The Modern Geometry of The Triangle

数学·统计学系列

近代的三角形几何学

[英] 盖拉特雷 著　单墫 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数学·统计学系列

近代的三角形几何学

The Modern Geometry of The Triangle

[英] 盖拉特雷 著

单墫 译

安徽大学图书馆
藏书
www.lib.ahu.edu.cn

HITP
哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

盖拉特雷的《近代的三角形几何学》，与约翰逊的《近代欧氏几何学》一样，是平面欧氏几何学的经典之作。以三线坐标和重心坐标为工具，对内接外切的三角形族、西摩松线、垂足三角形、垂极点、逆垂足三角形、三角形的正射影、互逆点、莱莫恩几何、莱莫恩-布洛卡几何、枢纽点和塔克圆等做了深入的研究和探讨。介绍并证明了很多精致的定理，优美的结论和重要的成果。内容丰富，如入山阴道上，美景令人目不暇接。

本书的后半部还汇集了大量近现代三角形几何的研究文章，其中有很多新内容，使用电脑发现的新结果尤其引人注目。

本书适合理、工科师生及数学爱好者研究和收藏。

图书在版编目(CIP)数据

近代的三角形几何学/(英)盖拉特雷著；单墫译.
—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2012.7
ISBN 978-7-5603-3633-6

Ⅰ.①近… Ⅱ.①盖…②单… Ⅲ.①三角形-几何学 Ⅳ.①O123.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 148424 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 李 慧
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 23.25 字数 443 千字
版 次 2012 年 7 月第 1 版 2012 年 7 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-3633-6
定 价 48.00 元

(如因印装质量问题影响阅读，我社负责调换)

◎译者赘言

三角形,几何学中最基本、最简单的图形.然而,在三角形中却有许许多多非常美妙的性质.例如大数学家欧拉发现:三角形的外心、重心、垂心在一条直线上(这条直线也就从此被称为欧拉线).再如拿破仑定理:以三角形的边为边向外作正三角形,所作的3个正三角形的中心也必定构成正三角形.莫莱定理:对任意三角形,作各个角的三等分线,这些线的3个交点必定构成正三角形.费尔巴哈定理:三角形的九点圆与内切圆相切.等等.可以说是"入之愈深,其进愈难,而其见愈奇"(王安石《游褒禅山记》),而且更多的"奇伟瑰怪非常之观"还在前面等待我们.

对三角形的性质的研究,已经形成一个专门的几何分支,称为三角形几何学.盖拉特雷的这本《近代的三角形几何学》就是这一分支的奠基性的经典.这本书长期以来没有中文译本,原著国内也很难见到.叶中豪先生怂恿我将它译成中文.他又从各种杂志中选取了很多与三角形几何学有关的文章,嘱我一并译出.为了使读者对这方面的研究有更多的了解,我们翻译了二十多篇文章,构成本书的后半部分.由于生病,拖了很久方才竣工.

三角形几何学的基本内容,不太熟悉的读者可以先看约翰逊的《近代欧氏几何学》(单墫译,上海教育出版社 1999 年出版). 例如在很多文章中出现的"三线极线"便可在该书中译本 137 页查到.

三角形几何学的研究方法,除了综合法外,还有解析法. 但通常解析几何所用的直角坐标,却不很适用. 因为三角形的三个顶点应有平等的地位,以采用三线坐标或重心坐标为宜. 盖拉特雷的书采用的就是这种坐标. 有趣的是,重心坐标在现代的机器证明中,又被广泛采用.

三角形几何学的研究,还有一个新方法特别值得注意,那就是大量使用电脑,去探索、发现新的结果,从《三角形的欧拉-约尔刚-索迪三角形》,《一个三角形所在平面上的一般点与一般线》等文就可以略见一斑.

三角形几何学,与电脑结合,老树新花,已成为一个方兴未艾、值得关注的几何分支.

为了帮助读者理解,在有些段落增加了一些译者注。

囿于水平与精力,种种不足之处,恳请读者予以指正.

