HIT

数学 · 统计学系列

Absolute Value Equation – Analytical Research on Folding and Composite Figure

绝对值方程——折边与组合图形的解析研究

林世保　杨世明　著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

HIT

数学·统计学系列

绝对值方程——折边与组合图形的解析研究

Absolute Value Equation —Analytical Research on Folding and Composite Figure

● 林世保 杨世明 著

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书通过建立多边形、组合图形和多面体的方程，实现对折边与组合图形进行解析研究的梦想。书中建立了很多的方程，给出了已知图形构建其绝对值方程和已知方程画出图形的一系列方法，并对方程给出了若干应用。书中还附有"八大问题"供有兴趣的读者研究探讨。大学数学系的师生、中学数学教师和喜爱数学的高年级学生，均可读懂本书的绝大部分内容。本书是对"绝对值"、"曲线、曲面方程"、"解析法"等概念和方法进行深入发掘的结果，因此，对中学、大学的数学教学，有很高的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

绝对值方程：折边与组合图形的解析研究/林世保，杨世明著.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2012.6

ISBN 978-7-5603-3512-4

Ⅰ.①绝… Ⅱ.①林… ②杨… Ⅲ.①绝对值-方程-研究 Ⅳ.①O122.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 028163 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 翟新烨
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16 印张 21.75 字数 400 千字
版　　次 2012 年 6 月第 1 版 2012 年 6 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-3512-4
定　　价 48.00 元

序

宏基集团创始人施振荣的成功经验是不走和别人一样的路,他经常说:“Me too is not my style”.

本书是一本既另类又主流的书.称其另类是因为今天已经没有人去写这类既没名又没利的书,初等数学研究可以说在中国已经名存实亡了,虽然还有人在试图搞些研究,但受大环境所左右早已多年无精品问世了,因为这些所谓的雕虫小技不入高层法眼,那些急于货于帝家王的研究者便另寻捷径去了.说它是主流是因为从国际上其他各国的研究角度看这绝对是一本正宗的初数研究专著.

2011 年 10 月 4 日,美国加州大学伯克利分校索尔·珀尔马特教授获得 2011 年诺贝尔物理学奖.珀尔马特教授在校方为他举办的获奖讲座中告诫青年学生:

“人生中有很多东西抓住了你的视野,但是只有很少的东西抓住你的内心,去追求它!”

杨之是杨世明先生的笔名,50 多年来偏安一隅,矢志不渝,投之以毕生精力,为中国初等数学研究树立了一个光辉的典范.如同一位名人所说:“你们的时间有限,不要将时间浪费在重复他人的生活上;不要被教条束缚,那意味着你活在其他人思考的结果中;不要被他人的喧嚣遮蔽了你自己内心的声音、思想和直觉,它们在某种程度上知道你真正想成为什么样子,所有其他的事情都是次要的.”

杨之先生是很令笔者羡慕的一位老者，他像一位热衷手艺的老匠人，活在自己的世界里，自我欣赏，自我陶醉.

日本创业百年以上的企业数量高达 22 219 家，其中 39 家更是拥有 500 年以上的历史. 相比较，亚洲其他国家历史悠久的企业少得可怜. 一个根本原因在于，日本文化崇拜能工巧匠. 将做一个出色的匠人视为人生目标和典范的国家，亚洲唯有日本，在欧洲德国比较突出.

数学家说到底也是一个匠人，所以国人对他们感兴趣的不会多，好在他们能自恰. 杨之先生一共准备在本工作室出版 10 本书，此为第二本，其一大特点是无涉应试教育.

中国教育演化为现在的应试教育是唯智、唯知的教育观在作祟. 而这种教育观之上又笼罩着一些更大的观念，如发展主义——快速增长的观念，赶超、竞争的观念——国家竞争、民族竞争、人际竞争、就业竞争. 应试教育不过是与这些观念相一致，而这些观念正是应试教育产生的最终根源. 如果不抛弃这些观念，不抛弃唯智、唯知主义的教育观，搞素质教育便没有根本的理论依据. 整个社会弥漫着发展主义，国家竞争的情绪，就不会有素质教育存在的空间.

