HIT

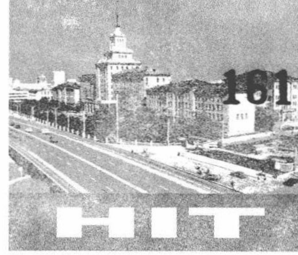
数学・统计学系列

Lobachevskiĭ Geometry and Geometric Foundations Synopsis

罗巴切夫斯基几何学及几何基础概要

[俄] 罗巴切夫斯基 [俄] 库图佐夫 著 本书编译组 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



数学·统计学系列

罗巴切夫斯基几何学及几何基础概要

Lobachevskiĭ Geometry and Geometric Foundations Synopsis

[俄] 罗巴切夫斯基 [俄] 库图佐夫 著

本书编译组 译

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

本书讲述罗巴切夫斯基几何学及几何基础概要，共为八章. 第一章与欧几里得公设等价的一些命题. 第二章关于罗巴切夫斯基几何的一些事实. 第三章在罗巴切夫斯基平面上的相互位置. 第四章罗巴切夫斯基几何的面积论. 第五章欧几里得《几何原本》概观. 第六章基本对象，基本对象间的基本关系及几何公理. 第七章几何体系的解释观念. 第八章公理的协和型和独立性. 同构.

本书适合大、中学师生及数学爱好者的使用和收藏.

图书在版编目(CIP)数据

罗巴切夫斯基几何学及几何基础概要/(俄罗斯)罗巴切夫斯基，(俄罗斯)库图佐夫著；《罗巴切夫斯基几何学及几何基础概要》编译组译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2012. 7

ISBN 978 - 7 - 5603 - 3636 - 7

Ⅰ. ①罗…　Ⅱ. ①罗…　②库…　③罗…　Ⅲ. ①罗巴切夫斯基几何

Ⅳ. ①O184

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 149465 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　杨万鑫
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 14.5　字数 267 千字
版　　次　2012 年 7 月第 1 版　2012 年 7 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978 - 7 - 5603 - 3636 - 7
定　　价　28.00 元

(如因印装质量问题影响阅读，我社负责调换)

目 录

绪论

只懂得一种本民族的语言而不和其他民族的语言相比较，就不能看出这种语言的特点，也不能说明并且清楚地了解这种语言的结构. 同样道理，只懂得一种欧几里得几何，也不能充分了解几何学的结构的特点. 几何学之所以能够提高到现代的观点，不过是在研究尼古拉·伊万诺维奇·罗巴切夫斯基(Nitolai Ivanvich Lobachevstiy，1792—1856) 所创立的非欧几何以后的事情. 熟悉这种几何学是研究几何基础的第一步.

“几何基础”是数学的一个分支，其中主要的是建立并探讨几何学的基本概念和公理，每一公理在几何学结构中的作用和地位以及某些公理用其他公理代替的可能性和这种代替之后的结果.

俄国天才数学家尼古拉·伊万诺维奇·罗巴切夫斯基在 1826 年创立新的，即后人称之为罗氏的非欧几何，在作为几何基础(一般的说，也是数学基础) 的对象问题的提法方面具有根本的意义.

由此可见，教师研究罗氏几何学和几何基础是非常重要的.

有了这两门科学的知识，我们就能更好地了解整个几何学的结构，就能善于抉择各种几何教材，从而避免在中学几何课的讲授中把它当做次序固定不移、连贯成串的定理的简单汇集.

以下简略地谈谈在罗巴切夫斯基以前几何学的发展情况.

古希腊数学家欧几里得(Euclid,约前330— 前275)的《几何原本》[12] 是流传至今的第一部系统的几何著作.本书第五章将详细的探讨这一著作,同时也研究一下这部名著的优缺点及其历史意义①.每一位教几何的教师最好都能熟悉欧几里得这部经过两千多年时间考验的名著.欧几里得也曾写过有关几何的其他论述,可惜大半散失,久已不传了.

生于叙拉库西(Gyracuse)的阿基米德(Archimedes,前287— 前217)在他的论文"论圆锥体、球和圆柱体"、"论螺线"、"论浮体"、"论力学中的一些定理"、"圆的度量"、"抛物线的求平积法"、"论劈锥曲面和扁球面"、"论平面图形的平衡和重心"等②中,测定各种复杂的物体、特别是用圆锥截线或其一部分来旋转的方法所得物体的弧长、面积和体积.阿基米德致力研究上述物体的浮沉的稳定性,并用几何方法确定它们的重心,而且反过来,利用力学的命题得出几何定理.阿基米德的著作,一直到今天,仍然是科学研究中密切联系实际的典范.

