高等学校教材

数学物理方程简明教程

姜礼尚 边保军 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

数学物理方程简明教程

Shuxue Wuli Fangcheng Jianming Jiaocheng

姜礼尚　边保军　编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书系统讲解了波动方程、热传导方程和泊松方程的基本求解方法，如 Green 函数法、分离变量法、特征线法等，同时介绍了几类重要的极值原理和能量不等式，并依此研究了三类数学物理方程的定解问题解的唯一性和稳定性。另外，还对 Galerkin 方法、有限元方法与差分方法作了简要介绍，给出了数值求解算法及其相关的理论基础。

本书内容重点突出，循序渐进，深入浅出，对培养学生利用数学模型解决实际问题有很好的帮助，可作为高等学校理工类本科数学物理方程课程的教材和参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程简明教程/姜礼尚，边保军编．－－北京：高等教育出版社，2012.7

ISBN 978－7－04－035166－8

Ⅰ．①数…　Ⅱ．①姜…②边…　Ⅲ．①数学物理方程－高等学校－教材　Ⅳ．①O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 145780 号

策划编辑　李　蕊　　责任编辑　田　玲　　封面设计　张申申　　版式设计　马敬茹
插图绘制　尹文军　　责任校对　胡美萍　　责任印制　张泽业

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400－810－0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	中国农业出版社印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	10.75	版　　次	2012年7月第1版
字　　数	190千字	印　　次	2012年7月第1次印刷
购书热线	010－58581118	定　　价	16.40元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　35166－00

序　言

当前，数学物理方程作为必修课和限制性选修课，已被列入高校众多理工类本科专业和研究生培养的教学计划之中，原因是一些微分方程，特别是偏微分方程（人们通常把它们称为数学物理方程）是这些专业中从事理论和应用研究的基本数学模型。在电子计算机日益普及的今天，人们正在通过先进的计算技术求解这类数学物理方程，去解决当今科学技术和生产实际中提出的各种问题。

为此，我们认为，作为数学物理方程这门课程教学的基本要求，应该是紧紧围绕着建模与计算两个根本目标，把数学物理方程的解的基本特性和求解的基本思路讲清楚，真正做到学以致用，达到理论为实际服务的目的。

由于学时有限，因此对教学内容的取舍和安排提出了较高的要求。作为教学内容的主要载体，本书力争做到重点突出，深入浅出，循序渐进，使同学通过学习，把基本的内容和方法真正学到手，能够举一反三，为后继课程的学习和实际应用打下坚实的基础。

本教材的编写与传统教材相比有以下变化:

1. 全书分成两大部分：稳态问题与非稳态问题。在稳态问题中，从一维问题——二阶常微分方程讲起，重点讲授边值问题与特征值问题。在非稳态问题中，重点讲授一维热传导方程和波动方程。

2. 有关解的主要性质——极值原理与特征线理论和求解的主要方法——Green 函数法与分离变量法，我们结合相关方程与相关问题由浅入深，分层次地反复讲解，力求帮助学生重点掌握，灵活运用。

3. 本书重点介绍了变分原理和定解问题的弱形式（即虚功原理），因为这不仅是建模的一个重要框架，也是近代有限元方法的理论基础。

4. 为了进一步突出数学物理方程解的特性（特征线和极值原理）对数值计算的重要影响，我们从微分方程离散化的角度简要地介绍了有限元方法和差分方法。

5. 根据 Green 函数法的需要，我们介绍了基本解，适度地引入了 δ 函数、弱收敛、广义导数以及相关的运算，在非数学专业理工类学生中讲授这些近代数学概念，关键在于把握好这个“度”，我们试图通过物理直观、数学举例和类

比使同学在感性上接受这些概念, 并学会正确地运用在本课程中, 不追求其严密性, 点到为止, 不再深究。

6. 在本书关于定解问题适定性的研究中, 我们有意略去了解存在性的讨论。我们不仅不给出存在性的一般性证明, 对由分离变量法和 Green 函数法得到的解的表达式, 亦不验证它的连续性和可微性, 以及为了保证解的表达式满足方程和定解条件, 亦并不深究定解数据 (方程右端、边值和初值) 所应满足的条件。

