龙门

学生专用版

新教案

在线课堂

高一数学（上）

全新修订

● 丛书主编 周益新 ● 本册主编 黄孝银

龍門書局
www.Longmenbooks.com

龙门

学生专用版

在线课堂

新教案

高一数学（上）

（全新修订）

主　编　黄孝银

撰　稿　胡国书　唐绍斌　程志鸿　胡联敏　范道文
刘劲松　李景清　王昭胜　丁评虎　梅　艳
鲁晓波　鲍光荣　鲍文奎　戴　威　乐瑞芳
程治友　张德志　刘杰锋　程万里　蔡坤芳
管一新　郑金华　罗学良　彭元炳　饶水平
郭小红　冯军民　汪正龙　陈文意　吴振铎

龍　門　書　局

北　京

图书在版编目(CIP)数据

龙门新教案.在线课堂.高一数学.上/周益新丛书主编;黄孝银分册主编.—北京:龙门书局,2006
ISBN 7-80160-913-1
Ⅰ.龙…　Ⅱ.①周…②黄…　Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ.G634
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 033629 号

责任编辑:谢　磊　董淑朋

龍門書局出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.longmenbooks.com
北京市东华印刷厂印刷
科学出版社总发行　各地书店经销
*
2003 年 6 月第　一　版　开本:880×1230　大 16 开
2006 年 5 月第三次修订版　印张:12 1/2
2006 年 5 月第 八 次 印 刷　字数:320 000
印数:149 001—169 000
定　价:17.50 元
(如有印装质量问题,我社负责调换)

策划者语

学会学习，轻松考高分

你会学习吗？

在学习中，你是否存在以下问题：

♪你上课会不会经常走神？老师讲课有些内容你没有听懂怎么办？

如果你上课经常走神，或者没有听懂老师的讲解，而你又不喜欢问老师问题，那你在学习的过程中就会有很多不懂的问题。一个个不懂的问题积攒在一起，形成一片片知识空白。长此以往，你的成绩能提高吗？

因此，你需要一个能够像播放 DVD 一样将老师讲解再现的“纸上课堂”。

♪你在家里学习，有问题不会怎么办？

老师不在身边，家长帮不上你的忙，问题不会，无处可问，成绩怎样，可想而知。

所以，你需要一个可以随时提问、不受约束的“便携式纸上教练”。

这些问题是大多数学生的通病，但正是它们导致你的成绩徘徊不前。我们策划这套书就是为了解决大家在学习中的这些问题——**你可以在较短的时间内学得更多，记得更牢，练得更精。**

如何利用本丛书迅速提高学习成绩？

本套丛书是**专门为那些渴望成为优等生的同学设计的**，它可以用于**预习、上课、课后作业时**。栏目设计新颖别致，有自己独特的功能，你在使用时一定要特别留心以下几个栏目：

问题探究

在新课标的新考试形势下，**“着重考查学生运用知识分析和解决实际问题的能力”明确写入中高考考试大纲，研究性学习的内容成为考试热点。**

为了从一开始就培养你的创新能力和研究性学习的能力，本书特别设计了“问题探究”这一栏目。学会如何思考、搜集信息、获得答案，应对考试不再困难。你可一定要特别注意哦！

教材全解

透彻理解教材的重要知识点，这是你解决一切问题的基础。**千万不要教材知识点还没搞明白就去追难题！**

这一部分就像老师上课一样，帮你透彻理解教材知识点，在此基础上匹配典型例题，加深你对该知识点的理解。老师还为你总结了方法技巧、易错误区等，然后通过一两题随堂练习，检测你是否真正掌握了该知识点。

主干知识梳理 **中考试题链接**

为了帮助你更好地复习应考，本书特别设计了“单元小结与复习”一节：

1. 所谓“磨刀不误砍柴工”，这就是说，如果你的刀快，那么砍起柴来肯定既多又快还省劲。可是如何让刀快呢？很简单，就是对教材中的各知识考点了然于心，面对考题也就能很快找对思路，难题也就迎刃而解。

“主干知识梳理”将各单元你最需要掌握的问题全部归纳在一起，尤其是在期中、期末复习时，只要你完全记在心里，相信你一定能取得满意的成绩！

2. 在你身边，肯定有很多同学把做题奉为取得好成绩的“法宝”。可是当你筋疲力尽地做了一天的题却发现毫无成效时，你一定很困惑吧？其实你是没有找到使用“法宝”的秘诀，练错了题，白做功！**力气要花在刀刃上，这刀刃就是中考真题。**

“中考试题链接”精选各地最新中考真题，帮助你在最短的时间内练到位，获得事半功倍的效果。只要你是聪明人，一定能品出其中的妙处！

“世上无难事，只怕有心人。”渴望成为优等生的你，一定要做生活的有心人，那么，开始行动起来吧！

《龙门新教案·在线课堂》

丛书策划组

编委会

目录

龙门新教案

高一数学(上)

第一章 集合与简易逻辑

第二章 函数

第三章 数列

第一章 集合与简易逻辑

第一节 集 合

第一讲

康托尔是19世纪末20世纪初德国伟大的数学家，集合论的创立者，是数学史上最富有想像力，最有争议的人物之一.19世纪末，他从事的关于连续和无穷的研究从根本上背离了数学中关于无穷的使用和解释的传统，从而引起了激烈的争论乃至严厉的谴责.然而数学的发展证明康托尔是正确的.他所创立的集合论被誉为20世纪最伟大的数学创造，集合的概念大大扩充了数学的研究领域，给数学结构提供了一个基础.集合论不仅影响了现代数学，也深深影响了现代哲学和逻辑学.