阿基米德所制定的计算曲线的面积、体积和长度的许多方法可以当作积分法的第一步.应该指出,阿基米德的研究是在欧几里得几何范围内的.

与此同时,彼尔加的阿波罗尼(Apollonius,约前260— 前190)制定了平面截圆锥的截痕曲线 —— 圆锥截线 —— 的理论.行星绕太阳运行的轨道就是沿着圆锥截线的(此限于初步的近似).炮弹质量中心的运动,若不计空气的阻力,也走的是一段圆锥截线.应该指出,阿波罗尼著作的内容不过是欧氏几何更进一步的深入罢了.

在15世纪以前,后起的几何学家所做的多半是对上述名家作品的注释,或者根据评述者的引文订正一些已经散失的作品的原文.

1543年出版的尼古拉·哥白尼(Nicolaus Copernicus,1473—1543)研究太阳系构造的《天体运行论》③一书,不仅解决而且提出了几何上的一系列的复杂

---

① 也可参考"莫斯科大学数学史讨论汇报","数学史研究"第一期,Гостехиздат,1948.

② 阿基米德沙石计算译文,Н·Н·波波夫(Попоз)教授的阿基米德著作概述和注释,"自然科学经典"ГТТИ,1932.

阿基米德、惠更斯、蓝姆伯特、勒让德,关于化圆为方问题,附本问题的历史,Ф·鲁吉奥(Рудио)编,С·Н·贝尔史钦(Бернштейн)翻译,校订和注释,"自然科学经典".ОНТИ,1936.

阿基米德、斯蒂芬、伽利略、帕斯卡液体静力学原理,А·Н·道尔果夫(Допгов)翻译与注释,"自然科学经典",ГТТИ,1932.

ИЛ·吉别尔哥(Гейбег),阿基米德新著,阿基米德给受拉托斯芬(Fratosthenes)关于力学上的一些理论的信,敖德萨,1909.

③ 尼古拉·哥白尼,"天体运行论"六册.

第一册前十章的译文收集在尼古拉·哥白尼逝世四百周年纪念文集中,校订人А·А·米海依洛夫(Михайлов),АН. СССР,1947.

的问题.

力学的奠基者之一、哥白尼事业的积极宣传普及者和继承者——伟大的伽利略·伽利来(Galileo Galilei,1564—1642),在他的作品中广泛地利用和发展了几何学[①].

圆锥截线经著名的天文学家约翰·开普勒(Johannes Kepler,1571—1630)之手而得到了新的应用和发展.开普勒扩大了几何学的范围,求出了当时科学上所谓新型物体的长度、面积和体积[②].

建筑师笛沙格(Desargues,1591—1661)和他的一位研究几何的学生帕斯卡(Pascal,1623—1662)——见帕斯卡所著《建立圆锥截线理论的经验》一书——奠定了透视理论和新综合几何学的基础,后来即发展成为所谓投影几何学.关于投影几何学的观念,本书不拟讲述.

1637年,出现了列尼·笛卡儿(René Descartes,1596—1650)的著作《几何学》[③].在这一部著作中提出了一种研究几何的新方法——坐标方法.虽然坐标方法通常放在"解析几何学"内叙述,但是这仅仅是研究和讲解几何的一种方法而已,不能认为是一种新的几何学.强而有力的笛卡儿方法可以适用于欧氏几何学,同样也可适用于别的几何学.例如,投影几何学或罗氏几何学.本书用一些篇幅来讲述坐标方法的观念(几何学的解析解释——见第七章).笛卡儿方法在力学、电动力学、光学和其他科学领域里起着很大的作用.物理学的发展对几何学的影响也很大.

对于力学和光学的目标来说,惠更斯(Huygens,1629—1695)在《关于光学的论文》[④]和包含一些极重要的力学定理的《摆钟》一书[⑤]中,以及在他的其

---

① 伽利略·伽利来,涉及两门新科学,属于力学和附有重心的各种物体运动的位置的谈话和数学的证明.C·H·道尔果夫从意大利文翻译,"自然科学经典",ГТТИ,1934.

伽利略·伽利来,关于两种主要宇宙系统(托勒密与哥白尼)对话.A·И·道尔果夫译自文,ГИТТЛ,1948.

