littlewood-S. Ramanujan 的圆法,以及 И. М. Виноградов 三角和方法.

从第三章开始,每章后面都配有问题,这些问题和主题紧密相关,建议读者依次去做.这些问题进一步阐明所证明的定理,或者引出现代数论的新想法.

从第三章要求读者具备 И. М. Виноградов 的《数论基础》,大学数学分析教程,以及 И. И. Привалов 的《复变函数引论》范围内的知识.

书中所涉及的一些问题,历史发展以及参考文献可在专著[1]～[10]中找到.

命题和公式在每章中各自编排,在引用其他章节的命题时,将指出其所在的章节.

作者对于 С. М. Воронин 和 А. Ф. Лаврик 的宝贵意见表示衷心感谢.

记　　号

$c, c_0, c_1, \cdots$ 表示绝对正的常数，一般地说，在不同的定理中它们是不同的.

当 A 是正的时，记号 $B = O(A)$，$B \ll A$ 表示 $|B| \leqslant cA$；记号 $A \asymp B$ 表示

$$c_1 A \leqslant B \leqslant c_2 A$$

$\varepsilon, \varepsilon_1, \cdots$ 表示任意小的正常数. n, m, k, l, N 表自然数；除第一章外，p，$p_1, \cdots$ 表素数. $\mu(n)$ 表 Möbius 函数

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n = p^2 m \\ (-1)^k, & n = p_1 \cdots p_k \end{cases}$$

当 $x > 0$ 时

$$\ln x = \log x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}u}{u}, \mathrm{Li}\, x = \int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\ln u} + c_0$$

其中

$$c_0 = \lim_{\delta \to 0} \left(\int_0^{1-\delta} \frac{\mathrm{d}u}{\ln u} + \int_{1+\delta}^2 \frac{\mathrm{d}u}{\ln u} \right)$$

$\Lambda(n)$ 表 Mangoldt 函数

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & n = p^k \\ 0, & n \neq p^k \end{cases}$$

$\varphi(k)$ 表 Euler 函数 —— 不大于 k 且与 k 互素的自然数的个数.

$\psi(x)$ 表 Чебышев 函数

$$\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n), \pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1$$

当 $l \leqslant k, (l, k) = 1$ 时

$$\psi(x; k, l) = \sum_{\substack{n \equiv l (\bmod k) \\ n \leqslant x}} \Lambda(n)$$

$$\pi(x; k, l) = \sum_{\substack{p \equiv l (\bmod k) \\ p \leqslant x}} 1$$

$\tau(n)$ 表 n 的正除数的个数；$\tau_k(n)$ 表方程 $x_1 x_2 \cdots x_k = n$ 的解数，$x_1, x_2, \cdots, x_k$ 是自然数；因此 $\tau_2(n) = \tau(n)$；$\Omega(n)$ 表 n 的素因子个数. 对于实数 α，$[\alpha]$ 表 α 的整数部分，即不超过 α 的最大整数；$\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$ 表 α 的小数部分；$(\alpha) = \min(\{\alpha\}, 1 - \{\alpha\})$ 表 α 到最近整数的距离.

s 表复数，$s = \sigma + \mathrm{i}t$，其中 $\mathrm{i}^2 = -1$，$\mathrm{Re}\, s = \sigma$，$\mathrm{Im}\, s = t$；$\bar{s} = \sigma - \mathrm{i}t$；一般地，$\bar{f}$ 表与 f 共轭的量.

◎目录

第一章 有穷级整函数

这章具有辅助性质，它包含以后所必需的整函数知识.

§1 无穷乘积. Weierstrass 公式

我们引进无穷乘积的概念.

定义 1 设 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ 是异于 -1 的无穷复数序列. 形如

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)=(1+u_1)\cdot(1+u_2)\cdot\cdots\cdot(1+u_n)\cdot\cdots \tag{1}$$

的表达式称为无穷乘积.

形如

$$\prod_{n=1}^{k}(1+u_n)=(1+u_1)\cdot\cdots\cdot(1+u_k)=v_k \tag{2}$$

的表达式称为部分乘积.

定义 2 如果序列(2) v_k 当 $k\to\infty$ 时趋于 $v\neq 0$，则称无穷乘积(1) 收敛，其值为 v，即

$$v=\lim_{k\to\infty}v_k=\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n) \tag{3}$$

如果序列 v_k 不收敛，或者 $v=0$，则称无穷乘积(1) 发散.

