21 世纪高等学校工科数学辅导教材

大学生数学竞赛解析教程

聂 宏 祝丹梅 等编著

化学工业出版社

21世纪高等学校工科数学辅导教材

大学生数学竞赛解析教程

聂　宏　祝丹梅　等编著

化学工业出版社

·北京·

本书以“中国大学生数学竞赛大纲”的要求为依据，是专门为大学生数学竞赛而编写的.

全书共分八个专题，总计26节. 每节内容涵盖内容要点、精选题解析及强化练习三部分. 全书知识要点、解题技巧归纳清晰明了，典型题目丰富，解析过程论述深入浅出，富有启发性. 同时为方便学习，节末附有强化练习的参考答案.

本书既可作为大学生数学竞赛培训教程，也可作为参加硕士研究生入学考试的重要辅导资料，同时对学习高等数学课程的读者是一本有益的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

大学生数学竞赛解析教程/聂宏，祝丹梅等编著. —北京：化学工业出版社，2012.12

21世纪高等学校工科数学辅导教材

ISBN 978-7-122-16066-9

Ⅰ.①大… Ⅱ.①聂…②祝… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第296335号

责任编辑：郝英华　　文字编辑：袁俊红

责任校对：蒋　宇　　装帧设计：张　辉

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）

印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司

装　　订：三河市宇新装订厂

787mm×1092mm　1/16　印张13¾　字数432千字　2013年3月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http：//www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：29.00元

前言

2009年，首届中国大学生数学竞赛开始举办．作为一项面向本科生的全国性高水平学科赛事，中国大学生数学竞赛为青年学子提供了一个展示数学基本功和数学思维的舞台，为发现和选拔优秀数学人才、促进高等学校数学课程建设起到了积极的推动作用，为课程改革积累了丰富的调研素材．

鉴于目前针对大学生数学竞赛指导教材不多见、考生复习缺乏针对性的现状，辽宁石油化工大学数学竞赛指导组按照“中国大学生数学竞赛大纲”的要求，结合多年指导大学生数学竞赛的经验编写此书，其目的是为考生备考提供有益的帮助和指导．

全书共分八个专题，分别为函数极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数．

专题包含内容提要、竞赛大纲（2012版）以及各节内容．在每节中包括内容要点、精选题解析及强化练习三部分．其中，内容要点主要阐述重要概念和基础理论、解题方法和技巧．通过精选题解析，对竞赛真题及技巧性较强的题目进行分析和评注，帮助学生理解和掌握相关知识，使其达到融会贯通、举一反三的实效．在强化练习部分配备了针对性强的习题，通过练习进一步巩固解题方法与解题技巧．

专题一、二由刘敏执笔，专题三由李金秋执笔，专题四、六由聂宏执笔，专题七由祝丹梅执笔，专题五、八由刘晶执笔．全书由祝丹梅组稿，聂宏教授审阅并修改全书文字．

本书在编写过程中得到了辽宁石油化工大学教务处的大力支持和帮助，编者深表谢意．

由于编者水平有限，书中不妥之处，敬请专家及读者批评指正．

辽宁石油化工大学数学竞赛指导组

2012年10月

目录

专题一

函数、极限、连续

内容提要

(1) 函数的概念与性质.

(2) 数列极限、函数极限的概念和性质.

(3) 无穷小与无穷大的概念，无穷小的比较.

(4) 极限的计算.

(5) 函数连续的概念与连续函数的性质.

(6) 间断点的概念与间断点类型的判断.

竞赛大纲

(1) 函数的概念及表示法、简单应用问题的函数关系的建立.

(2) 函数的性质：有界性、单调性、周期性和奇偶性.

(3) 复合函数、反函数、分段函数和隐函数、基本初等函数的性质及其图形、初等函数.

(4) 数列极限与函数极限的定义及其性质、函数的左极限与右极限.

(5) 无穷小和无穷大的概念及其关系、无穷小的性质及无穷小的比较.

(6) 极限的四则运算、极限存在的单调有界准则和夹逼准则、两个重要极限.

(7) 函数的连续性（含左连续与右连续）、函数间断点的类型.

(8) 连续函数的性质和初等函数的连续性.

(9) 闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理）.

第一节 函数与极限

一、内容要点

1. 函数的概念与性质

(1) 函数定义. 设数集 $D\subset\mathbf{R}$，则称映射 $f: D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，简记为

$$y=f(x),\ x\in D,$$

式中，x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$.