正因为这部异常精彩而引人入胜的书,伽利略被人控告,遭受宗教裁判所的定罪.

另参考"伽利略·伽利来"(1564—1642)"逝世300周年纪念文集",AHCCCP.1943.

② 约翰·开普勒,酒桶的新型立体几何学,这些酒桶主要是奥国式的,因为要有最有利的形状,所以最适宜用三次曲线,补充以阿基米德立体几何.译自拉丁文"自然科学经典",ГТТИ,1935.

③ 列尼·笛卡儿,几何学,附弗尔玛的文选,笛卡儿抄写.A·П·尤史凯维奇(Юшкезич)翻译并注释."自然科学经典",ГТТИ,1938.

列尼·笛卡儿,关于方法论,附光线曲折学、气象、几何学,Г·Г·斯乐利尤沙列夫(Слюсарев)和尤史凯维奇译并校注,"科学经典",AH CCCP,1953.

④ 克力斯钦·惠更斯,在光学的一篇论文中解释为什么发生光的反射和折射现象,特别地,解释为什么冰岛的结晶体出现奇怪的折射现象,H·弗列得里克斯(Фредерикс)译"自然科学经典"OHTN,1935,另参看Φ·鲁吉奥编关于圆化方问题.

⑤ 克·惠更斯,力学的三项备忘录,K·K·包姆加尔特(Баумгарт)译注,"科学经典",AHCCCP,1951.

它论文中，创造了曲线化直方法，研究光波、计算面积与体积等特殊方法. 应该指出，从数学分析的观点来看，面积和体积大小的计算是同类的问题；任意曲线形面积的计算解决了力学和其他科学领域里的许多问题. 在微积分发现以前，这类问题是用纯几何方法解决的.

开普勒不用积分法计算了体积；新的几何方法是意大利几何学家邦纳文吐拉・卡瓦列里(Bonaventura Cavalieri，1598—1647)[①] 发现的.

牛顿(Newton，1643—1727) 的《自然哲学的数学原理》[②] 一书包括有力学的基本定律及其发展，以及引力天文学的一些原理，其中运用了几何的综合方法. 牛顿在他的光学著作《光学》和《光学讲义》[③] 中，不仅改进了几何方法，而且还解决了一系列新的、纯几何的问题. 几乎牛顿的全部著作，或多或少都与几何有关. 不过专门讲述几何的著作并没有多少. 现在我们只提一提他的《三阶曲线通论》[④]. 既然圆锥截线主要有三种类型，那么按牛顿的分法，三阶曲线应有 74 种. 牛顿并且根据这些曲线，与二阶曲线中的圆锥截线相仿，而给它们下了一个纯几何的定义.

从上面我们可以看出天文学、力学、光学同几何学的发展有多么密切的关系！ 微积分学对于研究力学上的运动是必要的，而微积分学的完成，则主要是牛顿和莱布尼茨.

德国的杰出哲学家、数学家、法学家和外交家哥特弗莱德・维廉・莱布尼茨(Gottfried Wilhelm Leibniz，1646—1716) 所发表的“关于无穷小分析” 一文，仍然蒙着几何的外壳，这一点和牛顿一样，虽然牛顿比较侧重于力学的观点. 莱布尼茨的主要数学著作所用的标题与众不同：“关于悬链曲线或伽利略提出的著名问题的解决”(1692). 这里所指的是均匀沉重而且易弯曲的线索在平衡状态下形成的形状问题. 伽利略曾经不正确地认为这样的线索是抛物线. 而莱布

---

① 邦・卡瓦列里，用连续性的不可分的新方法讲述几何学，译自拉丁文，“自然科学经典”，ГЛТТЛ，1940.

② 依・牛顿，自然哲学的数学原理，A・H・克雷洛夫(Крылов)院士译，克雷洛夫院士著作集，第七册，列宁格勒，1936.

③ 依・牛顿，光学或关于光的反射、折射、弯曲、颜色等论文，C・И・瓦维洛夫(Во-Валов)译自 1721 年的英文版，附注释，“自然科学经典”，ГИТ，1927.

依・牛顿，光学演讲集，C・И・瓦维洛夫译注并校订，“科学经典”AHCCCP，1946.

④ 依・牛顿，数学论文集；Д・Д・莫尔杜黑—保力托夫斯基(Мордухай-Ъоитозский)译自拉丁文，注释并作序，“自然科学经典”，OHTИ，1937.

