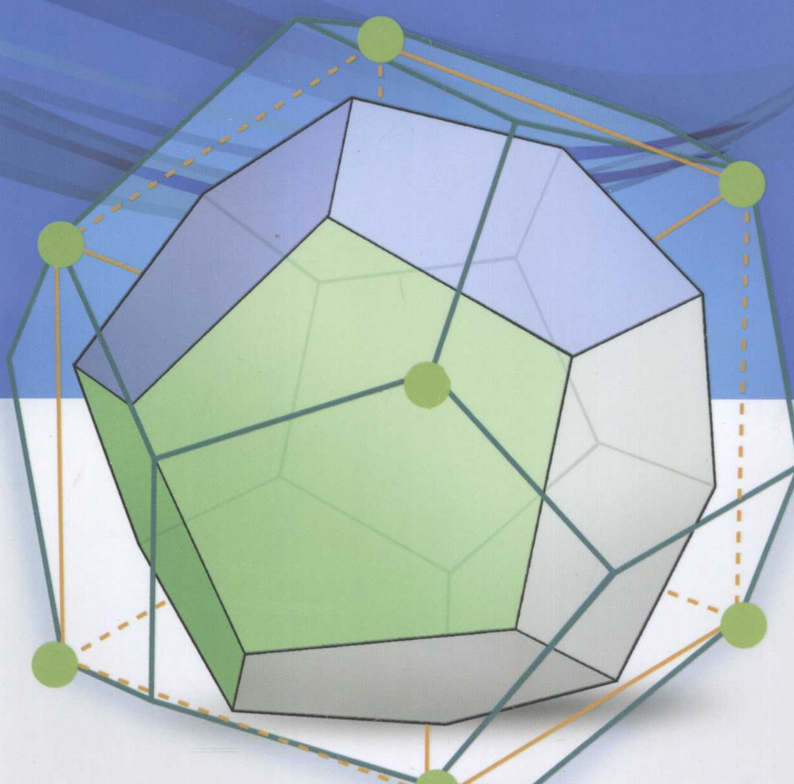
中创软件丛书

离散最优化算法

刘振宏　马绍汉　编著

Discrete Optimization Algorithms



科学出版社

中创软件丛书

离散最优化算法

刘振宏　马绍汉　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

最优化算法是20世纪中叶发展起来的一门学科，既有久远的历史渊源，又有广阔的应用前景。在计算机时代，最优化算法更呈现出异彩纷呈的发展态势。本书共八章，前四章介绍最优化算法的经典内容，后四章包含了最优化算法近年来的发展，如逆最优化问题和近似算法。书中还讲述了作者在组合优化领域所做的创造性的工作。为便于消化和理解书中的内容，每章末附有习题和参考文献。

本书可作为高等院校运筹学与控制论、计算机应用、系统工程等学科的高年级本科生、研究生的教材，也可供从事这方面工作的科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

离散最优化算法/刘振宏，马绍汉编著.—北京：科学出版社，2012
(中创软件丛书)

ISBN 978-7-03-035949-0

Ⅰ.①离… Ⅱ.①刘… ②马… Ⅲ.①离散优化-最优化算法
Ⅳ.①TB11 ②O242.23

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第260585号

责任编辑：鞠丽娜 / 责任校对：刘玉靖
责任印制：吕春珉 / 封面设计：三函设计

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012年11月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2012年11月第一次印刷 印张：15 1/4
字数：340 000

定价：45.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉)
销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62138978-8002

前　言

本书的目的是向广大读者介绍离散最优化的若干算法。算法是计算机能够理解的语言，它是由有限个规则组成的有限长的序列。每个规则对应于一个或多个明确的不含歧义的操作。当作用于按问题要求输入的有关数据后，则输出问题的解，或者对此输入无解。算法是对问题而言的，是用于求解问题的。因此，不同类型的问题就有不同的算法，即使同一个问题也可能有不同的算法。本书介绍最优化问题的算法，因为最优化问题是人们普遍关注的。事实上，人们做任何事情总是力争得到最好的结果，因为它就是人们追求的“目标”。为什么要力争呢？这就意味着要达到理想的结果不是简单事情，是会受到各种“条件限制的”。如果用数学符号（F，c）表示最优化问题的一个实例，其中 F 表示该实例的可行解之集合，即它是由“条件限制”所确定的，而 c 称之为目标函数，是人们所追求的目标。求解（F，c）就是寻求一个 $f\in F$，使得对一切的 $y\in F$ 有 $c(f)\leqslant c(y)$（最小化），或者 $c(f)\geqslant c(y)$（最大化）。最优化问题就是由其所有实例组成的，这里问题和问题的实例是不同的。在实例里，它的输入数据已给定，并且有足够的信息去得到其解；而问题是实例的总体，且这些实例又是按类似的方法产生的。