单 墫

2004 年于广州三元里

本译稿在 2004 年即已送上海教育出版社,但迟迟未能出版. 感谢哈尔滨工业大学出版社刘培杰先生,张永芹女士与李慧女士,由于他们的努力,这本书终于问世。

2012 年元旦于南京善斋

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

◎ 序

这本关于三角形的几何的小书,展现近三十年来对于这一课题的较为重要的研究.作者不仅希望而且预期这些有趣的定理(一些是英国的,但大多数来自法国与德国),将开拓我们数学教师的眼界,给他们的教学引入新的活力.

书中包括作者的一些刊于《教育时刊》(Educational Times)上的文章,作者对这家期刊的编辑表示感谢.(以下略去感谢名单)

威廉·盖拉特雷

◎各章提要

（数目表示节数）

第 1 章　引言：有向角(1 - 13)

$\theta_1\theta_2\theta_3$ 与 pqr 之间的关系，两直线成直角的条件，pqr 之间的关系，$(\alpha\beta\gamma)$ 与 $(\alpha'\beta'\gamma')$ 之间的距离．直线的垂线，四边形的性质，中心圆．

第 2 章　中点坐标与三极坐标(14 - 21)

中点坐标，费尔巴哈点，四边形的中点线，九点圆，外接圆直径的三极坐标，一般直线（的三极坐标），圆，求一点具有已知的三极坐标，极限点的三极坐标．

第 3 章　内接外切的三角形族(22 - 34)

内接外切的条件，$O(R)$ 与 $I(r)$ 的根轴，点 $S_1S_2\sigma H_iG_i$ 对

内接外切的三角形族固定，$FGHO'I'NM$ 的轨迹为圆，奈格尔点 N 的性质，约尔刚点 M，内切外接族的公式，求 M 的轨迹.

第 4 章　西摩松线(35 - 55)

作方向给定的西摩松线，西摩松线平分 TH，$OAH=\sigma_1$，A，B，C 到西摩松线的距离，西摩松线的方程，垂线 TU 的长与方向，四边形的 N 点，一对西摩松线，点 ω，圆(kk')，TOT' 的方程，ω 关于 ABC 与 $A'B'C'$ 的方程，(kk') 的圆心 O_1，三尖点的圆内旋轮线，$\sin\phi(\cos\phi)$ 的三次曲线，Greenhill 与 Dixon 定理.

第 5 章　垂足三角形(56 - 69)

垂足三角形 def 相似于 LMN，$BSC=A+\lambda$，$\sin\lambda\propto ar_1$，极限点，Π 用 xyz 表示，根轴(例题) 费尔巴哈定理；U，Π，OS^2 与$(\alpha\beta\gamma)$ 用 $\lambda\mu\nu$ 表示；阿茨抛物线，S 的反演点 S_1 的有关结论；T，T' 的西摩松线是 def，$d_1e_1f_1$ 的相似轴.

第 6 章　垂极点(70 - 80)

pp'，qq'，rr' 共点；$\delta=2R\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3$；用几何方法得出 S；S 的一般的 n. c.，点 σ 在九点圆上；σ 关于 ABC 与 $A'B'C'$ 的 n. c.；σ 与 ω 重合；三条西摩松线通过一点，互倒关系；莱莫恩定理，垂足圆过 $\sigma(\omega)$，S 对 def 的常数 b. c.；直线的调和组；σ 是四个圆的公共点(见附录 Ⅰ 与 Ⅱ).

第 7 章　逆垂足三角形(81 - 87)

角坐标，正交与逆垂足三角形；S' 的 n. c.，$V'=\frac{1}{2}M$；U 与 V' 的位似中心的 n. c.；S_1 与 S'_1 的类似性质，$V_1-V'_1=4\Delta$；S' 与 S'_1 称为双生点.

第 8 章　三角形的正射影(88 - 100)

在过平面 ABC 上定轴的平面上,三角形 ABC 的射影的形状与大小;ABC 射影成具有给定角的三角形;ABC 在倾角为常数的平面上的射影;$\sum a'^2\cot A = 2\Delta(1+\cos^2\theta),\cdots$;正三角形与布洛卡角;逆垂足三角形与射影;$a',b',c'$ 的计算;垂足三角形与射影;对任意三角形 XYZ 的一般理论;舒特圆.