依・牛顿，普遍的算术或关于算术的分析与综合的书，译自拉丁文，“科学经典”，AHCCCP，1948，“可化为方程式的几何的问题” 一章占了 142 页(自 102 页到 244 页).

依・牛顿(1643—1727)，诞生 300 周年纪念文集，C・И・瓦维洛夫院士主编，AHCCCP，1943.

牛顿传记写得最好的是 C・И・瓦维洛夫的依萨克・牛顿(1643—1727)，AHCCCP，1943，第二版，1945.

尼茨在这一著作中已经采用了下列各篇论文里他提到的微积分法："求极大极小和切线的新方法（分数和无理数都不是这种新方法的障碍），和这一方法的特殊计算法"（1684）、"关于高等几何和不可分以及无穷概念的分析"（1686）、"对切线角和接触点的性质以及它们在数学实践上比较简单的图形代替较复杂的图形的应用的'新探讨'"（1686）.①

最后，莱布尼茨给出了所谓"几何计算法"的梗概. 莱氏这种思想直到19世纪才获得进一步发展.

所谓"Брахистохрон 问题"—— 依照字义是"关于最短时间的曲线"问题 —— 对数学分析的发展具有重大的意义.

卓越的数学家、莱布尼茨的后继者约翰·伯努利(John Bernoulli, 1667—1748) 在1696年的数学杂志上发表的一篇题为"请数学家们解决的一个新问题"的短文中曾提出"最短时间的曲线问题".

"在垂直平面上已知两点 A,B（图1），试决定一条 AMB，使得只受重力影响的物体 M 以最短时间自点 A 开始沿这条路线下落"②.

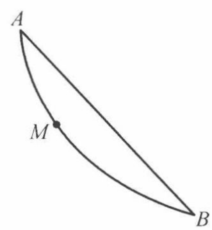


图 1

这个问题给变分法奠定了基础，而解决这一问题的则是莱布尼茨、牛顿、约翰·伯努利、雅各·伯努利(Jacob Bernoulli) 以及洛必达.(Guillaaume Francois de L′Hopital, 1661—1704). 曲线 AMB 原来是一条摆线. 提出这个问题的伽利略却错误地认为曲线 AMB 是一圆弧.

著名的法国数学家，伯努利的学生古利亚姆·佛兰逊·洛必达出版了第一本微分法教程③. 这本教程的内容是同几何分不开的. 其中已讲到平面曲线的微分几何学.

1729年 A·C·克莱罗(Alexis Claude Clairaut, 1713—1765) 向巴黎科学院提出"关于双重曲率曲线的研究"报告，从此奠定了空间曲线的微分几何基础. 特别是，克莱罗曾致力于行星图理论方面的某些高深问题的研究④. 但是这些行星图方面的问题直到20世纪才被 A·M·李雅普诺夫(Alexandr Mihailovic Ljapunov, 1857—1918) 予以解决. 就上述问题本身的提法来看，大部分是带有

① 莱布尼茨著作选集，А. И. 尤史凯维奇编译，"数学进展"，卷3，第一期(23)，1948.

② 约翰·伯努利，力学论文选，译自拉丁文译，"自然科学经典"，ОНТИ，1937.

③ 古·佛·洛必达，无穷小分析，译自拉丁文，А. П. 尤史凯维奇校订并作序."自然科学经典"，ГТТИ，1935.

④ A·C·克来罗，根据静水力学原理的地形理论. H·C·雅浩恩托夫(Яхонтов) 译，H·И·伊结利孙(Иделвсон) 注释校订，"科学经典"，АНСССР，1947.

几何性质的. 克莱罗关于天文学方面的两篇论文,先后在1751年和1762年获得了彼得堡科学院的奖金. 在第二篇论文里克莱罗确定了哈雷彗星行经近日点的时刻误差只有19天. 这颗彗星的周期大约是75年多. 在它沿着圆锥截线运行当中经常遭受许多行星的干扰. 虽然如此,终于把这颗彗星高度准确地计算出来. 在这一点上,当时获得高度发展的几何学起了很大的作用.