例如货郎问题（TSP）。TSP 的一个实例是给定正整数 n 和 n 个城市中每两个城市 i 和 j 之间的距离 d_{ij}，其中 $d_{ij}\geqslant 0$，$1\leqslant i$，$j\leqslant n$。目的是从一个城市出发，经过每一个城市一次且仅一次回到出发点，找出所经过的路程最短的一条闭路。这里

$$F=\{n\text{ 个城市的所有的圆排列}\}$$

设 $\pi\in F$ 是一个圆排列，$\pi(j)$ 表示从第 j 个城市直接到第 $\pi(j)$ 城市，因此圆排列对应的闭路长度为 $\sum\limits_{j=1}^{n} d_{j,\pi(j)}=c(\pi)$，目的求 $\min\limits_{\pi\in F} c(\pi)$。因此，当 n 或 d_{ij} 的取值不同就会产生不同的实例，从而最优化问题 TSP 就是由这些实例组成的。

又如非线性规划问题。给定正整数 n 和 m，以及实函数 $c(x)$ 和 $g_i(x)\geqslant 0$，其中 $x\in R^n$，$i=1$，2，…，m。

设 $F=\{x\in R^n \mid g_i(x)\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m\}$，那么

$$\min\{c(x) \mid x\in F\}$$

就是非线性规划的一个实例（F，c）。当 g_i，c，n 和 m 变化时，就会产生不同的实例。这些实例的总体称之为非线性规划问题。我们把 F 称为实例的可行解集合，c 称之为目标函数。

如果一个最优化问题，它的实例（F，c）的可行解要求取离散值，那么这个最优化问题称之为离散的。例如最优化问题 TSP 是离散最优化问题。本书只讨论离散最优化问题的算法。

一个算法 A 是称为解最优化问题（P）的，如果把算法 A 用到（P）的每一个实例上，则都能得到正确的答案。对于一个最优化问题，要给它设计一个算法并非是一件容

易的事情，除了对问题本身要有深入的理解和丰富的算法知识外，还要具备坚实的数学基础，特别是要设计出一个好算法更不是一件容易的事。

一个算法的好坏标准是什么？这是用算法复杂性来度量的。算法复杂性一般包含两个方面：时间复杂性和空间复杂性。本书只讨论时间复杂性，而且用算法所需的初等运算总次数的数量级取代时间复杂性。

算法总是对问题而言的，不同类型的问题就有不同的算法，因此，要讲算法就必须先确定选择哪些类型的问题。通过与中创软件丛书编委会讨论后确定本书以具有广泛应用性的离散的最优化问题为背景介绍它们的一些算法，然后从算法的计算复杂性角度介绍 NP-完全性的理论和结果，最后用已介绍过的算法以及随机算法等给出求某些 NP-难问题的近似解。具体内容安排如下：

第一章是线性规划。它是具有线性约束条件和线性目标函数的最优化问题，应用极为广泛，并且是生产管理、生产计划和交通运输中不可缺少的工具。由于线性规划模型具有良好的性质，所以其算法比较成熟。本章着重介绍了线性规划的单纯形算法、对偶单纯形算法以及原始-对偶算法，同时，为说明线性规划问题是多项式时间可解的，特别介绍了其椭球算法。

第二章是整数线性规划。它是线性规划中某些或全部变量取整数值的最优化问题。若干离散最优化问题都可以用整数线性规划描述。对一般整数线性规划而言，目前还没有什么好算法。本章所介绍的算法仅对变量个数较少的整数线性规划问题，当变量个数较多时，这些算法所耗用的时间是不可接受的，实际上这个问题是属于 NP-难的。

第三章是网络规划。它是一类特殊的线性规划，并称之为网络规划，这一类规划有两个显著的特点：首先它是以网络为背景的线性规划，因此具有整数最优解的特性；其次这类特殊的线性规划可以利用网络结构给出一些简单而有效的算法。它有较广泛的应用领域，特别是在物流业、交通业和作业计划等方面更是不可缺少的。由于网络规划的方法直观简单，所以备受人们重视。这一章主要介绍了网络中的最短路算法、最大流算法以及最小费用流算法等。

第四章是树与拟阵。从网络图中的树形结构出发，引出了一个抽象的代数系统，称之为拟阵，然后讨论了拟阵中两个最优化问题：最优独立集与最优交，并分别研究了它们的性质，给出了求解方法。拟阵的最大权独立集和最大权交都可以描述为线性规划问题，但它们的约束不等式的数目非常之多，不适宜于用一般线性规划方法求解。这里作者给出了求一个拟阵的最大权独立集的贪心算法和两个拟阵的最大权交的交错链算法。