第 9 章　互逆点(101 - 116)

α',Π,U',M',q^2 用 $\lambda\mu\nu$ 表示;$\Pi\Pi'=4R^2q^2$;短轴的方程;$SA\cdot S'A=AB\cdot AC$;σ_0 关于 $A'B'C'$ 的 b. c. ;$p^2=\frac{1}{2}\frac{\Delta}{N}$;比 $Bl:Cl$;垂足圆交九点圆于 ω,ω';Aiyar 定理;$OS\cdot OS'=2R\cdot O'\sigma_0$;M'cay 的三次曲线;互逆点的锥线,渐近线与轴的方向;对 TOT',锥线是等轴双曲线;中心,渐近线,半轴长的平方;S' 与 S'_1 的类似结果;双生点连线 $S_1S'_1$ 被 ω 平分;圆心为 S,半径为 SS'_1 的圆过 $l'm'n'$.

第 10 章　莱莫恩几何(117 - 129)

求 K,K 的 b. c. ,n. c. ;def 的 K 重心;OK 的方程;Π;$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$;$u^2+v^2+w^2$ 都在 k 取最小值,阿茨抛物线;三角形 $T_1T_2T_3,I_1I_2I_3$ 的莱莫恩点;"$s-a$" 点的表;AK 平分平行于 T_2T_3 的弦;调和四边形;$A'l$ 过 K;ABC 的内接矩形的中心的轨迹,$\cos\theta_1\propto a(b^2-c^2)$;$OK$ 的三极方程;阿波罗尼圆;莱莫恩轴;调和四边形;反演成正方形.

第 11 章　莱莫恩 - 布洛卡几何(130 - 152)

$\cot\omega$ 的形式;Ω 与 Ω' 的 n. c. ,b. c. ;$\Omega\,\Omega'$ 的方程;ω 不大于 $30°$;有用的公式;纽堡圆;斯坦纳角;Ω 的垂足三角形;三角形 XBC,YCA,ZAB(又见附录 Ⅲ);第一布洛卡三角形 PQR;透视中心 D;透视轴的方程;ABC,PQR 的二重点 G;OK 垂直平分 $\Omega\,\Omega'$;$O\Omega=eD,OK=eR\sec\omega$;斯坦纳与泰利点;图 $KPROQ$ 相似于

$\Sigma ACTB$;点 yzx, zxy, xyz 的重心 G;应用于 PQR;$D\Omega\Omega'$ 的重心 G;D 在 ΣOT 上, $OD = e^2R$,等力点与 δ_1;等角点 δ' 与 δ'_1;外接椭圆与斯坦纳椭圆.

第 12 章　相细点,塔克圆(153 - 166)

调和三角形对;内切与外接于 ABC;与锥线相切的圆族;塔克圆;公式表;根轴;第一莱莫恩圆;$\Omega\Omega'$ 的垂足圆;第二莱莫恩圆;泰勒圆;泰勒圆的极限点的三极坐标与 $\cot A$,$\cot B$,$\cot C$ 成比例.

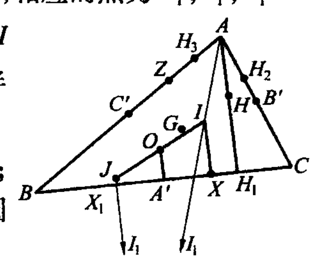
◎目录

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

引言:有向角

第1章

1. 在本书中,采用以下约定:$\triangle ABC$ 的外心(外接圆圆心)记为 O;垂心记为 H;从 A,B,C 到 BC,CA,AB 的垂线的垂足分别记为 H_1,H_2,H_3($\triangle H_1H_2H_3$ 称为垂心三角形);AH_1,BH_2,CH_3 的长记为 h_1,h_2,h_3;重心为 G;内心与旁心为 I,I_1,I_2,I_3;圆 I 与 $\triangle ABC$ 的边的切点为 X,Y,Z;对于圆 I_1,相应的点为 X_1,Y_1,Z_1.