伟大的科学家,俄国的院士莱昂纳多·欧拉(Leonard Euler,1707—1783)在他成效卓著的科学研究工作中对几何也很注意. 1760 年他写过一篇奠定了曲面理论基础研究的报告 ——“关于曲面的曲率的研究”. 在空间曲线理论方面,欧拉也进行过出色的研究. 在物理 — 数学科学领域中,包括造船学在内,似乎处处都留下了这位天才科学家的许多奇迹①. 他的名字将永远与数学科学联系在一起. 欧拉逝世之后,当时的人们举行了最隆重的仪式表示哀悼. 康道尔斯所著《欧拉传》在叙述 1783 ~ 1784 年追悼欧拉的盛典时写道:“于是,本世纪之初仍然被人们看作野蛮人的民族,如今却给文明的欧洲树立了一个榜样 —— 这个民族的伟大人物生者荣而死者哀;在这方面,其他民族不能不感到惭愧,他们不但没办法超过俄罗斯,甚至也不能追随他的后尘”.

欧拉是俄国数学学派和俄国数学教学参考文献的奠基者. 而且他的著作在满足俄国的实际要求方面也有很大的意义;我们只要回想一下他在造船事业、制图术、天文学和力学等方面的著述就可以知道了.

特别值得提起的是欧拉推导出著名的流体力学的方程和支持在一点上的刚体运动的方程. 不管是在欧拉或者稍迟一点的科学家们的工作中,几何学都起着重大的作用.

和欧拉同时的法国《大百科全书》编辑人和数学家让·达朗贝尔(Jean le Rond D'Alembert,1717—1783)在他的一篇著名论文“动力学”(1743)②中,利用他那久已广泛流传的“达朗贝尔原理”,提出一种把复杂的动力学问题归结为

---

① 莱昂纳多·欧拉(1707—1783),逝世 150 周年纪念文集和资料集,科学与技术历史研究汇报,第Ⅱ集,第 1 期 AH CCCP,1947.

欧拉 —— 按照那时一般的学者那样 —— 除了少数的例外,他是用拉丁文写文章的. 现在他的许多作品都被翻译出来. 例如:

莱昂纳多·欧拉,无穷小分析引论,第一册,E·Л·帕查诺夫斯基(Падановскй)译自拉丁文,С·Я·卢列(Лурьѐ)教授校,作序并注释. “自然科学经典”,OHTN,1936.

“具有极大极小性质的曲线的求法,或者在最广的意义下等周问题的解法”,国王教授和彼得堡皇家科学院委员莱昂纳多·欧拉著,“自然科学经典”,ГГИИ,1934.

莱昂纳多·欧拉,质点的动力学基础,译自拉丁文,“自然科学经典”,OHTИ,1938.

莱昂纳多·欧拉,微分学,译自拉丁文,ГИГГЛ,1949.

② 让·达朗贝尔,动力学,把物体的平衡和运动化归为可能小的数并用新的方法证明的论文. 在这篇论文里叙述关于任意形状的物体相互作用时的一般规则. В·П·叶乌尔新(Егоршин)译自法文并注,“自然科学经典”ГИТТИЛ,1950.

简单的静力学问题以解决动力学问题的方法，这样一来就为几何学在动力学方面的应用上开辟了广阔的道路.

《解析力学》的作者、18世纪最杰出的数学家之一约瑟夫·路易·拉格朗日(Joseph Louis Lagrange，1736—1813)，虽说表面上用坐标方法而不用"任何图形"，但是他却到处应用几何学[①].

与此相反，在法国杰出的数学家路易·普安索(Louis Poinsot，1777—1859)的著作中占优势的是纯几何的方法. 他的《静力学原理》(1804)[②]是用直到今天还在静力学教程里讲的微向量的方式讲述的.

伟大的俄国力学家"俄罗斯航空之父"、优秀的几何学家尼古拉·叶果洛维奇·茹可夫斯基(Nikolai Egorovich Zhukovskiǐ，1847—1921)在一篇题为"关于理论力学中的几何解释的意义"的演讲中指出："力学在最初的发展阶段上只依靠几何的方法. 阿基米德、伽利略、惠更斯对力学的研究 —— 也是带有几何性质的. 牛顿的《自然哲学的原理》的全部叙述系统是纯几何的 ……，但是在笛卡儿提出以坐标轴表示空间运动的三种方向以后，莱布尼茨和牛顿所发现的无穷小分析就被普遍地采用了；在理论力学的研究中，解析方法越来越占优势，而这种方法在拉格朗日和他的后继者们的著作中都已发展到高峰".

其次，茹可夫斯基在以具体实例说明几何学对力学的重要作用时补充说："我为研究的几何方法的优点辩护时还丝毫没有涉及它的独特性 ……，但是解答问题的最后加工，是永远属于几何学的. 几何学家永远是创造已建成的建筑物最后形象的艺术家."

