高级中学

代数第三册（甲种本）

教学参考书

人民教育出版社

目　录

第一章　一元多项式和高次方程

I　教学要求

1. 使学生初步了解一元 n 次多项式的有关概念；初步了解复系数一元 n $(n>1)$ 次多项式在复数集中可以分解为 n 个一次因式的积以及分解式的唯一性；掌握综合除法、余数定理、因式定理和整系数多项式的一次有理因式的特性，并能熟练地运用它们将某些特殊多项式进行因式分解.

2. 使学生认识多项式因式分解与解代数方程之间的密切联系；了解复系数一元 n 次方程在复数集中有且仅有 n 个根；掌握整系数一元 n 次方程有理数根的求法；掌握韦达定理和实系数方程虚根成对定理，并能熟练地运用这些知识解决有关方程的求解问题.

3. 在系统归纳和加深中学所学的多项式与方程的知识中，进一步提高学生的推理论证能力，继续提高他们分析问题和解决问题的能力.

II　教材分析和教学建议

本章内容是初中代数中整式除法、因式分解、一元一次方程和一元二次方程等知识的延续和发展. 因式分解与方程的求根，都有一个在什么样的数集内进行的问题. 因此，在讲过

复数以后再安排这一章，进一步研究因式分解与方程的求根，是十分必要的. 这样可以使中学生在毕业前，对因式分解与解方程的知识掌握得较为全面. 另外，一元 n 次多项式的因式分解与一元 n 次方程的求根是紧密联系的，过去虽曾提过(例如二次三项式 ax^2+bx+c 的因式分解，可先求出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根 x_1, x_2，然后有 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$)，但那时研究的只限于二次方程. 现在，本章就高次方程系统地对它们之间的联系进行研究，也是十分必要的.

本章教材分两大节. 第一大节是一元多项式. 教材在介绍了一元 n 次多项式的概念后，讲综合除法，接下去介绍余数定理、因式定理，并利用综合除法、因式定理来分解因式. 第二大节是高次方程. 教材首先根据第一大节中学过的知识(即复系数一元 n 次多项式 $f(x)$ 在复数集中有且仅有 n 个一次因式，以及如果整系数多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 有因式 $x-\frac{q}{p}$，那么 p 一定是 a_n 的约数，q 一定是 a_0 的约数)，直接推得"复系数一元 n 次方程在复数集 C 中有且仅有 n 个根(k 重根算作 k 个根)"以及"如果既约分数 $\frac{q}{p}$ 是整系数一元 n 次方程 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 的根，那么 p 一定是 a_n 的约数，q 一定是 a_0 的约数"等定理. 接着教材讲了一元 n 次方程的根与系数的关系(韦达定理)，最后介绍了实系数方程虚根成对定理.

本章教材在内容安排上与六十年代高中代数课本"高次方程"一章，有明显不同的是:

(1) 突出"多项式"部分，在研究了多项式的基础上水到

渠成地得出高次方程中某些相应的重要性质．这样做，有利于与大学高等代数内容的衔接．

（2）综合除法放在较前的位置，这是因为它较易掌握，而且早学综合除法，有利于学习余数定理、因式定理等内容．

（3）在“一元多项式”这一大节的最后，研究了一元多项式在复数集中的因式分解．这个问题涉及到代数基本定理和因式分解唯一性定理．教材将这两个定理合并在一起，直接给出而不加证明．不象六十年代的高中代数课本那样先给出代数基本定理（未证明），再去证“一元 n 次方程有且只有 n 个根”．这样做避开了难点．

（4）在介绍一元 n 次方程的根与系数的关系时，既证明了原定理，又介绍了它的逆定理，以便应用．在讲实系数方程虚根成对定理时，增加了根 $a+bi$ 与 $a-bi$ 的重数相等这一结论，使这个定理含义更加明确．

本章的重点是综合除法、因式定理和一元 n 次多项式因式分解唯一性定理．本章的难点是整系数多项式在有理数集中因式分解的方法以及韦达定理的应用．学好本章的关键是正确理解余数定理，熟练掌握综合除法．

本章为选学内容，教学约需22课时，具体分配如下（仅供参考）：

1.1	一元 n 次多项式	约1课时
1.2	综合除法	约2课时
1.3	余数定理	约1课时
1.4	因式定理	约2课时
1.5	利用综合除法、因式定理来分解因式	约4课时

一 一元多项式

1.1 一元 n 次多项式

1. 从一元一次、二次、三次多项式的一般形式，归纳出一元 n 次多项式的定义. 教学中要注意培养学生抽象概括的能力，学会形式定义的方法.