教材全解

重点1 集合的概念 (★★)

一般地，某些指定对象的全体就成为一个集合，也简称集.集合中的每个对象叫做这个集合的元素.如果 a 是集合 A 中的一个元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 中的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$(或 $a\overline{\in}A$).

"一般地，某些指定的对象的全体就成为一个集合，简称集."这句话是对集合概念的描述性说明.所以，集合是没有给出严格定义的数学概念.以后，为方便起见，我们经常用大写的拉丁字母表示集合.例如，$A=\{$英国，法国，美国，俄罗斯$\}$，$B=\{2,3,5,7\}$等.集合的元素常用小写拉丁字母表示.由此可知:

(1)元素与集合之间有属于($\in$)和不属于($\notin$或$\overline{\in}$)两种关系.如:$2\in\{2,3\}$，$4\notin\{2,3\}$；

(2)"对象"即集合中的"元素"并不拘泥于"数"或"点".

[例1] 考察下列每组对象能否构成一个集合?

(1)所有的好人；

(2)不超过20的非负数；

(3)我班16岁以下的学生；

(4)直角坐标系中横坐标与纵坐标相等的点；

(5)高个子的人.

思路 某些对象能否构成集合呢?要看这些对象是否被指定.集合的元素具有确定性，对于集合 A 和某一对象 x，有一个明确的判断标准是 $x\in A$，还是 $x\notin A$，二者必居其一，不会模棱两可.

解:(1)"所有的好人"无明确的标准，对于某个人是否是"好人"无法客观地判断，因此(1)不能构成集合；类似地"所有的坏人"也不能构成集合；

(2)任给一个实数 x，可以明确地判断是不是"不超过20的非负数"，即"$0\leqslant x\leqslant 20$"与"$x>20$ 或 $x<0$"，两者必居其一，且仅居其一，故"不超过20的非负数"能构成集合；类似地"不小于-20的非正数"也能构成集合；类似地，可对(3)、(4)、(5)进行判断.故________不能构成集合，________能构成集合.

思维 充分理解集合的概念，在此题的判断中，注重的是集合元素的确定性.

随堂练习

1.(1)满足 $x^2-1=0$ 的实数能否构成一个集合?为什么?

(2)满足 $x^2+1=0$ 的实数能否构成一个集合?为什么?

重点2 集合的特征 (★★★)

对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的、互异的、无序的，这又称作集合元素的三个特征.

(1)"确定性"是指对于一个给定的集合，任何一个对象或者是集合中的一个元素，或者不是它的元素，两者必居其一.如[例1](2)、(3)、(4)；

(2)"互异性"是指集合中的任何两个元素是互不相同的，任何两个相同的对象在同一个集合中时，只能算作这个集合中的一个元素.例如，方程 $x^2+2x+1=0$ 的解组成的集合为$\{-1\}$，而不是$\{-1,-1\}$；

(3)"无序性"是指在一个集合中，通常不考虑它的元素之间的顺序.例如，由数1,2,3组成的集合可以表示为$\{1,2,3\}$，也可以表示为$\{3,1,2\}$，这两种表示形式为同一个集合.

[例2] 已知集合 $M=\{a,b,c\}$ 中的三个元素可构成某一三角形的三边长，那么此三角形一定不是 ( )

A. 直角三角形 B. 锐角三角形

C. 钝角三角形 D. 等腰三角形

思路 解这道题应从集合元素的三大特征入手，应侧重考虑哪一特征?

解:集合中元素的________是解本题的侧重点.由于 a、b、c 三个元素不相同，故由它们组成的三角形一定不是等腰三角形.本题应选择________.

思维 集合元素的三大特征在解题中的作用不能忽视.

随堂练习

2. 求集合$\{1,x,x^2-x\}$中元素x所满足的条件.

重点3 常用数集的记法 (★★★)

常用数集	简　称	记法
全体非负整数的集合	非负整数集(或自然数集)	$\mathbf{N}$
非负整数集内排除0的集合	正整数集	$\mathbf{N}^*$或$\mathbf{N}_+$
全体整数的集合	整数集	$\mathbf{Z}$
全体有理数的集合	有理数集	$\mathbf{Q}$
全体实数的集合	实数集	$\mathbf{R}$

按照概念外延的大小,可以将$\mathbf{N}^*$、$\mathbf{N}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{R}$按序填入图1-1-1中.

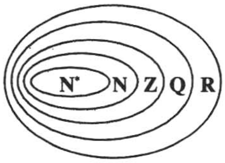


图1-1-1

注意:(1)自然数集与非负整数集是相同的,也就是说,自然数集包括数0,即$0\in\mathbf{N}$但$0\notin\mathbf{N}^*$;

(2)非负整数集内排除0的集,表示成$\mathbf{N}^*$或$\mathbf{N}_+$,$\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$、$\mathbf{Z}$等其他数集内排除0的集,也是这样表示,例如,整数集内排除0的集,作"$\mathbf{Z}^*$".

[例3] 用适当的符号填空:

①3.14 ______ $\mathbf{Q}$,②π ______ $\mathbf{Q}$,③0 ______ $\mathbf{Z}$,

④0 ______ $\mathbf{N}_+$,⑤$\sqrt{2}$ ______ $\mathbf{Q}$,⑥$\sqrt{2}$ ______ $\mathbf{R}$.

思路 元素与集合之间的从属关系用符号$\in$或$\notin$填空.

解: ______________________.

[例4] 判断正误.

(1)实数集$\mathbf{R}$可表示为{实数};

(2)实数集$\mathbf{R}$可表示为{实数集};

(3)方程$(x^2-4x+4)(x-5)=0$的根组成的集合是$\{2,2,5\}$;

(4)集合$\{a,b,c\}$不能写成集合$\{c,b,a\}$.