2011 年 10 月末笔者去南开大学参加纪念陈省身先生诞辰 100 周年大会. 参会的嘉宾中老先生居多，如吴文俊先生、王元先生、项武义先生、王梓坤先生、李大潜先生等个个神采奕奕. 给笔者的一个启示是：数学养人. 杨之先生亦如此，虽年逾八旬，但谈起数学俨然一老顽童，煞是可爱. 中国即将迈入老龄化社会，养老方式专家们各抒己见. 依笔者看，研究养老，特别是研究数学养老不失为一个绝佳方式. 当然这样做是需要条件的，那就是要有一颗渴望求知的童心.

在乔布斯年轻的时候，有一本影响过他的百科全书式的杂志叫《全球目录》，乔布斯称它是那一代人的圣经. 这本杂志最后一期的封底上是清晨乡村公路的照片，在照片之下有这样一段话："求知若饥，虚心若愚."

关于本书的学术价值的高低问题，笔者并无资格评价，虽然也曾混迹高校教过 8 年初等数学研究这门课，虽然也担着全国初等数学研究会副理事长的虚名，但在真正的学术面前当不得真. 倒是杨先生看完本文后指示：请提一下本书第一作者林世保老师，没有他的执著，也不会有本书. 在读过全书之后笔者想到了一个新出炉的英文词(纯属附庸风雅)，牛津年度新词汇中有一个词叫"Woot"：呜.