第五章是动态规划。本章不是全面地介绍动态规划的各种模型及其解法，而只是对一些离散的确定性的最优化问题，讲解如何把它们转化为动态规划的模型，然后用动态规划的思想方法去求解。为了使读者能掌握这种方法，并利用它解决更多的离散优化问题，作者列举了若干不同类型动态规划模型，并对各种不同的模型给出具体算法。能用动态规划方法求解的最优化问题应具有两个特征：适宜子结构和重叠子问题。适宜子结构是指问题的最优解包含在其某些子问题的最优解里，因此，通过求解一系列子问题的最优解就可得到问题的最优解。所谓重叠子问题是指这些子问题不是相互独立的，每一个子问题求解一次，然后把其解存储起来以备后面计算时重复使用，因此，这些重叠的

子问题数目不能太多。由此可见，用动态规划来解一个最优化问题，首先要刻画它的最优解的结构，只有具备了适宜子结构，才可能用动态规划方法求解。这一章主要通过若干典型的实例让读者掌握如何用动态规划的方法去解决某些最优化问题。

第六章是逆最优化问题。这是 20 世纪 90 年代中期提出并发展起来的。给定最优化问题的一个实例，它的最优解取决于其目标函数和约束条件中给定的参数值，也就是说，当给定这些参数值后，求其最优解。这个实例的逆定义为：给定该实例的一个可行解，如何尽可能小地改变这些参数的值，使之在改变之后的参数值下，使这个可行解成为最优解。一个最优化问题的逆最优化问题就是这个最优化问题的所有实例的逆之集合。本章只讨论某些离散最优化问题的逆问题，而且只限于讨论目标函数中的参数变化，约束条件中的参数值保持不变，这样一来，逆问题就会简单一些。

虽然逆最优化的历史只有十几年的时间，但已显露出其理论意义和潜在的应用价值。由于本书内容所限，这里不可能较全面地介绍逆最优化的研究成果，有兴趣的读者可参阅有关文献。

第七章讨论了算法、复杂性与 NP-完全性理论。它在本书中起着承前启后的作用，是从事算法研究者必须掌握的基础知识。本章用较大的篇幅介绍了若干 NP-完全性问题的证明技术，目的是向读者展示常用的一种方法：如何把一个未解决的问题变换为一个已解决的问题，从而使未解决的问题得到解决，同时指出了对 NP-难问题进行研究的思路。这一章理论性强且概念也比较多，非数学专业的读者也可以跳过此章。

第八章介绍了近似算法及其分类。本章中某些算法在前几章已见过，但在这章却以近似算法出现。本章的内容源于 20 世纪 70 年代中期，即 NP-完全理论出现以后，但现在仍然是一个热门研究课题。在这一章里作者把近似算法按其性能比进行分类，然后将 NP-难问题按类似方式进行分类，这样一来对问题的分类更加细腻，对问题的难度也刻画得更为精细。

本书中每一章末均附有相关的参考文献和习题供读者查阅和练习。

本书的内容非常广泛，涉及多个科学分支。实际上，每一章的内容都可以扩充为厚厚的一本书，要把这几本厚厚的书之内容概括为这样一本书，实在不是一件容易的事情。本书是在我们二十多年教学实践的基础上完成的，大部分内容已在中科院研究生院和山东大学等讲授过，听课学生来自于十几个专业，如计算机应用、计算机软件、自动化、密码学、运筹学、管理科学、系统工程、计算数学、信号与信息处理等。此外，本书可供高等院校理工科高年级学生和研究生参考，也可供有关生产管理人员和研究人员以及工程技术人员参考。

本书承蒙中创软件丛书基金资助，由科学出版社出版，在此深表感谢。在本书出版过程中，董韫美院士、卢开澄教授对本书提出了若干宝贵意见，赵振江博士参与了书稿的审校工作，作者在此一并表示感谢！

由于水平所限，书中难免出现疏漏、欠妥之处，敬请读者批评指证。

作　者

2012 年 6 月

目　录

第一章　线性规划

线性规划是运筹学的重要分支之一，诞生于第二次世界大战期间，并在战后得到了迅速发展。它的应用范围极为广泛。从农业的作物轮作计划到大规模的军事行动计划，从港口间的船艇运行路线到物流的分配，研究者们把这些似乎无关的问题，统一到同一个数学框架——线性规划。G. B. Dantzig 于 1963 年对其给出了简捷的求解方法——单纯形方法。

实际上，20 世纪 30 年代中期，苏联的数学家康特洛维奇已在生产组织和计划中提出了一些数学方法，其中就含有线性规划模型，并给出了其求解线性规划的一个方法，称之为解乘数法。尽管解乘数法在理论上和应用上都没有单纯形算法好，但他是首先用线性规划去解决实际生产问题的人之一。他在 1939 年的著作《生产组织与计划中的数学方法》中讲述了九个应用问题。