思路 利用集合的特性进行判断.注意,{…}的意义是:含"…"的全体组成的集合.

解:(1)______;(2)______;(3)______;(4)______.

随堂练习

3. 判断正误:

(1)集合$\{(1,2)\}$可写成$\{1,2\}$或$\{(2,1)\}$或$(1,2)$或$\{x=1,y=2\}$;

(2)集合$\{2,4,6,8\}$与集合$\{4,8,2,6\}$表示同一集合;

(3)整数集可表示为{全体整数}.

解:(1)________;(2)________;(3)________.

问题研讨

[例5] 已知$x^2\in\{0,1,x\}$,求实数x的值.

以下是某生的解法,请问该解法错在哪里?正确的解法是什么?

思路 x是集合的元素,应满足集合中元素的互异性,故$x\neq 0,1$.

解: $\because x\neq 0,1,\therefore x^2\neq 0,1$.

又$x^2\in\{0,1,x\}$,$\therefore x^2=x$

$\therefore x=0$(舍去),$\therefore x$为实数解.

总结 解决集合问题的过程中,审题时要考虑到集合的元素的确定性,解题过程中要充分考虑到集合的元素的无序性(必要时要分类讨论),对问题的结果进行检验是否正确时可考虑利用集合的元素的互异性.

要点记忆

学习中请注意以下几点:

(1)集合与集合的元素是两个不定义的概念,与几何中的点、线、面的概念类似,但是,应把握集合元素的确定性、互异性、无序性,要明确元素的属性,这是解决集合问题的关键;

(2)集合具有两方面的含义:一方面,凡符合条件的对象都是它的元素;另一方面,凡它的元素都符合条件.这是对集合更高层次的理解;

(3)新的国家标准定义自然数集$\mathbf{N}$含元素"0",这与初中所学不同,要注意.

心得笔记

[例1] (1)、(5)不能构成集合;(2)、(3)、(4)能构成集合

[例2] 互异性 D

[例3] ①$\in$;②$\notin$;③$\in$;④$\notin$;⑤$\notin$;⑥$\in$

[例4] (1)正确;(2)错误;(3)错误;(4)错误

[例5] 逻辑错误.正确答案:$x=-1$

课后作业

班级______ 姓名______ 分数______

[基础演练]

1. 下列说法中,能表示集合的是 ( )
   A. 一切很大的数　　B. 坐标轴附近的所有点
   C. 大于 -2 的实数　　D. 聪明的人
2. 下列说法不正确的是 ( )
   A. $0 \notin \mathbf{N}$　B. $0 \notin \mathbf{N}^*$　C. $0 \notin \mathbf{N}_+$　D. $0 \in \mathbf{Q}$
3. 若 a 是 $\mathbf{R}$ 中的元素,但不是 $\mathbf{Q}$ 中的元素,则 a 可以是( )
   A. 3.14　B. -5　C. $\frac{3}{7}$　D. $\sqrt{7}$
4. 平面内,与一条定线段 AB 的两个端点所构成的 $\angle APB = 90^\circ$ 的点 P 的集合是 ( )
   A. 一条直线　　B. 一条线段
   C. 一条射线　　D. 一个圆(不包含点 A,B)
5. 若 $\{x^2, 3x+4\}$ 表示一个集合,则 ( )
   A. $x \neq 4$　　B. $x \neq -1$
   C. $x \neq -1$ 或 $x \neq 4$　　D. $x \neq -1$ 且 $x \neq 4$
6. 若 $\{1,2\}$ 与 $\{a,b\}$ 的元素相同,则 ( )
   A. $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$　　B. $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$
   C. $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$　　D. 以上都不对
7. 若 $y = \frac{6}{x+2}$, $x, y \in \mathbf{Z}$,由所有的 y 值组成的集合中元素的个数为 ( )
   A. 2　B. 4　C. 6　D. 8

[综合测试]

8. 用"$\in$"或"$\notin$"填空:
   $\sin 0^\circ$________ $\mathbf{N}_+$, $\cos 30^\circ$________ $\mathbf{Q}$, $\sin 45^\circ$________ $\mathbf{R}$,
   $\sin 90^\circ$________ $\mathbf{N}^*$, $\cos 0^\circ$________ $\mathbf{N}$, $\cos 60^\circ$________ $\mathbf{Q}$.
9. 下列四个方程:
   ① $4x^2 + 9y^2 - 4x + 12y + 5 = 0$;
   ② $6x^2 + x - 2 = 0$;
   ③ $(2x-1)^2(3x+2)^2 = 0$;
   ④ $6x^2 - x - 2 = 0$.
   其中实数解的集合为 $\left\{\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right\}$ 的个数为 ( )
   A. 3个　B. 2个　C. 1个　D. 0个
10. 由实数 $x, -x, |x|, \sqrt{x^2}, -\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合最多含有__________个元素.
11. 设 a、b、c 为非零实数,则由 $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$ 的所有值组成的集合为__________.

[探究升级]

12. 设 $A = \{x-2, 2x^2+5x, 12\}$,已知 $-3 \in A$,求 x.

13. (**2005·北京春招**)含有三个实数的集合既可表示为 $\left\{a, \frac{b}{a}, 1\right\}$,也可表示为 $\{a^2, a+b, 0\}$.求 $a^{2004} + b^{2005}$ 的值.

第一节 集 合

第二讲

教材全解

重点1 集合的表示方法之一——列举法 (★★)
列举法是把集合中的元素一一列举出来的方法.

(1)用列举法表示集合时,只需将集合中的元素一一列举出来并用大括号括起来即可;

(2)列举法有直观、明白的特点,但有些集合是不能用列举法表示的.例如"小于1的一切正数的集合",就不能把它的元素一一列举出来或列举出有足够代表性且反映出规律的元素.