最初这个词在美国的网络上流行，接着被英国人接受，它表达"好耶！"的意思. 借用一下，我们想说：

作者 Woot！本书 Woot！

刘培杰

2011 年 11 月 5 日于哈工大

◎ 目录

第 0 章　绪论　//1

第 1 章　基础知识　//4

1.1　关于“绝对值”　//4

1.2　绝对值方程　//13

1.3　绝对值方程的图形　//21

第 2 章　“绝对值方程”构造法//　29

2.1　轨迹法　//29

2.2　区域法　//37

2.3　折叠法　//41

2.4　对称法　//44

2.5　弥合法　//47

2.6　重叠法　//52

第 3 章　基本图形的方程　//58

3.1　点与点系　//58

3.2　射线　//59

3.3　线段　//61

3.4　角　//65

3.5　简单折线　//70

第4章　三角形方程　//80

4.1　轶闻一则　//80

4.2　三角形方程的一般形式　//82

4.3　三角形方程的特殊式　//88

4.4　建立三角形方程的仿射变换法　//99

4.5　关于三角形方程的应用　//103

第5章　四边形的方程　//109

5.1　平行四边形方程　//109

5.2　一般四边形方程(一)　//118

5.3　一般四边形方程(二)　//122

5.4　一般四边形方程(三)　//128

5.5　射影变换与四边形方程　//133

5.6　四边形方程的简明形式　//137

第6章　多边形的方程　//147

6.1　最早的多边形方程　//147

6.2　一层的方程　//152

6.3　凸五边形方程(一)　//158

6.4　凸五边形方程(二)　//162

6.5　凸六边形方程　//167

6.6　正多边形的方程　//173

第7章　四面体的方程　//176

7.1　四面体方程的一般形式　//176

7.2　四面体三层方程　//181

7.3　四面体重心式方程　//186

7.4　四面式方程　//190

7.5 四面体的体积式方程 //192

第8章 多面体的方程 //196

8.1 对称八面体的方程 //196

8.2 凸四面角与四棱锥的方程 //206

8.3 平行六面体的方程 //215

8.4 柱锥台的方程 //221

8.5 正多面体的方程 //227

8.6 邹黎明的二元构造法 //233

第9章 非线性方程及其他 //236

9.1 凸四边形的二次绝对值方程 //236

9.2 极坐标方程 //239

9.3 高次绝对值方程 //244

9.4 正多边形与星形方程 //249

9.5 双圆四边形方程 //257

9.6 凸多边形区域方程 //262

9.7 复平面上的绝对值方程 //264

部分习题提示及解答 //267

参考文献 //328

后记 //331

绪论

第 0 章

17 世纪初,法国哲学家、热衷于方法论的数学家笛卡尔,为了解决“代数是毫无意义的一堆符号演算”和“几何几乎是一题一巧,繁难而没有规律”的问题.通过多年思索,终于创立了坐标法,建立了点(平面点集)与有序数对(x,y)(的集合 R^2)间的一一对应,把图形与方程关联起来,这是一种微观层次的、有结构性质的关联,远远超越了自古有之的宏观粗疏的数形结合(如图形的周长、面积、体积,直角三角形的勾股定理等),从而为通过方程研究图形的性质,和通过图形研究代数问题,创造了广泛的可能性.然而,“解析几何”后来的发展“犯”了两个带根本性的、方向性的错误.

一是忽视了“以形解数”,即通过图形研究代数问题,这点且不去论它.

二是由于种种原因,仅通过方程研究了光滑曲线(如圆锥曲线,直线、螺线,心脏线,阿基米德螺线等),却“忘记了”对于具有折点的曲线图形,如折线中的多边形、五角星,多种组合图形的研究,例如图 0.1 中的各种图形,就无人通过方程去研究,大约是写出方程“太难”了,从而要想在简单的方程上,分析它的性质,也许更难. 然而诸难之中,为首的是不知道怎样表示“折点”.

由于负数的出现,人们注意到像 a 与 $-a$ 这样只有符号不同的两个数中,那种共同的东西,就是实数的绝对值:

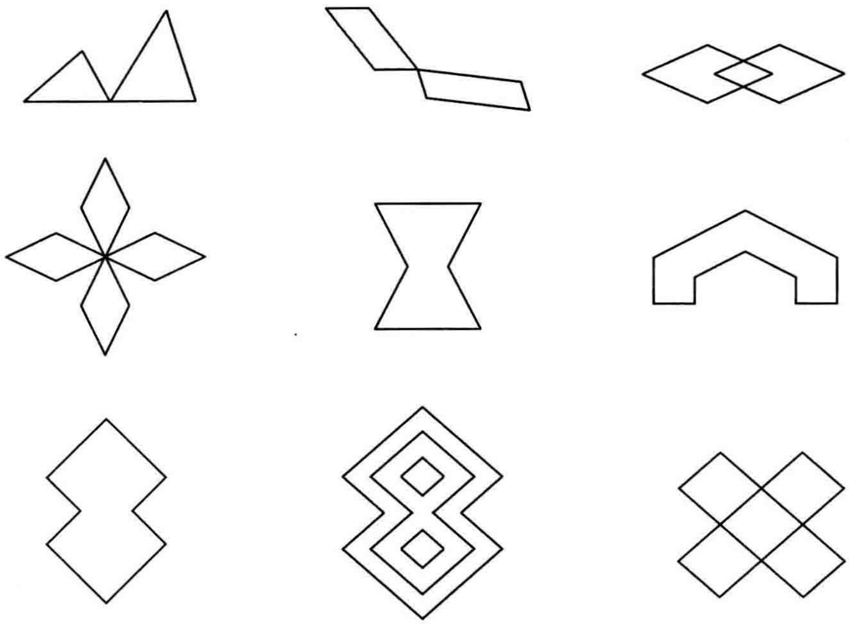


图 0.1

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a>0)\\0(a=0)\\-a(a<0)\end{cases}$$

(这里,有 $|a|=|-a|$). 它的几何意义是描在数轴上的点 a 到原点的距离. 如图 0.2.