对于大多数情形，下面的收敛判别法是够用的.

定理 1 如果级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{4}$$

绝对收敛，则乘积(1) 收敛.

证 因为级数

$$|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|+\cdots$$

收敛，所以

$$\lim_{n\to\infty}|u_n|=0$$

不失一般性，可以设 $|u_n|\leqslant\frac{1}{2}, n=1,2,\cdots$. 首先设 $u_n=a_n$ 是实数，$n=1,2,\cdots$. 那么 $|\ln(1+u_n)|\leqslant 2|u_n|$. 由此推出序列

$$\ln(1+u_1)+\cdots+\ln(1+u_n)=\ln(1+u_1)\cdot\cdots\cdot(1+u_n)$$

收敛，所以乘积(1) 收敛.

现在设 u_n 是任意复数，需要证明，当 $n\to\infty$ 时，两个实数序列

$$\begin{aligned}|v_n|&=|(1+u_1)\cdot(1+u_2)\cdot\cdots\cdot(1+u_n)|\\&=|1+u_1|\cdot\cdots\cdot|1+u_n|\end{aligned}\tag{5}$$

$$\begin{aligned}\arg v_n&=\arg(1+u_1)\cdot(1+u_2)\cdot\cdots\cdot(1+u_n)\\&=\arg(1+u_1)+\cdots+\arg(1+u_n)\end{aligned}\tag{6}$$

均收敛.

序列(5) 收敛的充分必要条件是序列 $|v_n|^2$ 收敛. 由于

$$|1+u_n|^2=|1+\alpha_n+\mathrm{i}\beta_n|^2=1+\alpha_n^2+\beta_n^2+2\alpha_n$$

$$\alpha_n=\mathrm{Re}\,u_n,\beta_n=\mathrm{Im}\,u_n$$

以及

$$|\alpha_n^2+\beta_n^2+2\alpha_n|\leqslant|u_n|^2+2|u_n|$$

所以从已经证明的结果立即推出 $|v_n|^2$ 收敛. 序列(6) 的收敛性从以下事实推出：对于充分大的 n_0，当 $n>n_0$ 时

$$|\arg(1+u_n)|=\left|\arcsin\frac{\beta_n}{\sqrt{(1+\alpha_n)^2+\beta_n^2}}\right|<\pi|\beta_n|$$

定理 1 证毕.

现在转向研究某区域内的解析函数的无穷乘积.

定理 2 设 $u_n(s)$ 是在某区域 G 内解析函数的无穷序列，且：

a) $u_n(s)\neq-1, n=1,2,\cdots, s\in G$;

b) $|u_n(s)|\leqslant a_n, n=1,2,\cdots, s\in G$;

c) 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

那么，对于任意的 $s\in G$，乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(s))\tag{7}$$

收敛. 由等式

$$v(s)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(s))$$

定义的函数 $v(s)$ 在 G 内是解析的，且 $v(s)\neq 0, s\in G$.

证 对于 $s\in G$，乘积(7) 的收敛性从定理 1 推出. 要证明 $v(s)$ 的解析性，只要证明解析函数序列

$$v_k(s)=\prod_{n=1}^{k}(1+u_n(s))$$

对于 $s\in G$ 是一致收敛到 $v(s)$ 的. 然后再应用 Weierstrass 定理.

设 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=p,(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\cdots\cdot(1+a_n)=p_n$

首先我们证明对于任意的 $s\in G$，有

$$\left|\frac{v(s)}{v_n(s)}-1\right|\leqslant\frac{p}{p_n}-1 \tag{8}$$

事实上，如果 $k\geqslant 1$，则

$$\begin{aligned}\left|\frac{v_{n+k}(s)}{v_n(s)}-1\right| &=|(1+u_{n+1}(s))\cdot\cdots\cdot(1+u_{n+k}(s))-1|\\ &=|u_{n+1}(s)+\cdots+u_{n+k}(s)+\\ &\quad u_{n+1}(s)u_{n+2}(s)+\cdots+u_{n+1}(s)\cdot\cdots\cdot u_{n+k}(s)|\\ &\leqslant a_{n+1}+\cdots+a_{n+k}+a_{n+1}a_{n+2}+\cdots+\\ &\quad a_{n+1}\cdot\cdots\cdot a_{n+k}\\ &=\frac{p_{n+k}}{p_n}-1\end{aligned}$$

令 $k\to\infty$，便得到式(8). 这样，对于 $n\geqslant n_0(\varepsilon)$ 以及任意的 $s\in G$，有

$$\begin{aligned}|v(s)-v_n(s)|=|v_n(s)|\left|\frac{v(s)}{v_n(s)}-1\right|&\leqslant p_n\left(\frac{p}{p_n}-1\right)\\ &=p-p_n<\varepsilon\end{aligned}$$

定理证毕.