[例1] 用列举法表示下列集合:

(1)方程$(x+1)\left(x-\frac{2}{3}\right)^2(x^2-2)(x^2+1)=0$的有理根的集合$A$;

(2)方程$\sqrt{2x-1}+|3y+3|=0$的解集B.

思路 先将方程的解求出,再用大括号括起来即可.

解:(1)由$(x+1)\left(x-\frac{2}{3}\right)^2(x^2-2)(x^2+1)=0$得$x=-1\in\mathbf{Q}$,$x=\frac{2}{3}\in\mathbf{Q}$,$x=\pm\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$,

$\therefore A=$____________________;

(2)方程只有当____________________________同时成立时,等式才成立,$\therefore\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=-1\end{cases}$为方程的解,即

$B=$____________.

思维 第(2)小题转化成关于x、y的二元方程组,方程组只有一组解,用小括号将$\frac{1}{2}$,-1括起来写在大括号内表明集合$B=\left\{\left(\frac{1}{2},-1\right)\right\}$只有一个元素,而有序实数对$\left(\frac{1}{2},-1\right)$按习惯$\frac{1}{2}$,$-1$分别是$x$,$y$的值.所以我们不能把$B$写成$\left\{\left(-1,\frac{1}{2}\right)\right\}$.

重点2 集合的表示方法之二——描述法 (★★★)
描述法是用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合的方法.

描述法是把集合中元素的公共属性描述出来,写在大括号内表示集合的方法.它的一般形式为$\{x\in A\mid p(x)\}$或$\{x\mid p(x)\}$."x"为代表元素,"$p(x)$"为元素x必须满足的条件,当且仅当"x"适合条件"$p(x)$"时,x才是该集合中的元素.

[例2] 用描述法表示下列集合:

(1)所有被3整除的数;

(2)图1-1-2中阴影部分的点(含边界不含虚线)的坐标的集合.

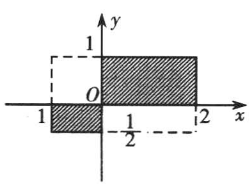


图1-1-2

思路 (1)中被3整除的数可表示为$3n$,$n\in\mathbf{Z}$;(2)中元素是坐标(x,y).也就是说先考虑元素是什么,再考虑元素必须满足的条件.

解:(1)$\{x\mid x=3n,n\in\mathbf{Z}\}$;

(2)$\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 2,-\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1$且$xy\geqslant 0\}$.

思维 使用描述法时,应注意六点:①写清楚集合中元素的代号;②说明该集合中元素的性质;③不能出现未被说明的字母;④多层描述时,应当准确使用"且""或";⑤所有描述的内容都要写在大括号内;⑥用于描述的语句力求简明、确切.

随堂练习

1.下列集合各表示数集还是点集?说说它们各有什么异同?

$A=\{x\mid x^2+2x-1=0\}$;

$B=\{y\mid y=x^2+2x-1\}$;

$C=\{(x,y)\mid y=x^2+2x-1\}$.

重点3 集合的表示方法之三——图示法 (★)
为了形象地表示集合,我们常常画一条封闭的曲线,用它的内部来表示一个集合.

如图1-1-3为集合$\{3,1,2\}$的图示法表示.图示法又称韦恩图法.

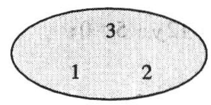


图1-1-3

重点4 集合的分类 (★★)
集合按其元素个数可分为:有限集、无限集、空集.

一般地,含有有限个元素的集合叫有限集.含有无限个元素的集合叫无限集.不含任何元素的集合叫空集.例如$A=\{x\mid x^2-1=0\}$是有限集,$B=\{x\mid x^2-1>0\}$是无限集,$C=\{x\mid x^2+1=0\}$是空集.

空集记作$\varnothing$.

[例3] 集合A满足:若$a\in A$,$a\neq 1$,则$\frac{1}{1-a}\in A$.证明:

(1)若$2\in A$,则集合A中还有另外两个元素;

(2)若$a\in R$,则集合A不可能是单元素集.

思路 反复利用题设,若$a\in A$,$a\neq 1$,则$\frac{1}{1-a}\in A$,注意角色转换,单元素集是指集合中有且只有一个元素.

证明:(1)∵ ______,∴ $\frac{1}{1-2}=-1\in A$,

∵ ______,∴ $\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\in A$,

∵ ______,∴ $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\in A$.

$\Rightarrow\begin{cases}-1\in A,\\ \frac{1}{2}\in A.\end{cases}$

(2)假设 A 是单元素集,则必有____,即 $a^2-a+1=0$.
∵ $\Delta=(-1)^2-4\times1\times1=-3<0$,方程没有实数解,故假设不成立,∴ A 不可能是单元素集.

总结　其中(2)用了反证法.对于一个否定性命题,用直接法不易证明时,可采用反证法.

问题研讨

[例 4]　(1)若集合 $A=\{0,2,3\}$,$B=\{x\mid x=a\times b,a,b\in A\}$,求 B;

(2)若集合 $M=\{x\mid ax^2-2x+1=0\}$仅有一个元素,求实数 a 的值.

思路　明确集合表示的内容是什么?

解:(1)∵ $0\times0=0\times2=2\times0=0\times3=3\times0=0$,
$2\times2=4,2\times3=3\times2=6,3\times3=9$.
∴ $B=\{0,4,6,9\}$;

(2)当 $a=0$ 时,方程 $ax^2-2x+1=0$ 的解为 $x=\frac{1}{2}$,符合条件.
当 $a\neq0$ 时,由 $\Delta=4-4a=0$ 得 $a=1$,方程 $ax^2-2x+1=0$ 的解为 $x=1$,符合条件.
∴ $a=0$ 或 $a=1$.