(2) 函数性质. 有界性，单调性，奇偶性，周期性.

(3) 基本初等函数. 幂函数 $y=x^{\mu}(\mu\in\mathbf{R})$；

指数函数 $y=a^{x}(a>0$ 且 $a\neq 1)$；

对数函数 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1$，特别当 $a=\mathrm{e}$ 时，记为 $y=\ln x)$；

三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x$ 等；

反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x$ 等.

(4) 初等函数. 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成并可以用一个式子表示的函数. 如：$y=\sqrt{\sin(2^x-1)}$.

2. 极限的概念与性质

(1) 数列极限定义. 设 $\{x_n\}$ 为一数列，若存在常数 a 满足

$$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}^{+}，当 n>N 时，有 |x_n-a|<\varepsilon$$

成立，则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \text{ 或 } x_n\to a(n\to\infty).$$

(2) 收敛数列的性质. 极限唯一性，全局有界性，局部保号性.

(3) 函数极限定义.

① 函数极限定义 1. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义，若存在常数 A 满足

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0，当 0<|x-x_0|<\delta 时，有 |f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0).$$

② 函数极限定义 2. 设函数 $f(x)$ 在 $|x|>P>0$ 内有定义，若存在常数 A 满足

$$\forall\varepsilon>0, \exists X>0，当 |x|>X 时，有 |f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

(4) 函数极限性质. 极限唯一性，局部有界性，局部保号性.

(5) 函数极限与数列极限的关系（归结原则或海涅定理）. 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，$\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足：$x_n\neq x_0(n\in\mathbf{R}^{+})$，那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

注意：① 若将上述关系中的 x_0 换为 ∞，结论仍成立.

② 特别地，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$.

3. 无穷小与无穷大

(1) 无穷小定义. 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}}f(x)=0$，则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时的无穷小.

(2) 无穷小性质. ① 有限个无穷小的和、差、积也是无穷小.

② 有界函数与无穷小的乘积也是无穷小.

注意：有限个无穷小的商不一定还是无穷小，具体情况见下面无穷小的比较.

(3) 无穷小的比较. 设 f 及 g 都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小，且 $g\neq 0$，$\lim\dfrac{f}{g}$ 也是在这个变化过程中的极限.

① 若 $\lim \dfrac{f}{g}=0$，则称 f 是比 g 高阶的无穷小，g 是比 f 低阶的无穷小，记作 $f=o(g)$；

② 若 $\lim \dfrac{f}{g}=c\neq 0$，则称 f 与 g 是同阶无穷小；

③ 若 $\lim \dfrac{f}{g^k}=c\neq 0(k>0)$，则称 f 是关于 g 的 k 阶无穷小；

④ 若 $\lim \dfrac{f}{g}=1$，则称 f 与 g 是等价无穷小，记作 $f\sim g$.

注意： 当 $k=1$ 时，1 阶无穷小即为同阶无穷小；
当 $c=1$ 时，同阶无穷小变成等价无穷小，即等价无穷小为同阶无穷小的特殊情况.

(4) 无穷大定义. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)$（或 $|x|>P>0$）内有定义，若 $\forall M>0$，$\exists\delta>0$(或 $X>0$)，当 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $|x|>X$)时，有 $|f(x)|>M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时的无穷大.

(5) 无穷小与无穷大的关系. 在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

注意： 无穷小与无穷大的关系简言之为倒数关系.

4. 极限的计算

方法总结如下.

(1) 利用极限定义.

注意： 此法能解决的求极限问题非常有限，更常用于极限的证明问题.

(2) 利用极限运算法则. 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)$ 和 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)$ 均存在，则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)\pm\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x);$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)\cdot\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x);$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)}\left[\text{此时需加条件}\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)\neq 0\right].$$

特殊地，

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[Cf(x)]=C\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x),$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[f(x)]^n=\left[\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)\right]^n.$$

(3) 利用函数的连续性. 若函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

(4) 变形消去分母中的零因子. 约分，通分，有理化，倒代换，等差、等比数列求和公式……

(5) 利用特殊极限.