7. 为了节省授课学时, 我们用量纲分析方法代替了传统的 Fourier 变换方法, 通过构造相似解求出了热传导方程初值问题的基本解和 Poisson 公式。

以上我们列举的几点变化, 应该说只是一种数学物理方程教学的探索和改革的尝试, 能不能被广大读者所接受, 我们愿意诚恳地听取大家的批评和建议。

在本书编写过程中, 作者得到同济大学数学系领导的关心和支持。华南师范大学易法槐教授、东华大学陶有山教授以及同济大学数学系的老师们: 娄本东教授、徐承龙教授、梁进教授、王国联博士、周羚君博士、许威博士、张瑜博士等帮我们校阅书稿, 并提出了很多有益的建议。我们的博士研究生袁泉花了大量精力, 把本书打印出来。对他们的关心、帮助和支持, 我们衷心地表示感谢。本书的编写也得到教育部高等学校特色专业建设点“数学与应用数学”(项目编号 TS12033) 的资助。

姜礼尚
2012 年 3 月于同济大学

目　　录

第一部分　稳态问题

第二部分　非稳态问题

第一部分

稳态问题

第一章　二阶常微分方程的边值问题

在本章, 我们通过微元法建立弦平衡问题的数学模型, 这是二阶常微分方程的边值问题. 通过这一定解问题的求解, 引入 Dirac δ 函数和 Green 函数, 进而利用 Green 函数方法寻求一般形式二阶常微分方程定解问题的解, 并讨论二阶常微分方程的极值原理和相应的定解问题的适定性, 更进一步, 研究二阶常微分方程的特征值问题.

1.1　弦的平衡问题和平衡方程

我们首先讨论弦的平衡问题. 一根长为 l 的均匀柔软细弦, 拉紧之后在垂直于弦线的外力作用下处于平衡状态, 求该弦线的形状.

这里所谓“细弦”, 是指弦的长度远远大于其直径, 使得在数学上可以把弦作为一条 (直的或弯曲的) 线段来处理. 所谓“均匀”是指弦的线密度 (即单位长度的质量) 为常数. “柔软”是指所讨论的对象充分柔软, 它只抗伸长, 不抗弯曲, 也就是当它变形时, 反抗弯曲所产生的力矩可以忽略不计.

弦的运动和平衡的主要原因是弦上张力和外力的影响. 弦上各点的位移、张力等都必须遵循 Newton 运动定律, 我们应用这个定律建立弦上各点的位移所满足的微分方程.

我们首先建立坐标系. 取弦线初始位置所在的直线为 x 轴, 垂直于弦线初始位置且通过弦线的一个端点的直线为 u 轴, 这样, 弦线上 x 处的位移可以表示为 $u = u(x)$.

在弦上任意取一微元 $[x, x+\mathrm{d}x]$, 考虑其受力情况. 设 ρ 为弦的线密度, $f_0(x)$ 为作用在弦线上且垂直于弦线初始位置的强迫外力密度 $\left(单位为\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)$. 我们讨论作用在弦段微元 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 上垂直于弦线的外力合力. 注意到作用于弦段微元 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 上的外力有两类, 一类为外力强迫力, 其大小为

$$f_0(x)\mathrm{d}x.$$

另一类为周围弦线通过端点 x 和 $x+\mathrm{d}x$ 作用于弦段 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 上的张力. 记作用在弦段端点 $P_1=(x,u(x))$ 和 $P_2=(x+\mathrm{d}x,u(x+\mathrm{d}x))$ 处的张力分别为 T_1 和 T_2, 它们的方向如图 1.1 所示.

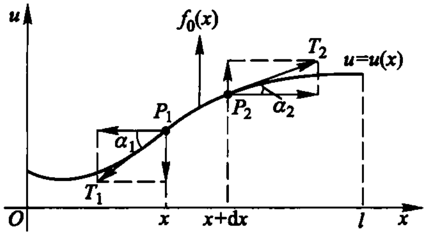

图 1.1

它们在 u 轴方向的分量为

$$T_1\cdot i_u=-|T_1|\sin\alpha_1,$$

$$T_2\cdot i_u=|T_2|\sin\alpha_2,$$

这里 i_u 表示 u 轴上的单位向量, α_1,α_2 分别为弦线在端点 x 和 $x+\mathrm{d}x$ 处的切线与 x 轴正方向的夹角. 由于我们假设弦线是均匀的, 弦线的位移也是微小的, 故可以假设

$$|\alpha_1|,\ |\alpha_2|\ll 1,\ \sin\alpha_1\sim\tan\alpha_1,\ \sin\alpha_2\sim\tan\alpha_2,$$