2. 建立一元 n 次多项式的概念以后，要强调说明以下几点:

(1) 书写多项式时，应根据定义的要求，把各项按降幂排列.

(2) 多项式都是在指定的数集上研究的(本章除特殊说明的以外，是在复数集上研究)，在学习多项式和解题的过程中一定要注意所考察的数集.

(3) 强调零次多项式是一个非零的数，它只有一项. 零多项式的系数都是零，记作“0”，它没有确定的项数与次数.

(4) 初中代数里，把多项式看作是单项式的和，因而有单项式与多项式的区分. 引进多项式的一般概念后，单项式可以看作特殊的多项式.

3. 现行中学代数教材中不介绍两个多项式恒等的条件，所以在本章第 1.7 节讲一元 n 次方程根与系数的关系时，利

用了零多项式的定义．因此，对零多项式的定义要重视．

4．一元 n 次多项式可以看作是定义在复数集 C 上的函数，而且是一种简单、基本的函数．学习了高等数学以后，一些比较复杂的函数可以用实系数多项式来逼近．

1.2 综合除法

1．扼要复习初中所学的实系数多项式四则运算法则，并指出对复系数多项式也同样适用．为了顺利引入新课，建议选讲以下例题：

例 1 计算 $(5x^2-2x^3+6x^4-18)\div(2x^2+1)$，并把结果写成“$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$”的形式．

例 2 一个多项式除法的除式是 $2x^2+3x-5$，商式是 $3x-5$，余式是 -7，求被除式．

（选自教材第 37 页复习参考题一 A 组的第 1，2 题）

通过实例的讲解和练习，要明确指出：

（1）在多项式的除法运算中，被除式 $f(x)$、除式 $g(x)$（非零多项式），商式 $q(x)$ 与余式 $r(x)$ 之间有关系式

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x),$$

其中 $r(x)$ 的次数小于 $g(x)$ 的次数，或者 $r(x)=0$．

当 $r(x)=0$ 时，我们称 $f(x)$ 能被 $g(x)$ 整除，有时为简便起见，记作 $g(x)\mid f(x)$．

正确理解和运用这个关系式是学好本章的关键．至于 $q(x)$ 与 $r(x)$ 的存在性、唯一性，教材中没有证明，也不必补充．可以结合实例，对比着整数的带余除法略加说明，学生是能够接受的．但要指出这个等式对所讨论数集上的任何多项式 $f(x)$，$g(x)$（$g(x)\neq 0$）都成立，为讲余数定理奠定基础．

（2）在两例的讲练过程中，要复习多项式的运算法则，概括指出一元多项式相加、相乘的结果仍然是一元多项式，而且加乘运算满足交换律、结合律以及乘法对加法的分配律.

2. 综合除法是一元多项式除以一元一次式的一种简便计算法，在多项式理论中应用极广，是应该熟练掌握的.

教材中以一个三次多项式为例，利用长除法找出商式系数及余数的构成规律，并用列表的形式分离系数、简化计算，使用起来比较方便. 不过在教学中要强调被除式必须按降幂排列，缺项系数应补上"0".

3. 用综合除法时，要强调除式应是 $x-b$ 的形式. 在讲到"移下第一个系数，乘以 b，加上第二个系数，依次进行"时，还要强调"加上"这两个字，这与用长除法运算时"从被除式减去除式与已得商的积"的"减去"不一样. 避免学生发生习惯性错误.

4. 教材中重点研究了除式为 $x-b$ 时使用综合除法的方法，对于除式为 $px\pm q$ 的情况，如果条件允许，可以结合例2的第(2)小题的讲解，阐明理论依据和使用方法.

事实上，设被除式 $f(x)$ 除以 $x\pm\frac{q}{p}$ 所得的商式为 $Q(x)$，余数为 r，则有

$$f(x)=\left(x\pm\frac{q}{p}\right)Q(x)+r$$
$$=(px\pm q)\frac{Q(x)}{p}+r.$$

所以只要把 $Q(x)$ 除以 p，就得到所求的商式 $q(x)$，余数不变.