茹可夫斯基在谈到几何方法在教育学上的意义时并引证了自己多年的教学经验，他说道："如果说某些公式或所学的某种置换方法容易记住的话，那么它们也同样会很快地从记忆中完全消失. 但是学生如果熟悉了所研究的现象的几何图形，便会经久不忘，永远活在自己的回忆里 ……"[③].

加斯巴尔·蒙日(Gaspard Monge，1746—1818)，在他的《分析在几何学上的应用》著作中，继承并且大大地推进了欧拉所创始的曲面的一般性质的研究. 同时蒙日又创立了在机器制造和其他技术领域内有着重大意义的"画法几

① 约·拉格朗日，"解析力学"，第一册，第二册，译自法文."自然科学经典"，ГИТТИ，1950. "约瑟夫·路易·拉格朗日(1736—1936)"诞生200周年纪念文集，АН СССР，1937.

② 路易·普安索，静力学原理，译自法文，НТИ，1920.

③ Н·Е·茹可夫斯基教授，著作全集，第Ⅸ卷，ОНТИ，1937.

何学”①.

1803年拉扎尔·卡诺(Lazare Carnot,1753—1823)发表了“位置几何学”.1806年又发表了“截线的初步研究”.这两篇文章虽然没有超出欧氏几何的范围,但是却和笛沙格与帕斯卡的著作一样,已成为投影几何的先声.

卡尔·弗莱德里希·高斯(Carl Friedrich Gauss,1777—1855)于1827年出版《关于曲面的一般研究》②.这篇著作是几何学上的重要贡献,它对几何学的发展有过很大的的影响.

我们可以看到,在罗巴切夫斯基以前,几何学及其应用已获得相当高度的发展.但是几何学所涉及的材料,不管它有多么复杂,那些构成几何大厦的基本命题和公理,始终是欧几里得式的.在罗氏以前,所涉及的是已经高度发展了的欧氏几何学.例如,“画法几何”只是一种方法,而不是一种新的几何学;“解析几何学”只不过是一种坐标方法.但是面目一新,与旧的欧氏几何有根本不同的新几何学创始者,当推尼古拉·伊万诺维奇·罗巴切夫斯基.罗氏独自走过了在他以前欧氏几何所经历的全部道路而建立起自己的非欧几何学.本书只讲罗氏非欧几何学的初等部分,包括罗氏三角概要.罗氏以自己的几何创作,在几何学以及一般数学的发展上完成了一个极为重要而巨大的革命性的跃进.本书也要阐明罗氏的思想以及在罗氏著作影响下所发生的种种思想.

罗氏的伟大创造是以平行线论的研究为基础的.这项研究工作导源于阐明欧氏平行公理的意义.欧几里得《几何原本》的评论家们特别注意的就是平行线论和所谓欧氏第五公设:“如有二直线与第三直线相交,而且截线同侧的二内角和小于二直角时,则此二直线经充分延长后,必在截线所成二内角之和小于二直角的一侧相交”.

某些版本把这一公设列为“第十一公理”.

在这里,同许多旧版书上的一样,“充分延长”这句话是多余的.直线不能延长,直线段才可以延长.

当时,人们除对第五公设否认明显外,其他公设则完全认为是明显的.有人就企图用其他公理来证明这一公设.但是一些几何学家们在试证把第五公设改为定理的道路上,都遭遇了似乎难以克服的困难.他们想规避这一公设而代以另一比较明显的公设.在这条道路上许多可以代替欧氏公设的命题被制定出

---

① 加斯巴尔·蒙日,分析在几何学上的应用,译自法文,“自然科学经典”,ОНТИ 1936.

加斯巴尔·蒙日,画法几何学,В·Ф·计结(Газе)译,Д·И·卡尔金(Карявв)校注,“自然科学经典”,АН СССР,1947.

“加斯巴尔·蒙日(1746—1946)”,诞生200周年纪念文集,В·И·斯米尔诺夫(Смирнов)院士编,АН СССР,1947.

② 卡·弗·高斯,关于曲面的一般研究,М·М·菲力波夫(Филиппов)译自拉丁文.

来.

通常在任何虚伪的证明一种公设的背后,往往以隐蔽的形式依据了与这个公设等价的命题.本书第一章将详细地研究某些几何学家所提出的这类命题.我们对于这些命题应该特别注意,因为它们在今后讲述的罗氏几何学中起着极其重要的作用.而且,这些命题本身也是饶有兴趣的,可以把它们作为课外小组研究的极好题材.在详细说明问题的提法的条件下,也可以把那些最简单的命题拿到课堂上来讨论.