以及

$$|T_1|=|T_2|=T_0.$$

这里 T_0 为正常数. 因此张力合力为

$$T_0(\sin\alpha_2-\sin\alpha_1)=T_0[u'(x+\mathrm{d}x)-u'(x)],$$

于是得到外力合力为

$$T_0[u'(x+\mathrm{d}x)-u'(x)]+f_0(x)\mathrm{d}x.$$

由于弦线处于平衡状态, 根据 Newton 定律, 我们得到平衡关系式

$$T_0[u'(x+\mathrm{d}x)-u'(x)]+f_0(x)\mathrm{d}x=0.$$

这样我们得到在外力作用下弦的平衡方程

$$-u''(x)=f(x), \tag{1.1.1}$$

其中

$$f(x)=\frac{f_0(x)}{T_0},$$

这是一个二阶常微分方程. 以下为简单计, 总是假设张力 $T_0=1$.

现在讨论定解条件. 我们假设此弦两端固定在初始位置, 故有端点 (边界) 条件

$$u(0)=u(l)=0. \tag{1.1.2}$$

二阶常微分方程 (1.1.1) 和上述端点条件 (1.1.2) 构成了二阶常微分方程的定解问题.

对方程 (1.1.1) 直接积分, 并利用边界条件 (1.1.2) 得到解的表达式

$$u(x)=\frac{x}{l}\int_0^l \mathrm{d}z\int_0^z f(y)\mathrm{d}y-\int_0^x \mathrm{d}z\int_0^z f(y)\mathrm{d}y.$$

为了把解表成较为对称的形式, 交换等式右边两个积分的次序, 经简化得到

$$u(x)=\int_0^x \frac{y}{l}(l-x)f(y)\mathrm{d}y+\int_x^l \frac{x}{l}(l-y)f(y)\mathrm{d}y,$$

即解可表为

$$u(x)=\int_0^l G(x,y)f(y)\mathrm{d}y, \tag{1.1.3}$$

其中函数

$$G(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y}{l}(l-x), & 0<y<x,\\ \dfrac{x}{l}(l-y), & x<y<l,\end{cases}\qquad 0<x<l.$$

附注 1.1　函数 $G(x,y)$ 仅与弦的长度有关, 而与外力等其他量无关.

上述端点条件称为 Dirichlet 条件, 或称为第一类端点条件, 在一维情形, 也可称为两点边值条件, 其一般形式为

$$u(0)=u_0,\ u(l)=u_1.$$

除此之外, 其他实际问题中还会出现第二类端点条件

$$u'(0)=u_0,\ u'(l)=u_1,$$

也称为 Neumann 条件, 以及第三类端点条件

$$-u'(0)+\alpha u(0)=u_0,\ u'(l)+\beta u(l)=u_1,$$

这里, α 和 β 为非负常数.

1.2 Dirac δ 函数与 Green 函数

在上节我们引入了函数 $G(x,y)$, 现在我们讨论其物理意义. 为此, 取定一点 y, $0<y<l$, 我们研究两端固定的弦, 在 y 处受到单位集中力作用下弦的平衡问题. 以 $u(x)$ 表示弦的位移, 如图 1.2 所示.

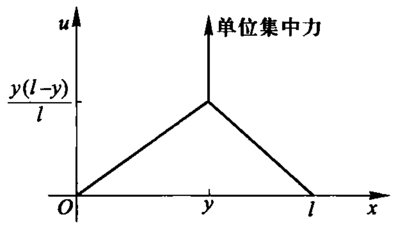

图 1.2

在弦段 $[0,y)$, 由于没有受到外力作用, 有

$$-u''=0, \tag{1.2.1}$$

$$u(0)=0, \tag{1.2.2}$$

在弦段 $(y,l]$, 有

$$-u''=0, \tag{1.2.3}$$

$$u(l)=0. \tag{1.2.4}$$

在 $x=y$ 点位移函数需满足以下两个连接条件:

1. 弦线连续

$$u(y-0)=u(y+0); \tag{1.2.5}$$

2. 弦线受力平衡

$$\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{y+0}-\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{y-0}+1=0. \tag{1.2.6}$$

直接求解得到

$$u(x)=u(x;y)=\begin{cases}\dfrac{y}{l}(l-x), & y<x<l,\\ \dfrac{x}{l}(l-y), & 0<x<y,\end{cases} \tag{1.2.7}$$

容易看出 $u(x;y)=G(x,y)$.