教材中例2的第(2)小题就可直接写成以下形式:

$$
\begin{array}{c|rrrr|r|l}
 & 6 & -5 & -3 & -1 & +4 & -\frac{1}{2} \\
 & & -3 & +4 & -\frac{1}{2} & +\frac{3}{4} & \\
\hline
2 & 6 & -8 & +1 & -\frac{3}{2} & +\frac{19}{4} & \\
\hline
 & 3 & -4 & +\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & &
\end{array}
$$

∴ 商式 $q(x)=3x^3-4x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$, 余数 $r=\frac{19}{4}$.

1.3 余数定理

1. 余数定理是本章的重点内容之一,因为后面的因式定理是以余数定理为基础的. 要注意强调定理的适用范围是复数集, 选讲的例题不要局限于实数集.

2. 教学时可先用实例说明多项式 $f(x)$除以 $x-b$ 所得的余数与 $f(b)$相等, 从而导出余数定理. 定理的证明不困难,关键在于除法的基本关系式$f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$. 可启发学生自行证明.

3. 余数定理的基本应用有两方面: 一是不做除法求余数;一是利用综合除法求多项式的值. 本节例1、例2就说明这两方面的应用. 在讲过这两个例子后,还可以比较一下:如果实系数多项式$f(x)$中 x 的取值绝对值不大, $f(x)$的项数不多,且各项系数绝对值不大, 代入求值较方便;如果 x 的取值绝对值较大, $f(x)$的项数较多, 或项的系数绝对值较大, 那么用综合除法比较方便.

1.4 因式定理

1. 因式定理是余数定理的重要推论.它给了多项式$f(x)$可以分解出一个一次因式 $x-b$ 的充要条件,应用很广，为通过逐次降幂将多项式进行因式分解创造了条件. 教学中要注意总结规律，为以后的分解因式和方程的求根打好基础.

2. 教学中还应结合本节内容复习一下充要条件的概念,因为学生很容易搞错. 这一小节的课内练习中，可适当补充一两个判别必要不充分、充分不必要、充分且必要条件的题目，让学生进一步巩固这些知识. 要使学生真正理解这个证明中证明(1)充分性与证明(2)必要性的意义与方法.

3. 研究一元 n 次多项式的因式分解问题,实际上也就是研究一元 n 次方程的求根问题. 有的书上定义了多项式的根的概念，即对于复系数一元 n 次多项式 $f(x)$，若 $a\in C$，并且 $f(a)=0$，则把 a 叫做 $f(x)$在C 中的一个根. 因此，多项式$f(x)$的根也就是方程 $f(x)=0$ 的根.

4. 本大节配备了较多的习题,建议适当的时候安排习题课，选择部分习题作课内讲解,有些要求证明的命题获证后,可以明确向学生指出能作为定理运用.

例如总结教材中习题一的第 12, 13 两题，并参照习题二的第 4 题，可以概括地指出以下的性质:

(1) 如果多项式 $f(x)$各项系数和为 0，则$(x-1)\mid f(x)$;

(2) 如果 $f(x)$ 的奇次项系数和等于偶次项系数和，则$(x+1)\mid f(x)$;

(3) 如果多项式 $f(x)$各项系数同号,则 $f(x)$无正根;

(4) 如果多项式 $f(x)$的奇次项系数为正 (或负) 并且偶

次项系数(包括常数项 a_0)为负(或正),则 $f(x)$ 无负根.

在有理数集中分解因式时,常常用到这些性质.

5. 对于二项式 $x^n \pm a^n$ 能否被 $x \pm a$ 整除的问题,教材中安排了不少习题,如果条件允许,宜作一小结:

若 n 为自然数,则 $(x-a) \mid (x^n - a^n)$;

若 n 为偶数,则 $(x+a) \mid (x^n - a^n)$;

若 n 为奇数,则 $(x+a) \mid (x^n + a^n)$.

1.5 利用综合除法、因式定理来分解因式

1. 研究多项式的因式分解需要注意以下问题:

(1) 在不同的数集中可能有不同的分解形式. 例如

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 4 \\
&= (x^2-2)(x^2+2) && \text{(在有理数集中)} \\
&= (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^2+2) && \text{(在实数集中)} \\
&= (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}\,i)(x-\sqrt{2}\,i) && \text{(在复数集中)}
\end{aligned}
$$

(2) 在多项式的因式分解中,如果所得的分解形式仅相差一个非零的常数因子,则认为这些分解形式是相同的. 例如 $4x^2-1=(2x-1)(2x+1)$ 与 $4x^2-1=4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 可以看成同一种分解形式.