那么,按定义,它的代数(即运算的、变换的)意义是什么呢?为弄清这一点,只须看看函数

$$y=x \text{ 与 } y=|x|$$

的图象即知. 由图 0.3 可见: $y=x$ 是一条直线 AB, $y=|x|$ 变成了一条折线 AOB',它与 AB 有共同的部分 OA,另一部分射线 OB' 则与 OB 关于 x 轴对称,这就意味着,给 $y=x$ 中的 x 加上绝对值符号,等于把每一个负值变成它的相反数,把 y 取负值(即在 x 轴下方)的部分的图象翻折(关于 x 轴翻折)到 x 轴上方,但 $|-0|=|0|$,因而 0 点不变,从而形成折点,可见,加"| |"的运算意义是:化负为正(化非正为非负),变换意义是:对称变换,在其不动点处形成折点.

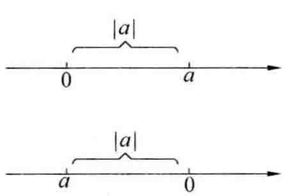


图 0.2

有了这个认识以后,就要进一步考虑,如何系统地运用"添加绝对值符号"

来构造各种折线图形的方程. 不想,(前) 苏联的科普作家多莫里亚特偶然迈出的第一步,成为对用绝对值概念列出含折点的曲线方程的关键启示. 他在《数学博弈与游戏》一书中,给出的几个方程是:

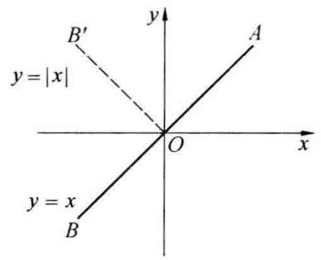


图 0.3

1) $|2y-1|+|2y+1|+\frac{4}{\sqrt{3}}|x|=4$(正六边形);

2) $|x|+|y|+\frac{1}{\sqrt{2}}\{|x-y|+|x+y|\}=\sqrt{2}+1$(正八边形);

3) $\left||x|+\left||y|-3\right|-3\right|=1$(双八字,如图 4).

在我国杂志上,则有含绝对值符号的函数的研究,如函数

$$f(x)=|x|+|x-a|+|x+a|$$

的图象是一条折线, 又如 $y=|\sin x|$,$y=\sin|x|$ 等,这启示杨之认识到有系统的研究(在含有变量的部分上) 带有绝对值符号的曲线方程的必要性,并分别于 1985 年6 月 和1986 年5 月 的《中等数学》上,发表文章,给出了“绝对值方程” 的概念. 鼓吹开展研究,同时提出若干“问题和猜想”,激发人们的好奇和解决的强烈欲望,此举颇为有效,真的激发了我国对绝对值方程的持续而卓有成效的研究.

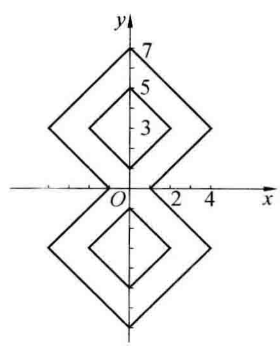


图 0.4

第1章

什么是绝对值方程?

1.1 关于“绝对值”

“绝对值方程”的研究,意味着对“绝对值”概念的挖掘和应用,因此,应对它从各个方面进行深入地认识和剖析.

1. 定义

实数 a 的绝对值

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a>0)\\0(a=0)\\-a(a<0)\end{cases}$$

也可定义成

$$|a|=\begin{cases}a\quad(a\geqslant 0)\\-a\quad(a<0)\end{cases}\text{或}|a|=\begin{cases}a\quad(a>0)\\-a\quad(a\leqslant 0)\end{cases}$$

对前边一个,可以说成:非负数的绝对值是它本身,负数的绝对值是它的相反数.

几何意义:$|a|$ 表示点 $P(a)$ 到原点 O 的距离.