定义 3 在 s 平面上的任意有穷部分是解析的函数，称为整函数.

现在，我们来证明两个定理：一是存在整函数，以且仅以给定无穷序列中的数为其零点；二是整函数可按其零点展为无穷乘积(代数基本定理的推广).

定理 3 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 是无穷复数序列，且

$$0<|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant\cdots\leqslant|a_n|\leqslant\cdots$$

及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|a_n|}=0$$

则存在整函数 $G(s)$，它仅以 a_n 为其零点(如果其中 a_n 有相同的，那么 $G(s)$ 的零点有相应的重数).

证 设

$$u_n=u_n(s)=\left(1-\frac{s}{a_n}\right)e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}}\quad n=1,2,\cdots$$

并考虑无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}u_n(s)\tag{9}$$

我们来证明这个乘积在复平面的每个点 $s\neq a_n$ 收敛，并且是以 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 为其零点的整函数 $G(s)$. 考虑以原点为中心，以 $|a_n|$ 为半径的圆 C 及无穷乘积

$$\prod_{r=n}^{\infty}u_r(s)$$

我们要证明这个乘积在圆 $|s|<|a_n|$ 内收敛到解析函数. 从而无穷乘积(9)在这个圆内也是解析的，它仅以 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 为零点. 因为 $|a_n|\to\infty$，所以就证明了定理. 对于 $|s|<|a_n|$，$r\geqslant n$，设

$$\ln u_r(s)=\ln\left(1-\frac{s}{a_r}\right)+\frac{s}{a_r}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_r}\right)^2+\cdots+\frac{1}{r-1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r-1}$$

这里 $\ln\left(1-\frac{s}{a_r}\right)$ 是对数主值，即 $s=0$ 时它等于 0.

于是，当 $r=n,n+1,\cdots$ 和 $|s|<|a_n|$ 时

$$\ln u_r(s)=-\frac{1}{r}\left(\frac{s}{a_r}\right)^r-\frac{1}{r+1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r+1}-\cdots$$

及

$$u_r(s)=e^{-\frac{1}{r}\left(\frac{s}{a_r}\right)^r-\frac{1}{r+1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r+1}-\cdots}$$

因此，我们应当证明，级数

$$\sum_{r=n}^{\infty}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{s}{a_r}\right)^r+\frac{1}{r+1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r+1}+\cdots\right]\tag{10}$$

在 $|s|<|a_n|$ 内收敛到一个解析函数. 对于任意的 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$，及 $|s|\leqslant(1-\varepsilon)|a_n|$，有

$$\left|\frac{1}{r}\left(\frac{s}{a_r}\right)^r+\frac{1}{r+1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r+1}+\cdots\right|\leqslant\frac{1}{r}(1-\varepsilon)^r+\frac{1}{r+1}(1-\varepsilon)^{r+1}+\cdots<\frac{(1-\varepsilon)^r}{\varepsilon r}$$

因此，级数(10)在区域 $|s|\leqslant(1-\varepsilon)|a_n|$ 内一致收敛，即无穷乘积(9)在圆 C 内是解析的. 定理证毕.

推论 1(Weierstrass 公式)　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 是满足定理 3 的条件的复数序列，则函数

$$G(s)=s^m\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{a_n}\right)e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}}$$

是整函数,且仅以 $0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 为其零点.

推论 2 设序列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 满足定理3的条件,且存在整数 $p\geqslant 0$,使得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|^{p+1}}$$

收敛,则函数

$$G_1(s)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{a_n}\right)e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{s}{a_n}\right)^p}$$

满足定理 3 的要求.