由于高速电子计算机的出现，线性规划的应用越来越广泛。人们发现，对于某些特殊的线性规划实例，单纯形算法的迭代步数随变量个数的增加而以指数的速度增长。因此，从理论上看，单纯形算法所能求解的线性规划，其变量个数不能太多。由此引起了对线性规划算法研究的重视，自 20 世纪 70 年代中期开始，出现了一系列新的方法。但这些算法都比较复杂，而且在变量个数不是太多的情况下，其计算的平均速度未必比单纯形算法好，所以本书对这些新的算法省略了。

本章重点介绍单纯形算法、修正的单纯形算法、对偶单纯形算法和原始-对偶算法。实际上，只要掌握了单纯形算法及其原理，其他几个算法就容易理解了。本章最后提到椭球算法，其目的是说明线性规划问题是可用多项式时间算法求解的。

本章内容与线性代数有关，对代数不太熟悉的读者，可以先复习一下线性代数的基本知识。

1.1　线性规划的基本概念

要回答什么是线性规划，先看几个线性规划的例子。

例 1.1.1（运输问题）　设某种产品有 m 个产地 A_1，A_2，…，A_m，其产量分别为 a_1，a_2，…，a_m。该产品有 n 个需求地 B_1，B_2，…，B_n，其需求量分别为 b_1，b_2，…，b_n。已知从第 i 个产地 A_i 运送单位产品到第 j 个需求地 B_j 的费用为 c_{ij} 元。如何对产品进行调配，使在满足供需要求的情况下，总的运费最小？这里我们假定 $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$，即供需平衡。

对于这一问题可建立下述数学模型：

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{1.1.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \tag{1.1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=b_j,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{1.1.3}$$

$$x_{ij}\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{1.1.4}$$

式中，x_{ij} 表示自产地 A_i 运往需求地 B_j 的产品数量；式（1.1.1）表示总的运费要求取最小值；式（1.1.2）表示从产地 A_i 运出去的数量等于 A_i 产地的产量；式（1.1.3）表示需求地 B_j 的需求量，等于运往 B_j 的数量；式（1.1.4）表示运送的数量非负。

这个模型表示在满足供需关系式（1.1.2）～（1.1.4）条件下，求一组 $\{x_{ij}\}$，使式（1.1.1）达到最小，这就是例 1.1.1 所要求的调运方案。

例 1.1.2（资源分配） 某工厂现有 m 种资源，第 i 种资源的数量为 b_i，$i=1$，2，…，m。用这 m 种资源可以生产 n 种产品。已知生产单位第 j 种产品需第 i 种资源的数量为 a_{ij}，$i=1$，2，…，m，$j=1$，2，…，n，从中可获利 c_j 元。问题是在现有资源的条件下，各种产品各生产多少才可能使总的利润最大？

若用 x_j 表示第 j 种产品生产的数量，那么上述问题可表示为

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.1.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \tag{1.1.6}$$

$$x_j\geqslant 0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{1.1.7}$$

上述两个例子，虽然问题不同，但其数学模型的实质是相同的，都是在一组线性等式和（或）不等式约束下，求一个线性函数的极值（最大或最小值），这就是所谓的线性规划。

从外形上看，线性规划可以是各种各样的，我们把下述的线性规划称为标准形式：

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

$$x_j\geqslant 0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

我们称 x_j 为变量，$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ 为目标函数，而 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ 和 $x_j\geqslant 0$，$i=1$，2，…，m，$j=1$，2，…，n 为约束条件。

任何一个线性规划问题都可以化为标准形式。比如，若某个约束条件为 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i$，则可以引进一个非负变量 y_i，用 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i = b_i$ 和 $y_i\geqslant 0$ 代替 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i$；同样，对 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i$，可用 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - y_i = b_i$ 和 $y_i\geqslant 0$ 代之。我们称这样的 y_i 为松弛

变量。若线性规划中某个变量 x_j 不要求非负，则可做一个代换，用 $x_j=x_j^{(1)}-x_j^{(2)}$ 代入目标函数和约束条件中，并增加约束 $x_j^{(1)}\geqslant 0$ 和 $x_j^{(2)}\geqslant 0$。若目标函数为求最小值，则改为求最大值并把目标函数的系数变号，即求 $\min\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$ 改为 $\max\sum_{j=1}^{n}-c_jx_j$。

为表述简单，通常我们用向量形式表示为

$$\text{LP}\qquad \begin{aligned}&\max \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\\&\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}\\&\boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{C}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n)$ 且 $\boldsymbol{P}=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}\geqslant 0$ 表示 $\boldsymbol{X}$ 的每一分量 $x_j\geqslant 0$，$j=1,2,\cdots,n$。