(3) 多项式因式分解是在多项式范围内的一种变形,也就是说,分解前的式子与分解后的各因式都应是多项式,并且分解前与分解后的式子对于 x 的任何相同的允许值,所得的值必须相等. 象 $x-1=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$ 这样,虽也是一种变形,但不是多项式的因式分解,因为等式右边的各因式已

不是多项式.

2. 关于因式分解，常常涉及到下面两个问题：

(1) 怎样判断一个多项式能否分解？或者说，不可分解的多项式呈什么形式？

(2) 如果一个多项式可以分解，应该怎样分解？

这两个问题的研究都超出了中学的范围，教材中只讲述对一些特殊多项式的分解方法，不可能在理论上作过深的探讨.

3. 在复数集中，上述第一个问题已由本小节的定理1给予确定的回答，即任何一个复系数一元n次多项式$f(x)$有且仅有n个一次因式$x-x_i(i=1, 2, \cdots, n)$，把其中相同的因式的积用幂表示后，$f(x)$就具有唯一确定的因式分解的形式. 这个定理不加证明，可以象教材中这一小节开始时那样结合实例说明，使学生正确理解定理1的意义. 但应指出，定理1并没有给出任何具体的法则，使我们能够通过系数的有限次代数运算把一个多项式分解因式.

学完本章中的高次方程以后，可以知道，在实数集中，任何次数大于或等于3的多项式在理论上都可分解为一次因式与二次因式的积. 就是说，实数集中除一次因式外，还可能有二次的不可分解的因式.

在有理数集中，情况比较复杂，不可分解的多项式没有确定的次数和形状. 本小节的定理2只解决了整系数一元多项式的一次有理因式的分解问题，但这也就从另一个方面为用逐次降幂的方式研究某些多项式的因式分解创造了条件.

4. 为了结合复数知识说明本小节定理1的推论的应用，

建议增讲以下例题:

例 求证多项式 $x^{3n}+x^{3m+1}+x^{3p+2}$ $(n, m, p\in N)$ 能被 x^2+x+1 整除.

证明: 因为

$$x^2+x+1=(x-\omega)(x-\varpi),$$

其中 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\varpi=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. 则由已学过的 ω 的性质知

$$\omega^3=\varpi^3=1,\quad \omega^2=\varpi,\quad \omega^2+\omega+1=0.$$

设 $f(x)=x^{3n}+x^{3m+1}+x^{3p+2}(n, m, p\in N)$, 则

$$\begin{aligned} f(\omega)&=(\omega^3)^n+(\omega^3)^m\cdot\omega+(\omega^3)^p\cdot\omega^2 \\ &=1+\omega+\omega^2=0, \end{aligned}$$

即

$$(x-\omega)\mid f(x).$$

同理可证

$$(x-\varpi)\mid f(x).$$

由定理1推论, 可知 $f(x)$ 能被 $(x-\omega)(x-\varpi)=x^2+x+1$ 整除.

5. 学习本小节的定理 2 及其推论, 并利用它们进行多项式因式分解时要指出:

(1) 任何一个有理系数多项式总可以化为整系数多项式与一个常数的商, 所以定理 2 只讨论整系数多项式.

(2) 定理 2 表明: 如果 $\left(x-\frac{q}{p}\right)\Big| f(x)$ (这里 p, q 互质, $f(x)$ 为整系数多项式), 那么 $p\mid a_n$ 且 $q\mid a_0$. 但并没有说, 如果 $p\mid a_n$ 且 $q\mid a_0$, 则 $\left(x-\frac{q}{p}\right)\Big| f(x)$. 也就是说, $p\mid a_n$ 且 $q\mid a_0$ 仅是

$\left(x-\frac{q}{p}\right) \Big| f(x)$的必要条件，而不是充分条件．这可以结合教材中的例题讲解清楚．

(3) 为了提高学生解题的能力，要结合已学过的知识，迅速判断某些一次因式是不是$f(x)$的因式．本书第1.4节“因式定理”中总结的几条性质，此处均可运用．

6．本小节只介绍了重因式的概念，不研究重因式的判断问题．学习导数以后，可以利用导数来判断．如果$x-a$是多项式$f(x)$的k重因式$(k>1)$，那么$x-a$一定是$f'(x)$的$k-1$重因式．

7．学过教材上的例2后，可向学生指出：如果$x-b$是$f(x)$的因式，由综合除法得商式$q(x)$后，$x-b$仍可能是$q(x)$的因式(这时$x-b$就是$f(x)$的重因式)．另一方面，如果$x-b$不是$f(x)$的因式，那么$x-b$也不可能是$f(x)$的任何一个因式$f_1(x)$的因式．