事实上,在这种情况下,当 $|s|\leqslant(1-\varepsilon)|a_n|$ 时,级数

$$\sum_{r=n}^{\infty}\left[\frac{1}{p+1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{p+1}+\frac{1}{p+2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{p+2}+\cdots\right]$$

有控制级数

$$\sum_{r=n}^{\infty}\frac{(1-\varepsilon)^{p+1}}{(p+1)\varepsilon}\cdot\left(\frac{|a_n|}{|a_r|}\right)^{p+1}<+\infty$$

定理 4 每个整函数 $G(s)$ 可以表为以下形式

$$G(s)=e^{H(s)}s^m\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{a_n}\right)e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}} \qquad (*)$$

其中 $H(s)$ 是整函数,而数 $0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 是 $G(s)$ 的零点,且按其模的增长顺序排列. 如果除此以外,序列 $a_n,n=1,2,\cdots$,满足推论 2 的条件,则

$$G(s)=e^{H(s)}s^m\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{a_n}\right)e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{s}{a_n}\right)^p}$$

证 $G(s)$ 的零点不能有极限点,即它们能按模的增长顺序排列. 由定理3,我们可以构造整函数 $G_1(s)$,它以 $G(s)$ 的零点为其零点. 设 $\varphi(s)=\dfrac{G(s)}{G_1(s)},s\neq a_n;\varphi(a_n)=\lim\limits_{s\to a_n}\varphi(s)$. 可以看出,$\varphi(s)$ 是不等于零的整函数,即 $\varphi(s)$ 的对数是整函数. 于是

$$\varphi(s)=e^{H(s)}$$

其中 $H(s)$ 是整函数. 这就证明了定理的第二个断言. 定理证毕.

§2 有穷级整函数

我们引进今后所必需的一些定义.

定义 4 设 $G(s)$ 是整函数

$$M(r)=M_G(r)=\max_{|s|=r}|G(s)|$$

如果存在 $a>0$,使得

$$M(r)<\mathrm{e}^{r^{a}} \quad r>r_0(a)>0 \tag{11}$$

则称 $G(s)$ 是有穷级整函数;在这种情形,$\alpha=\inf a$ 称为 $G(s)$ 的级.如果不管怎样的 $a>0$,式(11) 都满足,则称 $G(s)$ 的级等于 ∞.

定义 5 设 $s_1,s_2,\cdots,s_n,\cdots$ 是复数序列,且

$$0<|s_1|\leqslant|s_2|\leqslant\cdots\leqslant|s_n|\leqslant\cdots \tag{12}$$

如果存在 $b>0$,使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}|s_n|^{-b}<+\infty \tag{13}$$

则称序列(12) 有有穷收敛指数;在这种情形,$\beta=\inf b$ 称为序列(12) 的收敛指数.如果不管怎样的 $b>0$,式(13) 都不成立,则称序列(12) 的收敛指数等于 ∞.

这节的基本结果是:

定理 5 设 $G(s)$ 是有穷级 α 的整函数,$G(0)\neq 0$,s_n 是 $G(s)$ 的零点序列,且 $0<|s_1|\leqslant|s_2|\leqslant\cdots\leqslant|s_n|\leqslant\cdots$,则序列 s_n 有有穷收敛指数 $\beta\leqslant\alpha$

$$G(s)=\mathrm{e}^{g(s)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{s_n}\right)\mathrm{e}^{\frac{s}{s_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{s}{s_n}\right)^p}$$

其中 $p\geqslant 0$ 是使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|s_n|^{p+1}}<+\infty$$

的最小整数.$g(s)$ 是次数 $g\leqslant\alpha$ 的多项式,并且 $\alpha=\max(g,\beta)$.除此以外,如果对于任意的 $c>0$,能够找到无穷序列 $r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots,r_n\to+\infty$,使得

$$\max|G(s)|>\mathrm{e}^{\sigma r_n^{\alpha}} \qquad |s|=r_n,n=1,2,\cdots$$

则 $\alpha=\beta$ 及级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|s_n|^{-\beta}$ 发散.

为了证明定理 5,需要一些辅助结果 —— 引理.在这些引理中,我们假定满足定理 5 中的条件,且利用这个定理中的记号.