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0(|q|<1)\ ;\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1\ ;\ \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0(a>0)\ ;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{a^n}=0(a>0,p>0)\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\ ;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}\ ;\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\ \left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}\right].$$

注意：通过换元法，不难发现以上特殊极限可以代表相应的一类极限

$$\lim_{\alpha(n)\to+\infty} q^{\alpha(n)}=0(|q|<1)\ ;\ \lim_{\alpha(n)\to+\infty}\sqrt[\alpha(n)]{\alpha(n)}=1\ ;\ \lim_{\alpha(n)\to+\infty}\frac{\alpha^p(n)}{a^{\alpha(n)}}=0(a>0,p>0)\ ;$$

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1\ (\text{第一类重要极限})；\ \lim_{\alpha(n)\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha(n)}\right)^{\alpha(n)}=\mathrm{e}\ ;$$

$$\lim_{\alpha(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)}=\mathrm{e}\ \left[\lim_{\alpha(x)\to 0}[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}=\mathrm{e}\right](\text{第二类重要极限}).$$

(6) 等价无穷小代换. $x\to 0$ 时，

$$\mathrm{e}^x-1\sim x\ ,\ a^x-1\sim x\ln a\ ,\ \ln(1+x)\sim x\ ,\ \log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a}\ ,$$

$$\sin x\sim x,\ \tan x\sim x,\ 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\ \arcsin x\sim x,\ \arctan x\sim x,\ (1+x)^\mu-1\sim\mu x.$$

注意：以上等价无穷小都代表相应的一类等价无穷小：只要 $\alpha(x)\to 0$，

$$\mathrm{e}^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x),\ a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a,\ \ln[1+\alpha(x)]\sim\alpha(x),\ \log_a[1+\alpha(x)]\sim\frac{\alpha(x)}{\ln a},$$

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)\ ,\ \tan\alpha(x)\sim\alpha(x)\ ,\ 1-\cos\alpha(x)\sim\frac{1}{2}\alpha^2(x)\ ,$$

$$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)\ ,\ \arctan\alpha(x)\sim\alpha(x)\ ,\ [1+\alpha(x)]^\mu-1\sim\mu\alpha(x)\ .$$

(7) 洛必达法则. 设 $f(x),g(x)$ 可导，且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}} g(x)=0(\text{或}\infty)$，若

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或}\infty)\ ,$$

则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或}\infty)\ .$$

注意：此法适用于求未定式：$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,\infty-\infty,1^\infty,\infty^0,0^0$ 的极限，其中

$$0\cdot\infty\to\frac{0}{0}\ \text{或}\ \frac{\infty}{\infty}\ ,$$

$$\infty-\infty\to\frac{1}{0}-\frac{1}{0}\to\frac{0-0}{0\cdot 0}\to\frac{0}{0}\ ,$$

$$1^\infty\to\mathrm{e}^{\infty\ln 1}\to\mathrm{e}^{\infty\cdot 0}\ ,$$

$$\infty^0\to\mathrm{e}^{0\ln\infty}\to\mathrm{e}^{0\cdot\infty}\ ,$$

$$0^0\to\mathrm{e}^{0\ln 0}\to\mathrm{e}^{0\cdot\infty}\ .$$

(8) 利用无穷小的性质.

(9) 两边夹准则（迫敛准则）. 若当 $x\in\mathring{U}(x_0)$（或 $|x|>M$）时有

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)\ ,$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} h(x)=A\ (\text{或}\ \infty\ ),$$

则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A\ (\text{或}\ \infty\ ).$$

注意：此法常用于求 n 项和式的极限.

(10) 单调有界准则：单调有界数列必有极限.

注意：此法常用于求递推数列的极限.

(11) 利用函数极限和数列极限的关系.

注意：此法可将数列极限转化为函数极限，进而利用 L'Hospital 法则等方法.

(12) 利用泰勒展开式. 若函数 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内 n 次可导，则

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}x+\frac{f''(x_0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n+o(x^n).$$

常用的函数在 $U(0)$ 内的麦克劳林展开式：

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n);$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n);$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n-1});$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n});$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n);$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^nx^n+o(x^n);$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n).$$

(13) 利用定积分定义. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

式中，$\xi_i=a+\frac{b-a}{n}i$ 或 $\xi_i=a+\frac{b-a}{n}(i-1)$ 或 $\xi_i=a+\frac{b-a}{2n}(2i-1)$.