2. $|x-a|$ 的几何意义及其应用

把点 $A(a)$ 和 $P(x)$ 表示在数轴上(图 1.1)

由于

$$|x-a|=\begin{cases}x-a(x\geqslant a)\\a-x(x<a).\end{cases}$$

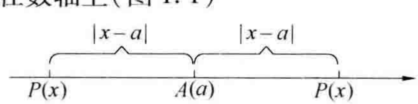


图 1.1

因此，$|x-a|$ 表示点 $P(x)$ 到点 $A(a)$ 的距离.

例 1 (1) 求 $y=|x-a|+|x-b|$ 的最小值；

(2) 求函数 $y=|x-a|+|x-b|+|x-c|$ 的最小值.

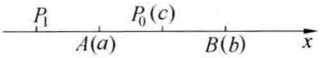


图 1.2

分析 (1)y 表示点 $P(x)$ 到点 $A(a)$、$B(b)$ 两点的距离之和(如图 1.2)，那么线段 AB 上的任何点 $P_0(c)$ 都是解. 事实上，不妨设 $a<b$，则 $a\leqslant c\leqslant b$，有

$$y=AP_0+P_0B=AB=|b-a|$$

如点 P 在 AB 之外，比如在 BA 延长线上的 P_1 处，则

$$y=P_1A+P_1B=2P_1A+AB>AB$$

(2) 不妨设 $a<b<c$，由(1)知，$|x-a|+|x-c|$ 的最小值在 AC 上任一点达到，而 $|x-b|$ 的最小值在 $B(b)$(即 P 位于 B)达到，这时 $x=b$，于是

$$y_{min}=|b-a|+|b-b|+|b-c|=|a-c|$$

反思 由这道题的求解，我们不难认识到，形如 $y=\sum\limits_{i=1}^{n}|x-a_i|$ 的函数，求最小值的问题，相当于在数轴上求一点 $P_0(x_0)$，使它到 n 个点 $A_i(a_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 的距离之和 $d=\sum\limits_{i=1}^{n}PA_i$ 最小. 而这个点 P_0 的位置有些特殊，对 $n=2$，可以是线段 A_1A_2 上任一点，对于 $n=3$，如 $a_1<a_2<a_3$，则 P_0 就在点 A_2，由此应有如下猜想：

不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，则使 d 达到最小的点 P_0，就是：① 若 n 为奇数，则为 $A_{\frac{n+1}{2}}$；② 若 n 为偶数，则为线段 $A_{\frac{n}{2}}A_{\frac{n}{2}+1}$ 上任一点.

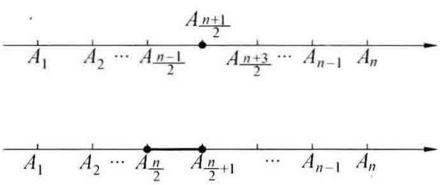


图 1.3

事实上，到 A_1、A_n 的距离之和最小的点在线段 A_1A_N 上，到 A_2，A_{n-1} 距离和最小的点在线段 A_2A_{n-1} 上，因为 $a_1<a_2<a_{n-1}<a_n$，$A_2A_{n-1}\subset A_1A_n$，故到 A_1、A_2、A_{n-1}、A_n 四点之和最小的点在线段 A_2A_{n-1} 上，…… 类似地，如图 1.3，可知

1) 当 n 为偶数时，由于

$$a_1<a_2<\cdots<a_{\frac{n}{2}}<a_{\frac{n}{2}+1}<\cdots<a_{n-1}<a_n$$

知 $A_2A_{\frac{n}{2}-1}\subset A_{\frac{n}{2}-1}A_{\frac{n}{2}+2}\subset\cdots\subset A_2A_{n-1}\subset A_1A_n$，所以到 $A_1,A_2,\cdots,A_{n-1},A_n$ 距离之和最小的点是线段 $A_2A_{\frac{n}{2}-1}$ 上的任一点.