引理 1 设 $0<r<R$,m 是 $G(s)$ 在圆 $|s|\leqslant r$ 上的零点个数,则

$$\left(\frac{R}{r}\right)^m\leqslant\frac{M(R)}{|G(0)|},\text{其中 } M(R)=\max_{|s|=R}|G(s)|$$

证 考虑

$$F(s)=G(s)\prod_{n=1}^{m}\frac{R^2-s\bar{s}_n}{R(s-s_n)} \quad s\neq s_n$$

$$F(s_n)=\lim_{s\to s_n}G(s)\prod_{n=1}^{m}\frac{R^2-s\bar{s}_n}{R(s-s_n)}$$

其中,$s_1,s_2,\cdots,s_m$ 是 $G(s)$ 在 $|s|\leqslant r$ 上的零点.

函数 $F(s)$ 在圆 $|s| \leqslant R$ 上是解析的，且在 $|s|=R$ 上

$$|F(s)|=|G(s)|$$

因此，由最大模原理

$$|F(0)|=|G(0)|\prod_{n=1}^{m}\frac{R}{|s_n|}\leqslant \max_{|s|=R}|F(s)|=M(R)$$

由此推出引理的断言.

推论 如果 m 是函数 $G(s)$ 在以原点为中心，$\frac{R}{2}$ 为半径的圆上的零点数，则

$$m\leqslant \frac{1}{\ln 2}\ln\frac{M(R)}{|G(0)|}$$

引理 2 如果 $N(r)$ 表示 $G(s)$ 在圆 $|s|\leqslant r$ 上的零点数，则对于任意的 $\varepsilon>0$，能够找到 $c=c(\varepsilon)>0$，使得

$$N(r)\leqslant cr^{\alpha+\varepsilon}$$

此外有 $\beta\leqslant\alpha$.

证 第一个不等式由引理 1 和 $G(s)$ 的级的定义推出. 现在我们来证明，对于任意的 $b>\alpha$，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|s_n|^{-b}$$

收敛. 由此就推出引理的第二个断言. 由已经证明的不等式可知，对于任意的 $\varepsilon>0$，有 $n\leqslant c|s_n|^{\alpha+\varepsilon}$，即

$$|s_n|^{-b}\leqslant c^{\frac{b}{\alpha+\varepsilon}}n^{-\frac{b}{\alpha+\varepsilon}}$$

如果 $b>\alpha$，那么对于充分小的 $\varepsilon>0$，$\frac{b}{\alpha+\varepsilon}>1$. 因此上述级数收敛.

引理 3 设 s_n 是具有有穷收敛指数 β 的序列(12)，$p\geqslant 0$ 是使

$$\sum_{n=1}^{\infty}|s_n|^{-(p+1)}<+\infty$$

的最小整数. 又设 $P(s)$ 是由下面等式给定的整函数

$$P(s)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{s_n}\right)e^{\frac{s}{s_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{s}{s_n}\right)^p} \tag{14}$$

那么，$P(s)$ 的级等于 β. 此外，如果 $|s_n|\to+\infty$，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}|s_n|^{-\beta}<+\infty$$

则

$$|P(s)|\leqslant e^{\sigma r^{\beta}}\quad |s|=r$$

证 设 $P(s)$ 的级是 α. 由引理 2 推出，$\beta\leqslant\alpha$. 剩下要证明，对于任意的 $\varepsilon>0$，$\alpha\leqslant\beta+\varepsilon$，即应证明当 $|s|\to+\infty$ 时

$$\ln|P(s)|<c(\varepsilon)|s|^{\beta+\varepsilon}$$

为了简明起见,乘积(14) 中的因子用 $u(s,s_n)$ 表示. 设

$$\ln|P(s)|=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2$$

其中 $$\sum\nolimits_1=\sum_{\left|\frac{s}{s_n}\right|\leqslant\frac{1}{2}}\ln|u(s,s_n)|,\sum\nolimits_2=\sum_{\left|\frac{s}{s_n}\right|>\frac{1}{2}}\ln|u(s,s_n)|$$

其次,对于 $\sum_1$ 中的项

$$\begin{aligned}\ln|u(s,s_n)|&\leqslant\frac{1}{p+1}\left|\frac{s}{s_n}\right|^{p+1}+\frac{1}{p+2}\left|\frac{s}{s_n}\right|^{p+2}+\cdots\\&\leqslant 2\left|\frac{s}{s_n}\right|^{p+1}\end{aligned}$$