总结　(1)$a,b\in A$ 要注意有两种可能 $a=b$ 与 $a\neq b$;
(2)方程的系数含有参数时,不可忽视对方程的次数的讨论;
(3)对集合表示的认识,要以代表元素为切入点,首先明确元素的特性,再去看元素满足的条件,正确领会用描述法表示的集合的含义,避开因分类不全而导致的错误.

随 堂 练 习

2.用描述法表示下列集合,然后说出它们是有限集,还是无限集:
(1)由 4 和 6 的所有公倍数组成的集合;
(2)不等式 $4x-6<5$ 的解集.

随 堂 练 习

3.用列举法表示下列集合:
(1)$\{x\mid y=x,x<5,x\in\mathbf{N}\}$;
(2)$\{y\mid y=x^2-1,x<5,x\in\mathbf{N}\}$;
(3)$\{(x,y)\mid y=x^2-1,x<5,x\in\mathbf{N}\}$.

4.用描述法表示下列集合:
(1)$\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{5}{7}\right\}$;
(2)$\left\{\frac{1}{2},-\frac{2}{3},\frac{3}{4},-\frac{4}{5},\cdots,\frac{99}{100}\right\}$.

要点记忆

1.集合按照元素的个数分为三类:有限集、无限集、空集∅.空集是不含任何元素的集合,解题时我们不可忽视有可能要对空集情况加以讨论.(★★)

2.集合主要有列举法、描述法两种表示方法(此外还有图示法),重要的是在不同的场合选用合适的表示方法.描述法$\{x\in A\mid p(x)\}$的意义是使 $p(x)$为真的 A 中诸元素之集.(考点)(★★★)

3.列举法和描述法各有优点,应该根据具体问题确定采用哪种表示法.要注意,一般无限集不宜采用列举法,因为不能将无限集中的元素一一列举出来,而没有列举出来的元素往往难以确定.(★)

4.一般地,有:

列举法 $\underset{\text{根据元素满足的条件,写出具体的元素}}{\overset{\text{根据对元素规律的观察,概括出公共特征}}{\rightleftarrows}}$ 描述法.(★)

心得笔记

[例 1]　(1)$\left\{-1,\frac{2}{3}\right\}$　(2)$\begin{cases}\sqrt{2x-1}=0\\|3y+3|=0\end{cases}$,$\left\{\left(\frac{1}{2},-1\right)\right\}$

[例 3]　(1)$2\in A,-1\in A,\frac{1}{2}\in A$　(2)$a=\frac{1}{1-a}$

课后作业

班级______　姓名______　分数______

[基础演练]

1. 用 $\in$ 或 $\notin$ 填空：

(1)若 $A=\{x|x^2=x\}$，则 -1 ____ A；

(2)若 $B=\{x|x^2+x-6=0\}$，则 3 ____ B；

(3)若 $C=\{x\in\mathbf{N}|1\leqslant x\leqslant 10\}$，则 8 ____ C；

(4)若 $D=\{x\in\mathbf{Z}|-2<x<3\}$，则 1.5 ____ D.

2. 把下列集合用另一种方法表示出来：

(1) $\{1,5\}$；　(2) $\{x|x^2+x-1=0\}$；

(3) $\{2,4,6,8\}$；　(4) $\{|3<x<7$，且 $x\in\mathbf{N}\}$.

3. 方程组 $\begin{cases}x+y=1\\x-y=-1\end{cases}$ 的解集是 (　　)

A. $\{x=0,y=1\}$　B. $\{0,1\}$

C. $\{(0,1)\}$　D. $\{(x,y)|x=0$ 或 $y=1\}$

4. 下列集合中为有限集的是 (　　)

A. {周长为 12 的三角形}　B. $\{\pi\}$

C. $\{x|x^2+5x+6<0\}$　D. {不大于 4 的整数}

5. 在直角坐标系中，坐标轴上的点可表示为 (　　)

A. $\{(x,y)|x^2+y^2=0\}$　B. $\{(x,y)|x=0$ 且 $y=0\}$

C. $\{(x,y)|xy=0\}$　D. $\{(x,y)|x^2+y^2\neq 0\}$

6. 集合 $A=\{x|x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{x|x=4k+1,k\in\mathbf{Z}\}$. 又 $a\in A$，$b\in B$，则有 (　　)

A. $a+b\in A$　B. $a+b\in B$

C. $a+b\in C$　D. $a+2b\in C$

[综合测试]

7. 有以下四种说法：

①$M=\{(1,2)\}$ 与 $N=\{(2,1)\}$ 表示同一个集合；

②$M=\{1,2\}$ 与 $N=\{2,1\}$ 表示同一个集合；

③$M=\{y|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$ 与 $N=\{t|t=(x+1)^2+1,x\in\mathbf{R}\}$ 表示同一个集合；

④空集是惟一的.

其中正确的个数有 (　　)

A. 3 个　B. 2 个　C. 1 个　D. 0 个

8. 设集合 $A=\{x|x=(-1)^n,n\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{2,4,6,8\}$，$C=\{(x,y)|3x+2y=16,x\in\mathbf{N}^*,y\in\mathbf{N}^*\}$，$D=\{x\in\mathbf{Q}|1<x<2\}$，$E=\{$直角三角形$\}$，其中有限集的个数是 (　　)

A. 1 个　B. 2 个　C. 3 个　D. 4 个

9. 用列举法表示下列集合：

(1) $A=\{x|x=|x|,x\in\mathbf{Z}$ 且 $x<5\}$；

(2) $B=\{(x,y)|x+y=6,x\in\mathbf{N}_+,y\in\mathbf{N}_+\}$；

(3) $C=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{|a|}{a}+\dfrac{|b|}{b},a、b\text{ 为非零实数}\right\}$；

(4) $D=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{6}{3-x}\in\mathbf{Z},\text{且 }x\in\mathbf{N}_+\right\}$.