我们考虑如下问题: 对于单位集中力作用下的弦平衡问题, 是否可以用形如 (1.1.1),(1.1.2) 的边值问题描述?

为了讨论上述问题, 首先需要解决以下两个问题:

1. 对于作用在弦线 $x=y$ 点的单位集中力, 如何刻画其密度?

2. 如何验证函数 $G(x,y)$ 是这个定解问题的解?

先讨论第一个问题. 直观上讲, 作用在弦线 $x=y$ 点的单位集中力, 它的力密度 $f(x)=f(x;y)$ 具有以下特征:

1. 在点 $x=y$ 以外, 弦不受外力的作用, 即 $f(x)\equiv 0\ (x\neq y)$;

2. 在点 $x=y$ 受单位集中力作用, 即 $f(y)=\infty$;

3. 在整个弦线上受力的总和是 1, 即

$$\int_0^l f(x)\mathrm{d}x=1.$$

容易看出 $f(x)$ 不是我们在微积分中所熟悉的普通函数. 对于这个经典函数族以外的奇异函数, 我们该如何去认识它呢?

为此, 不妨回忆一下, 我们是如何认识超越数,例如超越数 e 的? 我们是把 e 看成是有理数序列的极限, 如 $\{S_n^{(1)}\}=\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$, $\{S_n^{(2)}\}=\left\{1+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k!}\right\}$, 等等. 众所周知, 有理数是我们熟悉的, 通过取极限, 我们就认识了一个新的数 e.

这里, 虽然 Cauchy 序列 $\{S_n^{(1)}\}$ 与 Cauchy 序列 $\{S_n^{(2)}\}$ 是两个不同的序列, 但它们具有同一极限. 因此在 19 世纪人们就把具有同一极限的所有 Cauchy 序列的全体称为一个等价类, 并对它赋予一个记号——超越数 e.

可以用这样的思想来认识上述奇异“函数”. 不失一般性, 我们考虑 $y=0$ 的情况, 记 $f(x;0)=\delta(x)$. 认识新“函数” $\delta(x)$ 的关键是:

1. 如何推广“极限过程”?

2. 如何寻找在新“极限”意义下的 Cauchy 序列?

为此, 引入函数类

$$C_0^\infty(a,b)=\left\{\varphi(x)\,\middle|\,\varphi(x)\in C^\infty(a,b),\text{在端点}x=a,b\text{附近}\varphi\equiv 0\right\}.$$

定义 2.1 设 $\{S_n(x)\}$ 是区间 $(a,b)(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ 上的可积函数序列. 如果对任意函数 $\varphi(x) \in C_0^\infty(a,b)$, 极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

存在, 则称 $\{S_n(x)\}$ 是弱收敛意义下的 Cauchy 序列.

例 2.1 容易证明, 若 $\{S_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上一致收敛意义下的 Cauchy 序列, 则 $\{S_n(x)\}$ 必是在弱收敛意义下的 Cauchy 序列. 即对任意 $\varphi(x) \in C_0^\infty(a,b)$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_a^b S_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ 存在.

这个例子表明弱收敛概念是经典的一致收敛概念的推广.

定义 2.2 若 $\{S_n^{(1)}(x)\}$ 与 $\{S_n^{(2)}(x)\}$ 都是弱收敛意义下的 Cauchy 序列, 且对任意的 $\varphi(x) \in C_0^\infty(a,b)$ 都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n^{(1)}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n^{(2)}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

则称 Cauchy 序列 $\{S_n^{(1)}\}$ 与 $\{S_n^{(2)}\}$ 等价.

引进“等价”的概念, 就是要提醒大家, 在应用“逼近”的方法来认识新“函数”的过程中, Cauchy 序列的选取是不唯一的, 可以根据具体需要加以选择.

对于每一个等价类, 我们赋予一个记号. 若记作 $g(x)$, 那么我们称 Cauchy 序列 $\{S_n^{(1)}\}$, $\{S_n^{(2)}\}$ 都弱收敛到“函数” $g(x)$, 记作

$$S_n^{(i)} \rightharpoonup g(x) \quad (i=1,2).$$

由例 2.1 可知, 若 $\{S_n(x)\}$ 一致收敛到函数 $g(x)$, 必有 $\{S_n(x)\}$ 弱收敛到函数 $g(x)$. 即由

$$S_n(x) \Rightarrow g(x) \quad (\Rightarrow \text{ 表示一致收敛})$$

可以推出

$$S_n(x) \rightharpoonup g(x).$$

在推广了极限过程以后, 我们就可以去寻找描述单位集中力的密度函数 $f(x;y)=\delta(x-y)$ 的相应的等价类, 以及一些与我们课程内容关系比较密切, 在弱收敛意义下等价的 Cauchy 序列 $\{S_n(x)\}$.