这里 c_j，b_i 和 a_{ij} 通常取自于实数域；但在实际中经常取自于有理数域或整数环。

有时为方便，把线性规划也写成

$$\begin{gathered}\max\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\\ \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_jx_j=\boldsymbol{b}\\ x_j\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n\end{gathered}$$

或

$$\begin{gathered}\max\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}=b_i,\ i=1,2,\cdots,m\\ \boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}\end{gathered}$$

其中，$\boldsymbol{A}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行。

满足约束条件的 $\boldsymbol{X}$ 称为可行解，使目标达到最大的可行解，则称之为最优解，最优解对应的目标值，则称之为最优值。

我们始终假定 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶矩阵，$n\geqslant m$ 且 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 m。由 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个线性无关的列组成的矩阵，如 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{P}_{J1},\boldsymbol{P}_{J2},\cdots,\boldsymbol{P}_{Jm})$，称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个基，基中的列称为基列，基列对应的变量称为基变量；不在基里的列称为非基列，非基列对应的变量称为非基变量。对于 $\boldsymbol{A}$ 的任一个基 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{P}_{J1},\boldsymbol{P}_{J2},\cdots,\boldsymbol{P}_{Jm})$，那么 $\boldsymbol{A}$ 分为两部分：$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{B},\boldsymbol{N})$，相应地，$\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 也分为两部分 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{X}_B^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}_N^{\mathrm{T}})$，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{C}_B^{\mathrm{T}},\boldsymbol{C}_N^{\mathrm{T}})$，其中 N 表示非基列部分，$\boldsymbol{X}_B$ 和 $\boldsymbol{X}_N$ 分别表示基变量向量和非基变量向量，因此，给定一个基 $\boldsymbol{B}$，LP 可重写为

$$\begin{gathered}\max\{\boldsymbol{C}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_B+\boldsymbol{C}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_N\}\\ \boldsymbol{BX}_B+\boldsymbol{NX}_N=\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{X}_B\geqslant\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{X}_N\geqslant\boldsymbol{0}\end{gathered}$$

对于基 $\boldsymbol{B}$，那么方程组 $\boldsymbol{BX}_B=\boldsymbol{b}$ 有唯一的解 $\boldsymbol{X}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$，若 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant\boldsymbol{0}$，则称 $\boldsymbol{B}$ 为可行基，那么对应的解 $\boldsymbol{X}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{X}_N=\boldsymbol{0}$ 称为基可行解。在所有基可行解中使目标值达到最大的基可行解称为基最优解，而对应的基称为最优基。

设 $\boldsymbol{B}$ 是可行基，那么由约束条件

$$\boldsymbol{BX}_B+\boldsymbol{NX}_N=\boldsymbol{b}$$

可以得 $\boldsymbol{X_B}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{X_N}$，将它代入目标函数，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_B+\boldsymbol{C}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_N&=\boldsymbol{C}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{C}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}-\boldsymbol{C}_N^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X}_N\\&=\boldsymbol{C}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{C}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X}\end{aligned}\tag{1.1.8}$$

（$\boldsymbol{C}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$）称为关于基 $\boldsymbol{B}$ 的检验数向量。由此可见，当 $\boldsymbol{P}_j$ 为基 $\boldsymbol{B}$ 中的列时，则检验数 $\boldsymbol{C}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_j-\boldsymbol{c}_j=0$。显然，对应可行基 $\boldsymbol{B}$ 的基可行解的目标值为 $\boldsymbol{C}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$。

由最优解和基最优解的定义可知，最优解对应的目标值不小于基最优解对应的目标值，进而，我们将证明二者相等。为此需要如下的一些基本概念。

引理 1.1.1　设 $\boldsymbol{X}^0$ 是线性规划 LP 问题的一个可行解，则 $\boldsymbol{X}^0$ 是基可行解，当且仅当 $\boldsymbol{X}^0$ 的非零分量所对应 A 的列线性无关。

证明　必要性由基可行解的定义立即可得。

充分性：不失一般性，设 $x_1^0>0$，$x_2^0>0$，…，$x_k^0>0$；而对一切 $j>k$，$x_j^0=0$。由假设知，$\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，…，$\boldsymbol{P}_k$ 是线性无关的。因为 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 m，所以 $k\leqslant m$。当 $k=m$，（$\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，…，$\boldsymbol{P}_m$）就是一个基，而 $\{x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0\}$ 就是 $\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{P}_jx_j=b$ 的唯一解，从而由基可行解的定义知 $\boldsymbol{X}^0$ 为基可行解。当 $k<m$，由于 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 m，故可在 $\boldsymbol{P}_{k+1}$，$\boldsymbol{P}_{k+2}$，…，$\boldsymbol{P}_n$ 中选取（$m-k$）列，不妨设为 $\boldsymbol{P}_{k+1}$，$\boldsymbol{P}_{k+2}$，…，$\boldsymbol{P}_m$，使 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，…，$\boldsymbol{P}_k$，$\boldsymbol{P}_{k+1}$，…，$\boldsymbol{P}_m$ 构成线性无关的 m 列，从而就是一个基。类似地，可证明 $\boldsymbol{X}^0$ 就是对应这个基的基可行解。　□