[探究升级]

10. 已知集合 $A=\{x,xy,xy-1\}$，其中 $x\in\mathbf{Z}$，$y\in\mathbf{Z}$，$y\neq 0$. 若 $0\in A$. 求 A 及 A 中元素之和.

11. 已知集合 $A=\{x|x\in\mathbf{R}$ 且 $ax^2-3x+2=0\}$，且 A 中元素至多只有一个，求 a 的取值范围.

第二节 子集、全集、补集

第一讲

在研究数的时候，通常要考虑数与数之间的相等与不相等(大于或小于)关系，而对于集合而言，类似的关系就是“包含”与“相等”关系.

教材全解

重点1 子集的定义 (★★★)

一般地，对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，则称集合 A 包含于集合 B，或集合 B 包含集合 A，记作

$A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$).

也称集合 A 是集合 B 的子集.

(1)注意子集符号的方向：

$A\subseteq B$ 与 $B\supseteq A$ 同义；$A\subseteq B$ 与 $A\supseteq B$ 不同；

(2)如果由任一 $x\in A$，都可以推出 $x\in B$，则 $A\subseteq B$；

(3)如果存在 $x\in A$，但 $x\notin B$，则 A 不是 B 的子集，记作 $A\not\subseteq B$.

例如，$\mathbf{N}^*\subseteq\mathbf{N}$，但 $\mathbf{N}\not\subseteq\mathbf{N}^*$.

[例1] 设集合 $A=\{1,3,a\}$，$B=\{1,a^2-a+1\}$，$A\supseteq B$，求 a 的值.

思路 $A\supseteq B$ 即 B 是 A 的子集，所以 B 中元素 $1,a^2-a+1$ 都是 A 中的元素.

解：因 $A\supseteq B$，故可分两种情况：

(1)$a^2-a+1=3$，解得 $a=-1,2$. 经检验满足题设条件；

(2)________，解得 $a=1$. 此时 A 中元素重复.

故 $a=1$ 不合题意.

综上所述，$a=-1$ 或 $a=2$.

总结 解决集合中元素的问题，最后应注意检验，结果不应与题设矛盾，也不应与元素的互异性相斥.

随堂练习

1. 设 A、B、C 是三个集合，用子集的定义说明：

(1)$A\subseteq A$；

(2)若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$.

重点2 集合相等的定义 (★★)

一般地，对于两个集合 A 与 B，如果 A 中的任何一个元素都是集合 B 的一个元素，同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的一个元素，则称集合 A 等于集合 B，记作 $A=B$.

该定义有两层意思：

(1)若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，那么 $A=B$；

(2)若 $A=B$，那么 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$；

(3)规定：**空集是任何集合的子集**.

重点3 真子集的定义 (★★)

对于集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$，并且 $A\neq B$，我们就说集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$(或 $B\supsetneqq A$).

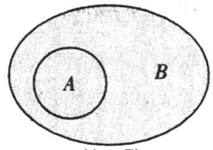
当 $A\subseteq B$ 时，有两种可能：$A=B$ 或 $A\subsetneqq B$.

$A\subsetneqq B$(如图1-2-1)要求满足两个条件：

①$A\subseteq B$；

②至少存在一个元素 $b\in B$，但 $b\notin A$.

③规定：$A\neq\varnothing$ 时，$\varnothing\subsetneqq A$. **即空集是任何非空集合的真子集**.



($A\subsetneqq B$)

图1-2-1

[例2] 写出集合 $\{a,b\}$ 的所有子集，并指出其中哪些是它的真子集.

思路 注意子集的定义与两条性质：$\varnothing\subseteq A$ 及 $A\subseteq A$.

解：集合 $\{a,b\}$ 的所有子集是 $\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{a,b\}$.

其中________是 $\{a,b\}$ 的真子集.

总结 以后可以证明：(1)若集合 A 有 n 个元素，那么它有 2^n 个子集；($n\in\mathbf{N}^*$)

(2)若集合 A 有 n 个元素，那么它有 2^n-1 个真子集；($n\in\mathbf{N}^*$)

(3)若集合 A 有 n 个元素，那么它有 2^n-2 个非空的真子集.($n\in\mathbf{N}^*$)

随堂练习

2. 写出集合 $\{a,b,c\}$ 的所有子集，并指出其中哪些是它的真子集.

3. 用适当符号($\in$，$\notin$ $=$，$\subsetneqq$，$\supsetneqq$)填空：

(1)a ____ $\{a\}$； (2)a ____ $\{a,b,c\}$；

(3)d ____ $\{a,b,c\}$； (4)$\{a\}$ ____ $\{a,b,c\}$；

(5)$\{a,b\}$ ____ $\{b,a\}$； (6)$\{3,5\}$ ____ $\{1,3,5,7\}$；

(7)$\{2,4,6,8\}$ ____ $\{2,8\}$； (8)$\varnothing$ ____ $\{1,2,3\}$.

[例3]　判断下列三个集合之间的包含关系或相等关系：

$A=\left\{x\,\middle|\,x=m+\frac{1}{6},m\in\mathbf{Z}\right\}$，

$B=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{n}{2}-\frac{1}{3},n\in\mathbf{Z}\right\}$，

$C=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{p}{2}+\frac{1}{6},p\in\mathbf{Z}\right\}$.

思路　根据题意，应从集合的包含、相等、不等的概念出发，考察集合与集合的关系.