2) 当 n 为奇数时，类似知，到 $A_1,A_2,\cdots,A_{\frac{n-1}{2}},A_{\frac{n+3}{2}},\cdots,A_{n-1},A_n$ 距离之和最小的点在线段 $A_{\frac{n-1}{2}}A_{\frac{n+3}{2}}$ 上，但 $a_{\frac{n-1}{2}}<a_{\frac{n+1}{2}}<a_{\frac{n+3}{2}}$，故 $A_{\frac{n+1}{2}}\in A_{\frac{n-1}{2}}A_{\frac{n+3}{2}}$，可知到 $A_1,A_2,\cdots,$

$A_{\frac{n+1}{2}},\cdots,A_{n-1},A_n$距离之和最小的点是$A_{\frac{n+1}{2}}$.

这就证明了如下(用另一种语言表述)

定理1 设$a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n$,则使函数

$$y = \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|$$

取最小值的点$x_0 \in [a_{\frac{n}{2}}, a_{\frac{n}{2}+1}]$,($n$为偶数)或$x_0 = a_{\frac{n+1}{2}}$($n$为奇数).

例2 求函数的最小值:

(1) $y = |x| + |x-1| + |x-2| + |x-3|$;

(2) $y = |x+1| + |x+2| + |x+3| + |x+4| + |x+5|$.

解 (1) 函数在区间[1,2]的任意一点达到最小值,取$x = 1$,则$y_{min} = 1 + 0 + 1 + 2 = 4$;

(2) 函数在$x = -3$处达到最小,故

$$\begin{aligned} y_{\min} &= |-3+1| + |-3+2| + |-3+3| + |-3+4| + |-3+5| \\ &= 2 + 1 + 0 + 1 + 2 = 6 \end{aligned}$$

例3 求下列函数的最小值和最小值点.

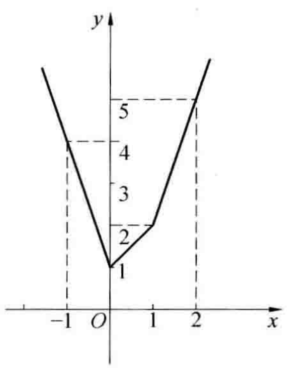


图 1.4

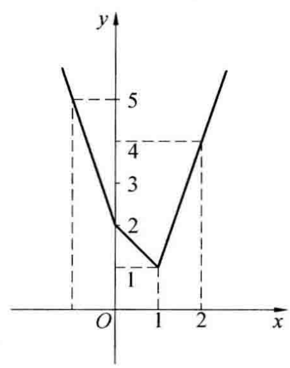


图 1.5

(1) $y = 2|x| + |x-1|$;(2) $y = |x| + 2|x-1|$

分析 可以"展开"成分段函数或抓住折点0,1(再取$-1,2$)作出图象(图1.4和图1.5).

$$(1)\ y = \begin{cases} -3x+1, x \leqslant 0, \\ x+1, 0 < x < 1, \\ 3x-1, 1 \leqslant x. \end{cases} \qquad (2)\ y = \begin{cases} -3x+2, x \leqslant 0, \\ -x+2, 0 < x < 1, \\ 3x+2, 1 \leqslant x. \end{cases}$$

所以,分别在$x = 0$和$x = 1$处取得最小值,最小值都是1.

反思 ① 如果不画图,怎样迅速求得最小值和最小值点?

② 对函数$y = 2|x| + |x-1| + 3|x+1|$,如何?

习题 1.1

1.（2008 年四川省凉山彝族自治州中考试题）阅读材料，解答下列问题.

例：当 $a>0$ 时，如 $a=6$ 则 $|a|=|6|=6$，故此时 a 的绝对值是它本身.

当 $a=0$ 时，$|a|=0$，故此时 a 的绝对值是零.