引理 1.1.2　任一个线性规划，若它有可行解，则它必有基可行解。

证明　设 X^0 是 LP 的一个可行解，并且它是 LP 的所有可行解中具有正分量个数最小的可行解。我们将证明 $\boldsymbol{X}^0$ 必是基可行解。

不妨设 $\boldsymbol{X}^0$ 的头 k 个分量 x_1^0，x_2^0，…，x_k^0 是非零的，而其余分量均为 0。如果 $\boldsymbol{X}^0$ 不是基可行解，那么由引理 1.1.1 知 P_1，P_2，…，P_k 必线性相关，即存在不全为零的数 δ_1，δ_2，…，δ_k，使

$$\sum_{i=1}^{k}\delta_i\boldsymbol{P}_i=\boldsymbol{0}\tag{1.1.9}$$

不妨假定存在某 $\delta_i>0$，令

$$\varepsilon=\min\left\{\frac{x_j^0}{\delta_j}\mid\delta_j>0\right\}$$

定义

$$x_j^*=\begin{cases}x_j^0-\varepsilon\delta_j, & 若\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ k\\ x_j^0, & 若\ j=k+1,\ k+2,\ \cdots,\ n\end{cases}$$

则 $\boldsymbol{X}^*$ 是 LP 的一个可行解。事实上，由 ε 的选取保证了对一切 $j=1$，2，…，k，$x_j^*=x_j^0-\varepsilon\delta_j\geqslant0$，其次，

$$\boldsymbol{AX}^*=\boldsymbol{AX}^0-\varepsilon\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{P}_j\delta_j=\boldsymbol{AX}^0=\boldsymbol{b}$$

因此 $\boldsymbol{X}^*$ 是可行解。进而，由 ε 的选取可知，必有某一下标 r，使 $\varepsilon=\dfrac{x_r^0}{\delta_r}$，从而 $x_r^*=x_r^0-$

$\varepsilon\delta_r=0$，即可行解 $\boldsymbol{X}^*$ 比 $\boldsymbol{x}^0$ 的正分量的个数至少小 1。这与 $\boldsymbol{x}^0$ 的假设矛盾。这就证明了 $\boldsymbol{x}^0$ 是基可行解。 □

由引理 1.1.2 可见，一个线性规划问题若有最优解，则必有基最优解。下面的定理告诉我们基最优解一定是最优解。

定理 1.1.1　一个线性规划，若有最优解，则最优解一定能在可行解中找到。

证明　设 $\boldsymbol{x}^0$ 是一最优解，并且它是所有最优解中含有非零分量个数最小的最优解。我们将证明 $\boldsymbol{x}^0$ 就是基可行解。

假如 $\boldsymbol{x}^0$ 不是基可行解，设它的非零分量为 x_1^0，x_2^0，…，x_k^0，那么由引理 1.1.1 知 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，…，$\boldsymbol{P}_k$ 线性相关，即存在非全为零的数 δ_1，δ_2，…，δ_k，使

$$\sum_{j=1}^{k}\delta_j\boldsymbol{P}_j=\boldsymbol{0}$$

首先我们证明对这组 δ_j 必有

$$\sum_{j=1}^{k}c_j\delta_j=0 \tag{1.1.10}$$

事实上，对充分小的正数 ε，令

$$x_j^{(1)}=\begin{cases}x_j^0-\varepsilon\delta_j, & j=1,\ 2,\ \cdots,\ k\\ x_j^0, & j=k+1,\ k_2+2,\ \cdots,\ n\end{cases} \tag{1.1.11}$$

$$x_i^{(2)}=\begin{cases}x_i^0+\varepsilon\delta_i, & j=1,\ 2,\ \cdots,\ k\\ x_i^0, & i=k+1,\ k+2,\ \cdots,\ n\end{cases}$$

则显然 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{X}^{(2)}$ 是两个可行解，从而

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^0\geqslant\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(1)}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^0-\varepsilon\sum_{j=1}^{k}c_j\delta_j$$

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^0\geqslant\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(2)}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^0+\varepsilon\sum_{j=1}^{k}c_j\delta_j$$