$\triangle I_1I_2I_3$ 的外心是 J,它在直线 OI 上,并且 $OJ=OI$,$\triangle I_1I_2I_3$ 的外接圆的半径为 $2R$[①].

BC,CA,AB 的中点是 A',B',C';$\triangle A'B'C'$ 称为中点三角形.它的外接圆是九点圆,圆心为 O',半径 $=\frac{1}{2}R$.$\triangle A'B'C'$ 的垂心是 O,重心是 G,内心记为 I'.

过 A,B,C 与 BC,CA,AB 平行的直线组成逆中点三角形 $A_1B_1C_1$.

它的外心是 H,重心是 G,九点圆是 $\triangle ABC$ 的外接圆,九点圆圆心是 O.

① 译者注:I 为 $\triangle I_1I_2I_3$ 的垂心,O 为 $\triangle I_1I_2I_3$ 的九点圆圆心,所以有以上结论.

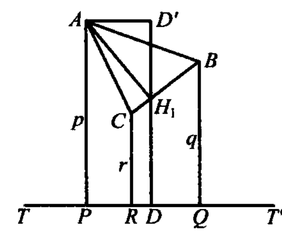
"n. c." 表示正则坐标(也称为三线坐标)①,记为 $\alpha\beta\gamma$②.

"b. c." 表示重心坐标(也称为面积坐标或三角形坐标),记为 xyz③. 于是,$x=a\alpha$,等等,所以

$$x+y+z=2\Delta$$

2. 设 A,B,C 到一条直线 TT' 的垂线的长为 p,q,r.

设 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ 为 TT' 的方向角;即 $\triangle ABC$ 的边与 TT' 所构成的角,这些角均以 TT' 为轴,依同一方向,从 TT' 量到相应的边.



将 $\triangle ABC$ 的边射影到 TT' 或 TT' 的垂线上,得

$$\sum a\cos\theta_1=0,\ \sum a\sin\theta_1=0$$

右图表明 $a\sin\theta_1=q-r$,等等. 所以

$$\sum ap\sin\theta_1=\sum p(q-r)=0$$

两组有向角值得特别注意:

对直线 OI

$$\cos\theta_1=\frac{A'X}{OI}=\frac{\frac{1}{2}(b-c)}{OI}\propto(b-c)④$$

对直线 OGH

$$\cos\theta_1=\frac{A'H_1}{OH}=\frac{R\sin(B-C)}{OH}\propto\frac{b^2-c^2}{a}⑤$$

用 p,q,r 表示 $\cos\theta_1$:

因为 $$CH_1:H_1B=b\cos C:c\cos B$$

所以

$$q\cdot b\cos C+r\cdot c\cos B=(b\cos C+c\cos B)H_1D⑥=$$
$$a(p-H_1D')=ap-a\cdot AH_1\cos\theta_1$$

---

① 译者注:α 即点 P 到 $\triangle ABC$ 的边 BC 的距离. 当 P 与 A 在 BC 同侧时,α 为正;当 P 与 A 在 BC 异侧时,α 为负. β,γ 的意义与此相同. 但本书有时也将 $k\alpha,k\beta,k\gamma$(k 为任一实数)称为 P 的 n. c. 而称(α,β,γ)为绝对的三线坐标.

② 译者注:$\alpha\beta\gamma$ 即(α,β,γ).

③ 译者注:xyz 即(x,y,z).

④ 译者注:$l\propto m$ 表示 l 与 m 成正比.

⑤ $R\sin(B-C)=\frac{1}{2}(b\cos C-c\cos B)=\frac{1}{2a}[(a^2+b^2-c^2)-(a^2+c^2-b^2)]=\frac{b^2-c^2}{a}$.

⑥ 译者注:这一等式以 TT' 为轴,用定比分点公式得出 $H_1D=\frac{q\cdot b\cos C+r\cdot c\cos B}{b\cos C+c\cos B}$.

$$2\Delta\cos\theta_1 = ap - bq\cos C - cr\cos B$$

当 H_1 落在线段 DD' 外面时,上式右边各项变号①.