当 $a<0$ 时，如 $a=-6$ 则 $|a|=|-6|=6=-(-6)$，故此时 a 的绝对值是它的相反数.

所以综合起来一个数的绝对值要分三种情况，即

$$|a|=\begin{cases}a & 当 a>0\\ 0 & 当 a=0\\ -a & 当 a<0\end{cases}$$

这种分析方法渗透了数学的分类讨论思想.

问：(1) 请仿照例中的分类讨论的方法，分析二次根式 $\sqrt{a^2}$ 的各种展开的情况.

(2) 猜想 $\sqrt{a^2}$ 与 $|a|$ 的大小关系.

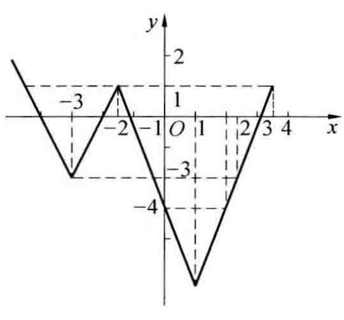
2.（2006 年山西省课改试验区中考试题）如图，是某函数的图象，则下列结论中正确的是（　　）.

A. 当 $y=1$ 时，x 的取值是 $-\frac{3}{2},\frac{10}{3}$

B. 当 $y=-3$ 时，x 的近似值是 0,2

C. 当 $x=-\frac{3}{2}$ 时，函数值 y 最大

D. 当 $x<-3$ 时，y 随 x 的增大而减小



2 题图

3. 函数 $y=|x-1|+|x-2|+\cdots+|x-100|$ 的最小值是（　　）.

A. 5 050　　B. 2 450

C. 2 500　　D. 2 550

4. 求函数 $y=|x-50|+|x-49|+\cdots+|x|+|x+1|+\cdots+|x+50|$ 的最小值.

5. 函数 $y=|x|+2|x-3|+3|x+2|$ 的最小值是__________.

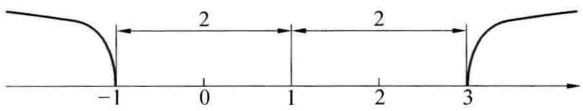
6.（2008 年乐山市初中毕业生学业考试）阅读下列材料：

我们知道 $|x|$ 的几何意义是在数轴上数 x 对应的点与原点的距离；即 $|x|=|x-0|$，也就是说，$|x|$ 表示在数轴上数 x 与数 0 对应点之间的距离；这个结论可以推广为 $|x_1-x_2|$ 表示在数轴上 x_1,x_2 对应点之间的距离.

例如

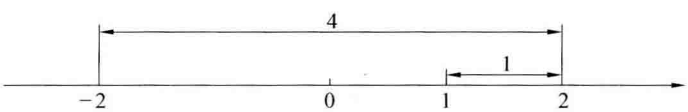
习题1　解方程 $|x|=2$，容易看出，在数轴下与原点距离为2点的对应数为 ± 2，即该方程的解为 ± 2；

习题2　解不等式 $|x-1|>2$，如图，在数轴上找出 $|x-1|=2$ 的解，即到1的距离为2的点对应的数为 -1、3，则 $|x-1|>2$ 的解为 $x<-1$ 或 $x>3$；



习题2图

习题3　解方程 $|x-1|+|x+2|=5$. 由绝对值的几何意义知，该方程表示求在数轴上与1和 -2 的距离之和为5的点对应的 x 的值. 在数轴上，1和 -2 的距离为3，满足方程的 x 对应点在1的右边或 -2 的左边，若 x 对应点在1的右边，由图可以看出 $x=2$；同理，若 x 对应点在 -2 的左边，可得 $x=-3$，故原方程的解是 $x=2$ 或 $x=-3$.