数学家萨谢利(Saccheri,1667—1733)在"澄清一切污点的欧几里得,建立全部几何学的初步基础的尝试"(米兰,1733)一文中所探讨的问题,在试证第五公设的历史上占有重要的地位.萨氏研究了二底角各为直角且二腰相等的四边形.其余二角互等,并且可以是直角、钝角或锐角.关于这三种情形他事先不肯定哪一种成立.经过深入推究之后才认定"钝角假设"是矛盾的;其次,按照他的想法,认为"锐角假设"也有矛盾.最后在萨氏看来,只有剩下的"直角假设"正确.根据直角假设也就逻辑地推出第五公设.

这里顺便说一句,在本书第一章里叙述了萨氏所获得的主要结果,同时也特别说明了他作出结论的错误.

萨氏曾用下面的话说明他所采用的归谬法的特征:"即使预先假定我们所要证明的命题是错误的,但是最后我们终于能够作出它是正确的结论来".

兰伯特(Lambert,1728—1777)是萨氏试证第五公设的后继者.兰氏在他的"平行线论"中以具有三直角的四边形出发.关于第四角,他提出了与萨氏类似的假设,因而他也像萨氏一样,正确地证明了"钝角假设"的矛盾.关于"锐角假设",他没有重蹈萨氏的错误;虽然经过一番更深入的探讨,但是没能作出什么肯定的结论.不过他二人的著作在罗巴切夫斯基的著作被公认以后才引起世人的注意;在这以前,几乎没人知道.

19 世纪初,勒让德(Legendre,1752—1833)的作品最负声望.勒氏的平行线论以及平行线与三角形内角和的关系的研究,从 1794 年以后开始在他所著的《几何学概要》教科书中发表.

罗巴切夫斯基在 1823 年的《几何学》原稿中也曾研究过三角形内角和定理[17].关于这一著作的内容将在本书第一章内讲述,罗氏在世时,此书未得出版.勒让德 — 萨谢利关于三角形内角和,定理完全可以在中学几何里讲授.

两千多年来试证第五公设的一切企图是失败了.许多数学家如拉普拉斯(Laplace,1749—1827)、拉格朗日、高斯以及俄国的数学家奥斯特洛格拉德斯基(Ostrogradskiĭ,1801—1862)、布尼亚科夫斯基(Bunjakovskiĭ,1804—1889)等人都作过平行线论的研究,但是他们在这个理论的困难面前都退却了.例如,有一次拉格朗日在巴黎科学院作平行线的报告时,忽然打断了话头,说了一句

"我还需要再想想."之后,随即退席!

罗巴切夫斯基以他自己在几何学上的创造解决了这个难题,并从而为几何学以及数学科学开辟了新的道路[18],[19],[20].

新几何的创始者尼古拉·伊万诺维奇·罗巴切夫斯基是我们的光荣和骄傲.1792年旧历11月20日①,他出生于诺夫哥罗得,亦即现在的高尔基城②.

罗巴切夫斯基的父亲——伊万·马克西蒙维奇——去世很早,只有他母亲——普拉斯柯娃娅·亚历山大洛夫娜——独自照顾三个儿子的教育,后来普拉斯柯娃娅·亚历山大洛夫娜带了她的孩子到喀山,以便他们读中学.喀山中学理事会议簿中至今还保存着1802年11月5日关于同意罗氏兄弟享受官费待遇的记录.

罗巴切夫斯基读完中学和大学,就留在喀山大学作教员,后来升为教授,他一生都在喀山大学.1817年7月14日,"关于喀山大学教授人员有如下变动:授予伊万·西蒙诺夫和尼古拉·罗巴切夫斯基以教授称号."罗巴切夫斯基教授在大学里开过纯数学原理、高等数学、力学、物理学、天文学等课程.

1826年2月6日,罗巴切夫斯基在喀山大学数学—物理系提出了用法文写的论文"几何学原理简述及平行线定理的严格证明".人们就把这一天公认为新几何的诞生日.1827年7月30日,罗巴切夫斯基被选任喀山大学校长.在这一任的工作岗位上,他一直连任到1846年.

1828年7月5日,罗巴切夫斯基校长在喀山大学一次隆重的大会上发表了"关于社会教育的对象"的演说.这个演说首先阐明了教育的作用.