对于刻画作用于 $x=y$ 点的单位集中力的力密度 $f(x;y)=\delta(x-y)$, 可以找到很多弱收敛 Cauchy 序列来逼近, 其中最简单的 Cauchy 序列来自于物理直观.

设 $\dfrac{1}{n} < \min\{y, l-y\}$, 令

$$f_n(x-y) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & |x-y| \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ 0, & |x-y| > \dfrac{1}{n}, \end{cases}$$

函数 $f_n(x-y)$ 描述了在弦上的受力情况: 在弦段 $\left[y-\dfrac{1}{n}, y+\dfrac{1}{n}\right]$ 以外, 弦不受力, 而在弦段 $\left[y-\dfrac{1}{n}, y+\dfrac{1}{n}\right]$ 上, 弦均匀地受到一个单位力的作用. 物理直觉告诉我们, 当 $n \to \infty$ 时, $f_n(x-y)$ 应该收敛到作用于 $x=y$ 点的单位集中力的力密度. 图 1.3 为 $y=0$ 时 $f_n(x)$ 的示意图.

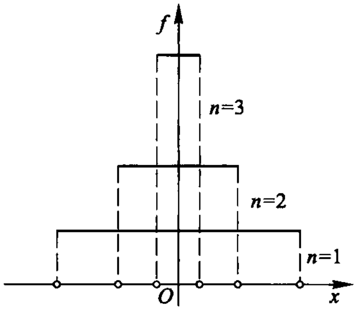

图 1.3

根据积分中值定理, 对于任意的 $\varphi(x) \in C_0^\infty(a,b)$, 有

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x-y)\varphi(x)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \int_{y-\frac{1}{n}}^{y+\frac{1}{n}} \frac{n}{2}\varphi(x)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty} \varphi\left(y+\frac{\theta}{n}\right) \qquad (|\theta|<1) \\ &= \varphi(y), \end{aligned}$$

根据弱收敛的定义, 这表明 $\{f_n(x-y)\}$ 是弱收敛意义下的 Cauchy 序列.

定义 2.3　我们把所有与序列 $\{f_n(x-y)\}$ 等价的 Cauchy 序列的全体记作 $\delta(x-y)$, 称为 Dirac δ 函数.

从而我们有

$$f_n(x-y) \rightharpoonup \delta(x-y),$$

记为

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x-y)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(y)=\int_a^b \delta(x-y)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

附注 2.1 上述等式右边的积分只是一个记号.

把它写成积分的形式, 其原因是: 若弱收敛的极限函数 $g(x)$ 是可积函数 (如连续函数), 那么上述等式右边的积分就不仅是一个符号, 其本身就是一个通常意义下的积分.

为了课程的需要, 我们引入与函数列 $\{f_n(x-y)\}$ 等价的另一个弱收敛到 $\delta(x-y)$ 的 Cauchy 序列.

例 2.2 如图 1.4 所示, 在 $(-\infty,+\infty)$ 区间上定义函数序列 $\{K_n(x)\}$,

$$K_n(x)=\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-nx^2},\quad -\infty<x<+\infty.$$

则它是弱收敛到 $\delta(x)$ 的 Cauchy 序列, 即对任意的 $\varphi(x)\in C_0^\infty(-\infty,+\infty)$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}K_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(0).$$

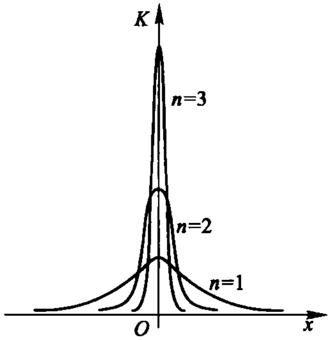

图 1.4

证明 由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}K_n(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=1,$$

因此当 $n\to\infty$ 时有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}K_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x-\varphi(0)&=\int_{-\infty}^{+\infty}[\varphi(x)-\varphi(0)]K_n(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)-\varphi(0)\right]\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\longrightarrow 0.\end{aligned}$$