习题3图

参考以上阅读材料，解答下列问题：

(1) 方程 $|x+3|=4$ 的解为__________

(2) 解不等式 $|x-3|+|x+4|\geqslant 9$；

(3) 若 $|x-3|-|x+4|\leqslant a$ 对任意的 x 都成立，求 a 的取值范围.

7. (1986年全国初中数学联赛题) a 取什么值时，方程 $||x-2|-1|=a$ 有三个整数解？

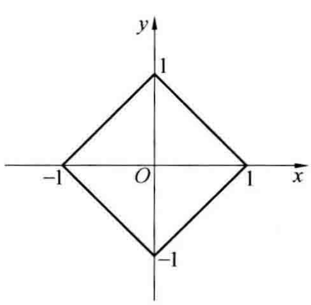


图1.6(a)

3. 添加"| |"意味着什么？

例4　分析正方形(图1.6(a)) $|x|+|y|=1$ 的形成过程.

分析　首先，方程 $x+y=1$ 的图形是一条直线(图1.6(b)) PQ.

(1) 在 x 上添加"| |"，得

$$|x|+y=1 \quad ①$$

变成了 $\angle P'AQ$. 由于 ① 相当于把两个方程

$$x+y=1,\ -x+y=1$$

合并的结果,同时,由于$|x|=1-y\geqslant 0, y\leqslant 1$,产生了对$y$的限制:截去了$y>1$的部分,自然,也可看成是关于直线$y=1$将射线$AP$翻折成$AP'$的结果,翻折变换的不动点$A$变成折点(顶点).

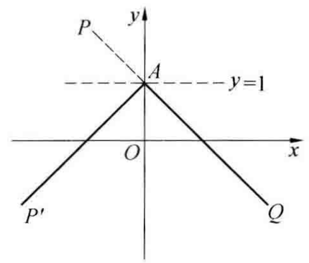


图 1.6(b)

(2) 再在y上添加"| |",得

$$|x|+|y|=1 \quad ②$$

一方面,它相当于方程

$$|x|+y=1$$

与

$$|x|-y=1$$

的结合,另一方面,由于$y=|x|-1\geqslant -1$,对于y产生了新的限制,于是②中,就有了$|y|\leqslant 1$,同样$|x|\leqslant 1$,如果从对称变换角度来看(1.6图(c)),则可把y上添加"| |",看成将射线BP'和射线DQ分别以$x=\pm 1$为轴翻折的结果,$y\geqslant -1$自动截去了$y<-1$的部分.

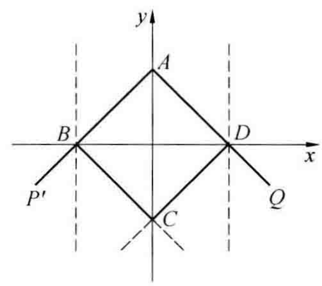


图 1.6(c)

反思 由上述分析过程可见,由"合并"(x与$-x$"合并"成$|x|$,y与$-y$"合并"成$|y|$)产生了两种意义,一是图形的翻折,二是变量范围的限制,正是这两种作用,使得$x+y=1$这条直线在加上"| |"后,变成了正方形的方程$|x|+|y|=1$.

例 5 对$|x|=|y|$的分析.

分析 两边依次去掉绝对值符号,可得四个方程

$$x=y, x=-y, -x=y, -x=-y$$

因此,可看作四个方程的合并,却并未显出对取值范围的限制. 其图形如图 1.7,事实上,如先分为

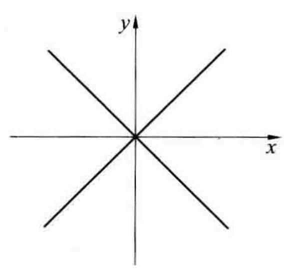


图 1.7

$$x=|y|;\quad (x\geqslant 0)$$
$$-x=|y|.\quad (x\leqslant 0)$$

可见,还是分别限制了的,只是在合并时,又互相补充,似乎把"限制"取消了.