"我常设想,那种与世隔绝而放任天赋的本性而自由发展的人究竟应该有什么样的处境.其次,我又想到近代教育所培养出来的人,他们能以高深的知识缔造祖国的荣誉和光荣……".

"……愚昧无知是最能阻碍生活巨流的;它能使生活沿着一条死气沉沉的道路从摇篮一直走向坟墓"."……但是,如果由于不正义的事件而使你们的存在形成他人的沉重的负担,或者当你们智力已经衰退而麻木不仁的时候,那么你们也不会享受到生活的幸福.在这种情况下,人性泯没了,诗的美妙已同你们无缘,建筑艺术的幽美和壮观已不复存在,历代的历史也就弃置不顾了.不过,我常引以自慰的是,我们的大学永远不会造就出这种性如草木的人来.即使不幸天生有这种人,我们也绝不容许他们进入我们的学校.让我再说一遍,绝不容

---

① Н·И·罗巴切夫斯基传材料的收集人和编辑人是Л·Ъ·莫得札里夫斯基(Моизаиевский).苏联科学院历史学会汇报,总编辑人.С·И·瓦维洛夫院士,АНСССР,1948.又,上面所述资料按原书系指旧俄历而言.

② 诺夫哥罗得始建于1221年,1932年改名为高尔基城,1990年恢复原名——编校注.

许这种人进来，因为我们这里还有着对光荣的热爱，有着荣誉感和内心的尊严.”“…… 我们一定要珍惜生命，只要它没有失去自己存在的价值. 让历史上的范例，让荣誉的真实概念和少年时代培养起来的对祖国的热爱及早给我们的热情指出一个崇高的方向，给我们一种能够战胜死亡的力量吧！”

1829 年，《喀山通报》第一次登载罗巴切夫斯基的几何学著述 ——“关于几何学原理”. 此后他发表了大量关于罗氏几何学的发展、数学分析和高等代数等方面的文章. 罗巴切夫斯基去世前不久，在双目失明的情况下，还发表了最后的作品《泛几何学》. 1856 年旧俄历 2 月 12 日，这位伟大的几何学家逝世了. 罗巴切夫斯基在世时，他的几何思想没有被人了解和重视，相反的却常常惹起他人的讪笑.

当时只是某些个别的学者对罗巴切夫斯基的思想有过正确的了解. 例如 1842 年喀山大学数学教授 Л・И・柯切里尼科夫(Коелъников) 曾指出：“千余年来妄想在数学上证明几何学的基本定理之一 —— 三角形的内角和等于二直角 —— 的尝试促使我校值得尊敬的功勋教授罗巴切夫斯基先生决心完成一部惊人的著作，亦即根据三角形的内角和小于二直角这一新的命题创立一门完整的几何学. 这部书迟早会有它的赏识者的 ……”①.

1893 年，隆重地纪念了这位举世闻名的科学家的一百周年诞辰. Д・И・门捷列夫(Менделеев) 给喀山大学的贺电中写道：“几何学的知识是一切精确科学的基础，而罗巴切夫斯基几何学的独到处却是俄罗斯科学独立发展的曙光. 为了人民的收获，科学的禾苗一定会成长壮大！”

杰出的法国数学家丹聂尔把罗巴切夫斯基比作发现新大陆的哥伦布. 英国数学家克利福德(Clifford，1845—1879) 和西尔维斯特(Sylvester，1814—1897) 称罗巴切夫斯基为“几何学中之哥白尼”. 因为地球旋转总比减少三角形的内角和、比使平行线相聚和把垂直于一直线的二垂线分散要容易得多！”

1896 年 9 月 1 日，喀山大学对面，树立起人类最伟大的几何学家、为俄罗斯科学界争取了无上光荣的罗巴切夫斯基的纪念碑.

1832 年，匈牙利天才数学家约翰・鲍耶(Janos Bolyai，1802—1860) 发表了自己的有名著作. 他也独立地获得了与罗氏非欧几何相同的基本结果[5].

著名德国数学家高斯死后，在他的札记和信件中发现一些定理和按语，从这里可以很清楚地看出高斯也获得过和罗巴切夫斯基以及和鲍耶相同的结果. 但是高斯并没有把他的非欧几何学思想发表.

本书第一、二、三章讲述几何学概要. 这几章和勒让德－萨谢利定理一起可

---

① 参考 З・И・黑里凯维奇(Хилъкезищ) 的论文，在 19 世纪 60 ～ 70 年代里罗巴切夫斯基思想的发展及传播历史. 数学史研究，第二期，ГИТТЛ，1949.