由此可得式（1.1.10）。

模仿引理 1.1.2 的证明，不妨设有某个 $\delta_j>0$，取 $\varepsilon=\min\left\{\dfrac{x_j{}^0}{\delta_j}\,|\,\delta_j>0\right\}$，则由式（1.1.10）定义的 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 是可行解，并且 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 的非零分量的个数比 $\boldsymbol{X}^0$ 的非零分量的个数至少小 1。另一方面，由式（1.1.10）可得

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(1)}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^0-\varepsilon\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{C}_j\delta_j=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^0$$

即 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 也是最优解，由于 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 比 $\boldsymbol{X}^0$ 的非零分量个数少，故与 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 的假设矛盾。 □

这个定理说明，求 LP 的最优解，只需在 LP 的基可行解中找即可，而 LP 的可行基的个数最多为 C_n^m 个，因此 LP 的最优解可在有限个可行解中找到。然而，当 n 较大时，C_n^m 很大，实质上它是一个指数函数，因此用遍数可行基的方法找出 LP 的最优解是不可行的。

基于定理 1.1.1，G. B. Dantzig 提出了搜索基最优解的方法——单纯形算法。

1.2 单纯形算法

单纯形方法分两个阶段，第一阶段是寻求一个可行基及基可行解；第二阶段是从一个可行基出发进行迭代，即从一个可行基迭代到下一个可行基，使其基可行解的目标函数值逐步增加，直到某一个可行基 $\boldsymbol{B}$，使其检验数向量 $\boldsymbol{C}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\geqslant\boldsymbol{0}$ 为止。我们先叙述单纯形算法的第二阶段，然后再讨论如何寻求第一个可行基。

假如已知 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{P}_{J1},\ \boldsymbol{P}_{J2},\ \cdots,\ \boldsymbol{P}_{Jm})$ 是 LP 的一个可行基，那么相应地，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{X}$ 被划分为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{N})$，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{C}_B^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{C}_N^{\mathrm{T}})$，$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{X}_B^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{X}_N^{\mathrm{T}})$。对 $\boldsymbol{A}$ 的每一列 $\boldsymbol{P}_j$，令

$$\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_j, \qquad b_{0j}=\boldsymbol{C}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_j-c_j,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

而

$$\begin{pmatrix} b_{10} \\ b_{20} \\ \vdots \\ b_{m0} \end{pmatrix}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b},\ b_{00}=\boldsymbol{C}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}, \qquad \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_B \\ \boldsymbol{X}_N \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ 0 \end{pmatrix}$$

单纯形方法计算步骤：

Step 1 若对一切 $j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，$b_{0j}\geqslant 0$，则步骤终止。$\boldsymbol{X}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{X}_N=\boldsymbol{0}$ 为 LP 的最优解；否则，选取下标 s，使 $s=\min\{j\mid b_{0j}<0\}$。

Step 2 若对一切 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$，$b_{is}\leqslant 0$，即 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_S\leqslant\boldsymbol{0}$，则步骤终止，LP 无有界最优解；否则，取 $\theta=\min\left\{\dfrac{b_{i0}}{b_{is}}\mid b_{is}>0\right\}$ 及变量下标 J_r，使

$$J_r=\min\left\{J_i\ \middle|\ \frac{b_{i0}}{b_{is}}=\theta \text{且}\ b_{is}>0\right\}$$

Step 3 用 $\boldsymbol{P}_S$ 列替换 $\boldsymbol{B}$ 中 $\boldsymbol{P}_{Jr}$ 列，得到新的可行基（$\boldsymbol{P}_{J1}$，$\cdots$，$\boldsymbol{P}_{Jr-1}$，$\boldsymbol{P}_S$，$\boldsymbol{P}_{Jr+1}$，$\cdots$，$\boldsymbol{P}_{Jm}$）。（把它仍记为 $\boldsymbol{B}$，然后用新的可行基重新计算 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_j$，$\boldsymbol{C}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_j-\boldsymbol{C}_j$，$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{C}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$）或者置

$$b_{rj}\leftarrow\frac{b_{rj}}{b_{rs}},\ j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

$$b_{ij}\leftarrow b_{ij}-\frac{b_{rj}}{b_{rs}}b_{is}, \qquad \begin{matrix} 0\leqslant i\neq r\leqslant m \\ 0\leqslant j\leqslant n \end{matrix}$$

返回 Step 1。

上述单纯形方法可以列表计算，虽然列表计算对计算机来说并非最好，但用手工计算却清楚简单。下面举一个例子。

例 1.2.1 $\max\{2x_1+x_2+0x_3+0x_4+0x_5\}$

$$x_1+x_2+x_3=5$$
$$-x_1+x_2+x_4=0$$
$$6x_1+2x_2+x_5=21$$
$$x_j \geqslant 0, \ j=1, 2, 3, 4, 5$$