对于 $\sum_2$ 中的项

$$\begin{aligned}\ln|u(s,s_n)|&\leqslant\ln\left(1+\left|\frac{s}{s_n}\right|\right)+\left|\frac{s}{s_n}\right|+\cdots+\frac{1}{p}\left|\frac{s}{s_n}\right|^p\\&=r_p\left(\frac{|s|}{|s_n|}\right)\leqslant\begin{cases}c(p)\left|\frac{s}{s_n}\right|^p,p\geqslant 1\\c(\varepsilon)\left|\frac{s}{s_n}\right|^\varepsilon,p=0\end{cases}\end{aligned}$$

因此

$$\ln|p(s)|\ll\sum_{\left|\frac{s}{s_n}\right|\leqslant\frac{1}{2}}\left|\frac{s}{s_n}\right|^{p+1}+\sum_{\left|\frac{s}{s_n}\right|>\frac{1}{2}}r_p\left(\left|\frac{s}{s_n}\right|\right)$$

如果 $\beta=p+1$,那么

$$\text{第一个和}\ll|s|^\beta$$

设 $\beta<p+1$ 和 $\beta+\varepsilon<p+1$,则

$$\text{第一个和}\ll|s|^{\beta+\varepsilon}\sum_{\left|\frac{s}{s_n}\right|\leqslant\frac{1}{2}}\frac{1}{|s_n|^{\beta+\varepsilon}}\left|\frac{s}{s_n}\right|^{p+1-(\beta+\varepsilon)}\ll|s|^{\beta+\varepsilon}$$

于是,对于任意的 $p\geqslant 0$,第一个和 $\ll|s|^{\beta+\varepsilon}$. 如果 $p\geqslant 1$,那么(因为 $\beta\geqslant p$)

$$\text{第二个和}\ll\sum_{\left|\frac{s}{s_n}\right|>\frac{1}{2}}\left|\frac{s}{s_n}\right|^p=|s|^{\beta+\varepsilon}\sum_{\left|\frac{s}{s_n}\right|>\frac{1}{2}}\frac{1}{|s_n|^{\beta+\varepsilon}}\cdot\left|\frac{s}{s_n}\right|^{p-(\beta+\varepsilon)}\ll|s|^{\beta+\varepsilon}$$

如果 $p=0$,那么

$$\text{第二个和}\ll\sum_{\left|\frac{s}{s_n}\right|>\frac{1}{2}}\left|\frac{s}{s_n}\right|^\varepsilon=|s|^{\beta+\varepsilon}\sum_{\left|\frac{s}{s_n}\right|>\frac{1}{2}}\frac{1}{|s_n|^{\beta+\varepsilon}}\cdot\left|\frac{s}{s_n}\right|^{-\beta}\ll|s|^{\beta+\varepsilon}$$

引理的第一部分证毕. 对于第二部分的证明,我们注意到这时一定有 $\beta>0$(因为 $|s_n|\to+\infty$,且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|s_n|^{-\beta}$ 收敛). 于是在前面的论证中,用 β 代替 $\beta+$

ε(即处处提出 $|s|^{\beta}$),且取 $0<\varepsilon<\beta$,就得到第二部分断言.引理证毕.

现在设 $P(s)$ 是有穷级 α 的整函数,$P(0)\neq 0$,根据定理 4,有

$$P(s)=e^{g(s)}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{s_n}\right)e^{\frac{s}{s_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{s_n}\right)^{n-1}}$$

根据引理 2,s_n 的收敛指数不超过 α.设 $p\geqslant 0$,是使级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|s_n|^{p+1}}<+\infty$$

的最小整数.那么,由定理 4

$$P(s)=e^{g(s)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{s_n}\right)e^{\frac{s}{s_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{s}{s_n}\right)^{p}} \tag{15}$$

其中 $g(s)$ 是一整函数.以下我们将证明 $g(s)$ 是多项式(引理 5).为此需要下面的引理,这个引理本身有独立的意义(见第六章 §1).