解：对于集合 A，$x=\frac{6m+1}{6}=\frac{3(2m)+1}{6}$，$m\in\mathbf{Z}$；

对于集合 B，$x=\frac{3(n-1)+1}{6}$，$n\in\mathbf{Z}$；

对于集合 C，$x=\frac{3p+1}{6}$，$p\in\mathbf{Z}$.

从而有________________.

思维　判断集合与集合间的关系，基本方法可归结为判定元素与集合的关系.

随堂练习

4. 若 $A=\mathbf{Z}$，$B=\{x\mid x=3m+5n,m\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{Z}\}$. 试判断 A、B 之间的包含关系或相等关系.

问题研讨

[例4]　请同学们结合实例谈谈怎样区分下面一些容易混淆的符号：

(1)$\in$与$\subseteq$；　(2)a与$\{a\}$；　(3)$\{0\}$与$\varnothing$.

解：________________________________

________________________________.

思维　(1)元素与集合之间的符号只能选择用$\in$或$\notin$表示；

(2)集合与集合之间的关系只能选择用$=$，$\neq$，$\subseteq$，$\subset$，$\supseteq$，$\supset$，$\subsetneqq$，$\supsetneqq$，$\not\subseteq$，$\not\supseteq$表示.

随堂练习

5. 下列结论中正确的有__________.

(1)$a\subseteq\{a,b\}$；　(2)$\{a\}\subseteq\{\{a\},\{b\}\}$；

(3)$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$；　(4)$a\subseteq\varnothing=\{\varnothing\}$；

(5)$\varnothing\in\{\varnothing\}$；　(6)$\varnothing\subsetneqq\mathbf{N}_+=\mathbf{N}^*\subset\mathbf{N}$.

6. 设 $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，$M=\{x\mid x\leqslant\sqrt{10}\}$，则下列各式中正确的是　(　　)

A. $a\subsetneqq M$　　B. $M\subset\{a\}$

C. $\{a\}\in M$　　D. $\{a\}\subseteq M$

要点记忆

1. 概念：子集、集合相等、真子集(注意区分此三概念).

2. 性质：

(1)空集是任何集合的子集，$\varnothing\subseteq A$；

(2)空集是任何非空集合的真子集，$\varnothing\subsetneqq A(A\neq\varnothing)$；

(3)任何一个集合是它本身的子集，$A\subseteq A$.

(4)含 n 个元素的集合的子集数为 2^n；非空子集数为 2^n-1；真子集数为 2^n-1；非空真子集数为 2^n-2. $(n\in\mathbf{N}^*)$

心得笔记

[例1]　$a^2-a+1=a$

[例2]　$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$

[例3]　$A\subsetneqq B=C$

[例4]　(1)$\in$与$\subseteq$的区别：$\in$是表示元素与集合之间关系的，因此有 $1\in\mathbf{N}$，$-1\notin\mathbf{N}$ 等；$\subseteq$是表示集合与集合之间关系的，因此，有 $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{R}$，$\varnothing\subseteq\mathbf{R}$ 等；

(2)a 与 $\{a\}$ 的区别：一般地，a 表示一个元素，而 $\{a\}$ 表示只有一个元素的一个集合. 因此有 $1\in\{1,2,3\}$，$0\in\{0\}$，$\{1\}\subseteq\{1,2,3\}$ 等，不能写成 $0=\{0\}$，$\{1\}\in\{1,2,3\}$，$1\subseteq\{1,2,3\}$；

(3)$\{0\}$与$\varnothing$的区别：$\{0\}$是含有一个元素的集合，$\varnothing$是不含任何元素的集合，因此$\varnothing\subseteq\{0\}$，不能写成$\varnothing=\{0\}$或$\varnothing\in\{0\}$

课后作业

班级______　姓名______　分数______

[基础演练]

1. 在以下六个写法中:①$\{0\}\in\{0,1\}$;②$\varnothing\subsetneqq\{0\}$;③$\{0,-1,1\}\subseteq\{-1,0,1\}$;④$0\in\varnothing$;⑤$\mathbf{Z}=\{$全体整数$\}$;⑥$\{(0,0)\}=\{0\}$.其中错误写法的个数是　(　　)

A.3个　B.4个　C.5个　D.6个

2. 满足条件$\{1,2\}\subsetneqq M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$的集合$M$的个数是　(　　)

A.3个　B.6个　C.7个　D.8个

3. 集合$M=\{x\mid x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{x\mid x=4k\pm1,k\in\mathbf{Z}\}$,$M$与$N$之间的关系为　(　　)

A.$M\subsetneqq N$　B.$M\supsetneqq N$

C.$M=N$　D.$M\subseteq N$或$M\supseteq N$

4. 写出常用数集$\mathbf{Q},\mathbf{Z},\mathbf{N},\mathbf{R}$的包含关系,并用文氏图表示.

5. 判断下列各式是否正确,并说明理由:

(1)$2\subseteq\{x\mid x\leqslant10\}$;　(2)$2\in\{x\mid x\leqslant10\}$;

(3)$\{2\}\subsetneqq\{x\mid x\leqslant10\}$;　(4)$\varnothing\in\{x\mid x\leqslant10\}$;

(5)$\varnothing\not\subseteq\{x\mid x\leqslant10\}$;　(6)$\varnothing\subsetneqq\{x\mid x\leqslant10\}$;

(7)$\{4,5,6,7\}\not\subseteq\{2,3,5,7,11\}$;

(8)$\{4,5,6,7\}\not\supseteq\{2,3,5,7,11\}$.