对于上述第二个结论，根据等式$f(x)=f_1(x)f_2(x)$用反证法很容易证得．假设$f_1(x)$有因式$x-b$，那么应有$f_1(x)=(x-b)h(x)$，于是应有$f(x)=(x-b)h(x)f_2(x)$，这说明$x-b$也是$f(x)$的因式．但这与已知矛盾．所以$x-b$不是$f_1(x)$的因式．

在试验整系数多项式的一次有理因式以及后面求高次方程的根时，常常要用到上面两个结论．

高斯(Gauss, 1777-1855年)于1799年首先证明了任何复系数一元n次方程在复数集C中至少有一个根（这个定理被称为代数基本定理）。同时也证明了任何实系数n($n>2$)次多项式都能表示成一次与二次[illegible]

二 高次方程

1. 系统复习已经学过的整式方程的基础知[illegible]

[illegible]

[illegible] $=b$与多项式[illegible]

[illegible]分解的唯一性

定理[illegible] 2，[illegible]

系数一元n次方程在复数集C中有且仅有[illegible]

本小节的三个[illegible]

[illegible]

特别是想证明每一个一元n次方程都有且仅有n个根，[illegible]

得解任意高次方程[illegible]部分分式

[illegible]，又提出了这样的问题：是不是任何大于二次的实系数多项式都能分解成线性因式或二次因式的积？复数集中又怎样呢？基于这样的背景，多项式因式分解的唯一性和一元n次方程的根的个数就成了人们研究的主要目标．德国数学家

高斯(Gauss, 1777-1855 年)于1799年首先证明了任何复系数一元 n 次方程在复数集 C 中至少有一个根（这个定理被称为代数基本定理），同时也证明了任何实系数 $n(n>2)$ 次多项式都能表示成一次与二次实系数因式的积，这是数学史上的一次重大突破。

本小节的定理 2 虽然告诉我们复系数一元 n 次方程 $f(x)=0$ 在复数集中有且仅有 n 个根，但并没有告诉我们求根的方法. 对于二次方程，我们已经找到了求根公式，对于更高次的方程是否也能找到类似的公式呢？即能否由方程的系数经过有限次加、减、乘、除以及开方的运算来表示出方程的根呢？除了一元三次、四次方程已经找到求根公式以外，挪威数学家阿贝尔(Abel, 1802-1829 年)于 1824 年首先证明了：当 $n>4$ 时，一般的一元 n 次方程不能用根式来求解.

4. 基于上述情况，本章教材就不可能解决高次方程的求解问题，实际上主要是运用第 1.5 节的定理 2 求整系数一元 n 次方程的有理根.

本小节的三个例题，基本上是本小节的三个定理和定理 3 的两个推论的应用. 教学时应注意试根的技巧，学会运用教材第1.4节“因式定理”中介绍的有关性质，以减少试根的盲目性.

5. 用集合符号表示重根时，要注意写法. 例如方程 $(x-4)(x+2)^2(x-5)^3=0$ 的解集为 $\{4, -2_{(2)}, 5_{(3)}\}$，而不能写成 $\{4, -2, -2, 5, 5, 5\}$. 因为对于一个给定的集合，集合中的元素已约定是互异的。

1.7 一元n次方程的根与系数的关系

1. 本小节内容是一元二次方程的根与系数关系的推广，可在复习一元二次方程的根与系数关系的基础上，启发学生独立探索，导出本小节的定理(即韦达定理)。

教学中可先引导学生利用二次三项式因式分解和本小节定理证明的方法来证明一元二次方程的根与系数的关系，以便推广到一般。

2. 为了帮助学生记住韦达定理，要强调说明公式左边各根的组合规律、公式右边各式的符号规律，并指明右边各式都有分母a_n.

3. 在韦达定理的证明中，用到以下事实：一元多项式相减的结果仍是一元多项式(见教材第2页)，两个相等的多项式相减，所得的差是一个零多项式．而零多项式的系数都是零。

4. 结合韦达定理的应用，可以简单介绍对称多项式的概念，这对解决某些问题是有利的。

给定某数集上的多元多项式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

如果任意交换其中二元$x_i, x_j(1\leqslant i, j\leqslant n)$的位置，多项式不变，那么$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$叫做$n$元对称多项式。

显然，韦达定理中所出现的多项式

$$\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

$$\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n,$$

$$\sigma_3=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n.$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma_n=x_1x_2\cdots x_n$$