引理 4　设 $R>0$ 及函数

$$f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s-s_0)^n$$

在圆 $|s-s_0|\leqslant R$ 上是解析的,且在圆周 $|s-s_0|=R$ 上 $\mathrm{Re}\,f(s)\leqslant M_1$,则:

a) $\dfrac{1}{n!}|f^{(n)}(s_0)|=|a_n|\leqslant 2\{M-\mathrm{Re}\,f(s_0)\}R^{-n},n\geqslant 1$;

b) 在圆 $|s-s_0|\leqslant r<R$ 上

$$|f(s)-f(s_0)|\leqslant 2\{M-\mathrm{Re}\,f(s_0)\}\frac{r}{R-r}$$

$$|f^{(n)}(s)|\leqslant 2n!\ \{M-\mathrm{Re}\,f(s_0)\}\frac{R}{(R-r)^{n+1}}\quad n\geqslant 1$$

证　我们首先在 $s_0=0,a_0=f(0)=0$ 的条件下证明 a).因为 $\mathrm{Re}\,f(s)$ 在边界上达到最大值,而当 $s=0$ 时,$f(s)=0$,所以 $M\geqslant 0$.设

$$a_n=|a_n|e^{i\varphi_n},s=Re^{i\varphi}$$

有

$$\mathrm{Re}\,f(\mathrm{Re}^{i\varphi})=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\cos(n\varphi+\varphi_n)R^n \tag{16}$$

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|R^n$ 收敛,所以级数(16)对于 $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ 一致收敛,即它可以逐项积分,得到

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\,f(Re^{i\varphi})\mathrm{d}\varphi=0$$

此外

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\,f(Re^{i\varphi})\cos(n\varphi+\varphi_n)\mathrm{d}\varphi=\pi|a_n|R^n\quad n\geqslant 1$$

因此($M\geqslant 0,1+\cos(n\varphi+\varphi_n)\geqslant 0$),有

$$\pi \mid a_n \mid R^n = \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\, f(Re^{i\varphi})(1+\cos(n\varphi+\varphi_n))\mathrm{d}\varphi \leqslant 2\pi M$$

$$\mid a_n \mid \leqslant \frac{2M}{R^n}$$

如果 $s_0 \neq 0, a_0 \neq 0$,那么我们考虑

$$F(s') = f(s'+s_0) - a_0 = a_1 s' + a_2 s'^2 + \cdots$$

于是,$F(0)=0$,在 $\mid s' \mid = R$ 上,$\mathrm{Re}\, F(s') \leqslant M - \mathrm{Re}\, f(s_0)$. 由此从已经证明的结果,就推出引理的断言 a).

其次

$$\mid f(s) - f(s_0) \mid \leqslant 2\{M - \mathrm{Re}\, f(s_0)\} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n$$

$$< 2\{M - \mathrm{Re}\, f(s_0)\} \frac{r}{R-r}$$

对 $f(s)$ 逐次微商,得到

$$\mid f^{(n)}(s) \mid \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} \mid a_m \mid m(m-1)\cdots(m-n+1) \mid s - s_0 \mid^{m-n}$$

$$\leqslant 2\{M - \mathrm{Re}\, f(s_0)\} \sum_{m=n}^{\infty} m(m-1)\cdots(m-n+1) \frac{r^{m-n}}{R^m}$$

$$= 2\{M - \mathrm{Re}\, f(s_0)\} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}r^n} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^m$$

$$= 2n!\ \{M - \mathrm{Re}\, f(s_0)\} \frac{R}{(R-r)^{n+1}}$$

引理证毕.

引理 5 式(15)中的 $g(s)$ 是次数 $g \leqslant \alpha$ 的多项式.

证 取 $k=[\alpha]$,那么式(15)中的 p 不超过 k. 我们证明

$$g^{(k+1)}(s) \equiv 0$$

为此,对式(15)取对数并微商 $k+1$ 次,得到

$$g^{(k+1)}(s) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} \frac{P'(s)}{P(s)} + k!\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(s_n - s)^{k+1}} \tag{17}$$

考虑圆 $\mid s \mid \leqslant \frac{R}{2}$,则当 $\mid s_n \mid > R$ 时

$$\mid s_n - s \mid > \frac{1}{2} \mid s_n \mid$$

又因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mid s_n \mid^{k+1}}$ 收敛,所以当 $R \to \infty$ 时

$$k!\ \sum_{\mid s_n \mid > R} \frac{1}{\mid s_n - s \mid^{k+1}} < k!\ 2^{k+1} \sum_{\mid s_n \mid > R} \frac{1}{\mid s_n \mid^{k+1}} \to 0 \tag{18}$$

现在考虑函数