[综合测试]

6. 集合$M=\{x\mid x=3k-2,k\in\mathbf{Z}\}$,$P=\{y\mid y=3l+1,l\in\mathbf{Z}\}$,$S=\{y\mid y=6m+1,m\in\mathbf{Z}\}$之间的关系是　(　　)

A.$S\subsetneqq P\subsetneqq M$　B.$S=P\subsetneqq M$

C.$S\subsetneqq P=M$　D.$S\supsetneqq P=M$

7. 已知集合$P=\{x\mid x^2=1\}$,集合$Q=\{x\mid ax=1\}$.若$Q\subseteq P$,那么a的值是　(　　)

A.1　B.-1　C.1或-1　D.0、1或-1

8. 设集合$A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant3\}$,$B=\{x\mid x-a\geqslant0\}$.若$A\subsetneqq B$,求实数$a$的取值范围.

9. 试表示$A=\{(x,y)\mid y=|x|\}$和$B=\{(x,y)\mid y>0,x\in\mathbf{R}\}$之间的关系.

[探究升级]

10. 已知集合$A=\{x\mid x^2+x-6=0\}$,$B=\{x\mid mx-1=0\}$.若$B\subsetneqq A$,求实数m的取值范围.

11. 数集M满足条件:若$a\in M$,则$\dfrac{1+a}{1-a}\in M$($a\neq\pm1$,且$a\neq0$),已知$3\in M$.

(1)用列举法表示集合M;

(2)写出集合M的所有真子集.

第二节　子集、全集、补集

第二讲

教材全解

重点1　补集(或余集)的定义　(★★★)

一般地,设 S 是一个集合,A 是 S 的一个子集(即 $A\subseteq S$),由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合,叫做 S 中子集 A 的补集(或余集),记作 $\complement_S A$,即

$\complement_S A=\{x\mid x\in S,且\ x\notin A\}$.

符号 $\complement_S A$ 有三层含义:

(1) A 是 S 的一个子集,即 $A\subseteq S$;

(2) $\complement_S A$ 表示一个集合,且 $\complement_S A\subseteq S$;

(3) $\complement_S A$ 是由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合,即

$$\complement_S A=\{x\mid x\in S,且\ x\notin A\}.$$

这几点,我们从图1-2-2可以知道.

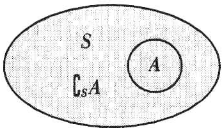


图1-2-2

[例1]　设集合 $A=\{|2a-1|,2\}$,$B=\{2,3,a^2+2a-3\}$,且 $\complement_B A=\{5\}$,求实数 a 的值.

思路　由符号 $\complement_B A$ 知,$A\subseteq B$,由 $\complement_B A=\{5\}$ 知,$5\in B$ 但 $5\notin A$.如何求 a?

解: ∵ $\complement_B A=\{5\}$,∴ ________,

∴ $a^2+2a-3=5$,即 $a=2$ 或 $a=-4$.

当 $a=2$ 时,$|2a-1|=3$.这时 $A=\{3,2\}$,$B=\{2,3,5\}$,所以 $\complement_B A=\{5\}$,适合题意.所以 $a=2$.

当 $a=-4$ 时,$|2a-1|=9$,这时 $A=\{9,2\}$,$B=\{2,3,5\}$. ________,$\complement_B A$ 无意义.所以 $a=-4$ 舍去.

综上讨论知:________.

总结　在由 $\complement_B A=\{5\}$ 求得 $a=2$ 或 $a=-4$ 之后,验证其是否符合隐含条件 $A\subseteq B$ 是必要的.否则就会把 $a=-4$ 误认为是本题的答案了.集合是一种数学语言,如果不能从这种语言中破译出它的全部意义,那么就会造成各种各样的错误.明白了这一点,你大概也就会抓住"集合"这一节学习的要求了.

随堂练习

1.(1)填空:如果 $S=\{x\mid x$ 是小于9的正整数$\}$,$A=\{1,2,3\}$,$B=\{3,4,5,6\}$,那么:

$\complement_S A=$________,$\complement_S B=$________.

(2) $\complement_S(\complement_S A)=A$ 对吗?为什么?

重点2　全集的定义　(★★★)

如果集合 S 含有我们所要研究的各个集合的全部元素,这个集合就可以看作一个全集,全集通常用 U 表示.

(1)"全集"的英语单词是"universe",所以习惯上用这一英语单词的第一个英文大写字母"U"表示全集.

(2)我们通常在全集中研究集合问题.符号"$\complement_U A$"表示集合 A 在全集 U 中的余集.

例如,若 $A=\{0\}$,$U=\mathbf{N}$,则 $\complement_U A=\mathbf{N}^*$.

[例2]　已知全集 U,集合 $A=\{1,3,5,7,9\}$,$\complement_U A=\{2,4,6,8\}$,$\complement_U B=\{1,4,6,8,9\}$,求集合 B.

思路　通过图示明确各元素的归属.

解: $U=$________________.

由 $\complement_U B=\{1,4,6,8,9\}$ 得 $B=$________________.

总结　(1)全集是由 A 与 $\complement_U A$ 的全部元素组成的;

(2) A 与 $\complement_U A$ 没有公共元素;

(3)用图示法解决此类问题直观形象.

随堂练习

2.填空:

(1)如果全集 $U=\mathbf{Z}$,那么 N 的补集 $\complement_U N=$________;

(2)如果全集 $U=\mathbf{R}$,那么 $\complement_U\mathbf{Q}$ 的补集 $\complement_U(\complement_U\mathbf{Q})=$________.

重点3　补集的性质　(★★)

(1) $\complement_U\varnothing=U$;(2) $\complement_U U=\varnothing$;(3) $\complement_U(\complement_U A)=A$.

(1) $\complement_U\varnothing=U$,即空集 $\varnothing$ 在全集 U 中的补集为全集 U;