$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_4, \boldsymbol{P}_5)$ 是可行基。这里 $J_1=3$，$J_2=4$，$J_3=5$，而 $\boldsymbol{N}=(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2)$，又 $\boldsymbol{C}_B^{\mathrm{T}}=(0, 0, 0)$，$\boldsymbol{C}_N^{\mathrm{T}}=(2, 1)$，$\boldsymbol{X}_B^{\mathrm{T}}=(x_3, x_4, x_5)$，$\boldsymbol{X}_N^{\mathrm{T}}=(x_1, x_2)$，$\boldsymbol{C}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=(b_{01}, b_{02}, b_{03}, b_{04}, b_{05})=(-2, -1, 0, 0, 0)$，其余数据见表 1.2.1，此表也称之为单纯形表。

表 1.2.1

−2	−1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	5
−1	1	0	1	0	0
6	2	0	0	1	21

Step 1　$b_{01}=-2$，$b_{02}=-1$，故取 $s=1$，即 $b_{0s}=b_{01}$。

Step 2　$b_{11}=1>0$，$b_{31}=6>1$，故

$$\theta=\min\left\{\frac{b_{10}}{b_{11}}, \frac{b_{20}}{b_{31}}\right\}=\min\left\{\frac{5}{1}, \frac{21}{6}\right\}=\frac{7}{2}$$

$J_r=5$，$r=3$（一般 J_i 表示第 i 个约束方程中基变量的下标，如 $J_3=5$ 表示第 3 个约束方程中基变量为 x_5），用 $\boldsymbol{P}_1$ 列替换 $\boldsymbol{B}$ 中列 $\boldsymbol{P}_5$，得到新的可行基为 $(\boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_4, \boldsymbol{P}_1)$，它对应的单纯形表为表 1.2.2。

表 1.2.2

0	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	7
0	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{3}{2}$
0	$\frac{4}{3}$	0	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{2}$
1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{2}$

Step 1　$b_{02}<0$，从而 $s=2$。

Step 2　$b_{12}=\dfrac{2}{3}$，$b_{22}=\dfrac{4}{3}$，$b_{32}=\dfrac{1}{3}$均是正的，故

$$\theta=\min\left\{\frac{b_{10}}{b_{12}}, \frac{b_{20}}{b_{22}}, \frac{b_{30}}{b_{32}}\right\}=\frac{b_{10}}{b_{12}}=\frac{9}{4}$$

$J_r=J_1=3$，$r=1$，即用第 2 列替换基中第 3 列得新的基 $(\boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_4, \boldsymbol{P}_1)$，对应的单纯形表为表 1.2.3。

表 1.2.3

0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{31}{4}$
0	1	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$
0	0	-2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{4}$

此时所有检验数 $b_{0j}\geqslant 0$，因此得到最优解：$x_1=\dfrac{11}{4}$，$x_2=\dfrac{9}{4}$，$x_4=\dfrac{1}{2}$，$x_3=x_5=0$，最优值为$\dfrac{31}{4}$。

让我们从几何图形上看看这个算法的计算过程。首先把例 1.2.1 改写为下述等价形式：

$$
\begin{aligned}
&\max\ z=\{2x_1+x_2\}\\
&x_1+x_2\leqslant 5\\
&-x_1+x_2\leqslant 0\\
&6x_1+x_2\leqslant 21\\
&x_1,\ x_2\geqslant 0
\end{aligned}
$$

它是两个变量的线性规划，故可用图 1.2.1 所示的几何图形表示之。

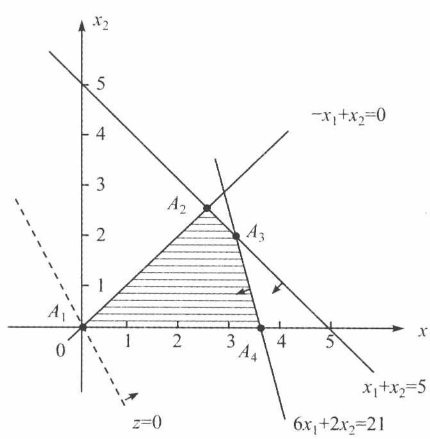


图 1.2.1

图中由 $A_1A_2A_3A_4$ 构成的多边形中的点其坐标均满足上述不等式组，也就是可行解的集合，这个多边形的每一个顶点对应于一个基可行解。单纯形算法就是从一个基可行解（顶点）到它相邻的基可行解（顶点），直到某一个基可行解（顶）为最优解为止。在这个例子里是从原点 A_1 开始，它对应于初始基可行解（0，0，5，0，21），初始可行基为（$\boldsymbol{P}_3$，$\boldsymbol{P}_4$，$\boldsymbol{P}_5$）；迭代一步走到顶点 A_4，它对应基可行解为