3. 确定直线 $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ 与 $l'\alpha + m'\beta + n'\gamma = 0$ 成直角的条件:

设 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ 与 ϕ_1,ϕ_3,ϕ_3 为两条直线的方向角,则 $\theta_1 = \phi_1 \pm \frac{1}{2}\pi$.

设 p,q,r,p',q',r' 为 A,B,C 到这两条直线的距离,则 $l \propto ap, l' \propto ap'$②.

由于 $$ap'\sin\phi_1 + \cdots = p'(q' - r') + \cdots = 0$$

并且

$$2\Delta\sin\phi_1 = 2\Delta\sin(\theta_1 \pm \frac{1}{2}\pi) = 2\Delta\cos\theta_1 = ap - bq\cos C - cr\cos B$$

所以 $$ap'(ap - bq\cos C - cr\cos B) + \cdots = 0$$

即 $$ll' + mm' + nn' - (mn' + m'n)\cos A - \cdots = 0$$

这就是所求的条件.

4. 确定 b. c. 为 (x,y,z) 的点 P 到 TT' 的垂线的长 π(用 p,q,r 表示):

因为 P 是 A,B,C 处重量与 x,y,z 成比例时的重心,所以

$$(x + y + z)\pi = px + qy + rz$$ ③

因此在 p,q,r 已知时,π 即被确定.

注意仅需知道 x,y,z 的比.

5. 当 TT' 是 $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ 时,确定 π:

令 $$l^2 + \cdots - 2mn\cos A - \cdots \equiv D^2$$ ④

现在 $$l \propto ap \equiv k \cdot ap$$ ⑤

又 $$\sum(a^2p^2 - qr \cdot 2bc\cos A) \equiv 4\Delta^2$$ ⑥⑦

并且 $$x + y + z = a\alpha + b\beta + c\gamma = 2\Delta$$

---

① 译者注:当 H_1 落在线段 DD' 外面时, $\cos\theta_1$ 为负.所以上式仍成立,不需将右边各项变号.

② 译者注:参见 ③.其中 $l = ap, m = bq, n = cr$.

③ 译者注:特别地,当 P 在 TT' 上时,$\pi = 0$.从而 $pa\alpha + qb\beta + rc\gamma = 0$ 就是直线 TT' 的方程.

④ 译者注:记号"≡",在本书表示"定义为","记为".

⑤ 译者注:即由于 l 与 ap 成正比,令 $l = k \cdot ap$.

⑥ 译者注:"≡"应为等号.

⑦ 译者注:此式之来源见下面 6 节.

因此①
$$\pi=\frac{l\alpha+m\beta+n\gamma}{D}$$

这种公式用途不大,因为 D 的值大都难以定出.

6. 在三条垂线长 p,q,r 中任意两个绝对给定时,直线 TT' 就被确定. 因此它们之间必定有某些关系.

由初等解析几何

$$2\Delta=AP\cdot QR+BQ\cdot RP+CR\cdot PQ=$$
$$p\cdot a\cos\theta_1+q\cdot b\cos\theta_2+r\cdot c\cos\theta_3$$

所以

$$4\Delta^2=ap\cdot 2\Delta\cos\theta_1+\cdots=ap(ap-bq\cos C-cr\cos B)+\cdots=$$
$$\sum(a^2p^2-2bc\cos A\cdot qr)=\sum\{a^2p^2-(-a^2+b^2+c^2)qr\}$$

这就是所求的关系.

在 TT' 过 A 时,$p=0$,所以

$$b^2q^2+c^2r^2-2bc\cos A\cdot qr=4\Delta^2$$

7. 设 TT' 上的点 p,p' 的绝对 n. c. 是 (α,β,γ),(α',β',γ') 要用这些坐标来确定 pp' 的长 d.

我们有
$$\sum\{a^2p^2-(-a^2+b^2+c^2)qr\}=4\Delta^2$$

而
$$a^2=2\Delta(\cot B+\cot C)$$

并且
$$-a^2+b^2+c^2=4\Delta\cot A$$

因此
$$(q-r)^2\cot A+(r-p)^2\cot B+(p-q)^2\cot C=2\Delta$$

而
$$q-r=a\sin\theta_1=a\cdot\frac{\alpha-\alpha'}{d}$$

所以

$$\frac{\Delta}{R^2}\cdot d^2=(\alpha-\alpha')^2\sin 2A+(\beta-\beta')^2\sin 2B+(\gamma-\gamma')^2\sin 2C$$

8. 证明:当 TT' 为外接圆直径时

---

① 译者注:将 l 等用 $k\cdot ap$ 等代入,得 $k^2\cdot 4\Delta^2=D^2$,所以 $k=\frac{D}{2\Delta}$. 由第4节,$\pi=\frac{px+qy+rz}{x+y+z}=\frac{pa\cdot\alpha+qb\cdot\beta+rc\cdot\gamma}{2\Delta}=\frac{k(pa\cdot\alpha+qb\cdot\beta+rc\cdot\gamma)}{D}=\frac{l\alpha+m\beta+n\gamma}{D}$.

$$\frac{ap}{R}=b\cos\theta_3+c\cos\theta_2 ①\qquad\qquad (\mathrm{G})②$$

由第 2 节,我们可以将右边用 p,q,r 来表示.

然后应用条件 $a\cos A\cdot p+\cdots=0$,从而获得结论.

因此证明了,对 OI

$$p=\frac{R}{OI}\cdot\frac{(b-c)(s-a)}{a}③$$

对 OH
$$p=\frac{R}{OH}\cdot\frac{(b^2-c^2)\cos A}{a}④$$

TOT' 的方程 $p\cdot a\alpha+\cdots=0$,现在可写成

$$(b\cos\theta_3+c\cos\theta_2)\alpha+\cdots=0$$

的形式.

对 OI

$$(b-c)(s-a)\cdot\alpha+\cdots=0$$

$$[(\cos B-\cos C)\cdot\alpha+\cdots=0 \text{ 更为有用}]$$

对 OGH
$$(b^2-c^2)\cos A\cdot\alpha+\cdots=0$$

9. 刚才获得的结果,在研究一个四边形的某些代数关系时,颇为有用. 这个四边形⑤以 BC,CA,AB 为其三边,第四边是 PQR.

四个三角形 AQR,BRP,CPQ,ABC 的外接圆有一公共点(记为 M). 因此与这四边形的四条边相切的抛物线以 M 为焦点,而四个垂心在准线上. 这抛物线

---

① 译者注:似应为 $-\frac{ap}{R}=b\cos\theta_3+c\cos\theta_2$. 推导如下:右边 $=\frac{1}{2\Delta}[c(bq-cr\cos A-ap\cos C)+b(cr-ap\cos B-bq\cos A)]=\frac{1}{2\Delta}[-ap(c\cos C+b\cos B)+2R\cdot cr(\sin B-\sin C\cos A)+2R\cdot bq(\sin C-\sin B\cos A)]=\frac{1}{2\Delta}[-ap(c\cos C+b\cos B)+2R(cr\cos C\sin A+bq\cos B\sin A)]=\frac{2R\sin A}{4R^2\sin A\sin B\sin C}\cdot(-p)(c\cos C+b\cos B+a\cos A)=-\frac{ap}{R}$. 另一种推导见第 50 节.

② 原注:凡标有(G)的定理与证明均为本书作者的结果.

③ 由第 2 节,$b\cos\theta_3+c\cos\theta_2=\frac{1}{2\cdot OI}[b(a-b)+c(c-a)]=\frac{1}{OI}\cdot(c-b)(s-a)$.

④ 由第 2 节及该节注⑤,$b\cos\theta_3+c\cos\theta_2=\frac{1}{2\cdot OH}[\frac{b}{c}(a^2-b^2)+\frac{c}{b}(c^2-a^2)]=\frac{1}{2bc\cdot OH}(c^2-b^2)(c^2+b^2-a^2)=\frac{1}{OH}\cdot(c^2-b^2)\cos A$.

⑤ 译者注:这里四边形指四条直线组成的图形.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com