特殊地，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,$$

式中，$\xi_i=a+\frac{i}{n}$ 或 $\xi_i=a+\frac{i-1}{n}$ 或 $\xi_i=a+\frac{2i-1}{2n}$.

注意：此法常用于求 n 项和式的极限.

(14) 利用级数收敛的必要性.

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\ \text{收敛}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}u_n=0.$$

二、精选题解析

【例 1.1】 （首届全国大学生数学竞赛预赛试题）求极限

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}\ (n\in \mathbf{N}^+).$$

解析 法 1：利用恒等变形及洛必达法则，

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{e}{x}\ln\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{e[\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n]}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{e(e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx})}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}}=e^{\frac{n+1}{2}e}.$$

法 2：利用第二类重要极限，

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}=\lim_{x\to0}\left[\left(1+\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}{n}\right)^{\frac{n}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}}\right]^{\frac{e(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n)}{nx}}$$

$$=e^{e\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}{nx}}=e^{e\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx}}{n(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})}}=e^{\frac{n+1}{2}e}.$$

【例 1.2】 （第二届全国大学生数学竞赛决赛试题）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

解析 法 1：利用恒等变形、等价无穷小代换和洛必达法则

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\sin x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1-\cos x}\ln\left[\frac{\sin x}{x}-1+1\right]}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{(1/2)x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{(1/2)x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{(3/2)x^2}}=e^{-\frac{1}{3}}.$$

法 2：利用第二重要极限

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim_{x\to0}\left[\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}}\right]^{\frac{\sin x-x}{x(1-\cos x)}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x(1-\cos x)}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x\cdot\frac{1}{2}x^2}}=e^{2\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}}=e^{2\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}}=e^{-\frac{1}{3}}.$$

评注：例 1 和例 2 均是求“幂指函数 $f(x)^{g(x)}$”的极限，此类极限的求解常有两种方法，一种是借助恒等变形 $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$，转化为求指数部分的极限；另一种是利用第二重要极限（本质为 1^∞）．另外，在处理对数部分时，既可用洛必达法则，如例 1.1 的法 1，也可用等价无穷小代换，如例 1.2 的法 1.

【例 1.3】 (首届全国大学生数学竞赛决赛试题)求极限

$$\lim_{n\to\infty}n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right].$$

解析 由归结原则、倒代换和洛必达法则

$$\lim_{n\to\infty}n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right]=\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim_{x\to0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{x(1+x)}-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)\right]$$

$$=e\lim_{x\to0^+}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}=-\frac{e}{2}.$$

评注： 本题将未定式 $0\cdot\infty$ 转化为 $\dfrac{0}{0}$，之后借助倒代换化简函数式．一般函数式中的 $\dfrac{1}{x}$ 比 x 多的时候，常借助倒代换化简．另外本题又涉及幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 的求导，其方法是借助恒等变形 $f(x)^{g(x)}=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$，再利用复合函数的求导法则.

【例 1.4】（第二届全国大学生数学竞赛决赛试题）求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right).$$

解析　利用定积分定义

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2.$$

【例 1.5】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+3}+\cdots+\dfrac{1}{n+(2n-1)}\right)$.

解析　利用定积分定义

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+(2n-1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+(2i-1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+2\,\frac{2i-1}{2n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+2x}\mathrm{d}x=\ln\sqrt{3}.$$

评注： 例 1.4 和例 1.5 属于求“n 项和式”的极限，此类极限的解决常采用两种方法，一种是利用定积分的定义，将“n 项和式”的极限转化为某个函数在某个区间的定积分，而常用的区间是 $[0,1]$；另一种方法是两边夹准则，将所给“n 项和式”进行放缩，如

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots\frac{n}{n^2+n}\right)\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1.$$

有时也可能将定积分的定义和两边夹准则这两种方法结合在一起使用，如下例.

【例 1.6】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

解析　利用两边夹准则和定积分定义

$$\frac{1}{n+1}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)\leqslant\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right),$$

式中
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1=\frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$$
$$=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1=\frac{2}{\pi},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)=\frac{2}{\pi}.$$

【例 1.7】 （辽宁省 2011 年竞赛题）求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+n}\right).$$

解析 由

$$\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

可得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2.$$

评注： 本题借助了等差数列前 n 项和公式化简分母，出现 $\frac{1}{n(n+1)}$，考虑裂项为 $\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ 的技巧.

【例 1.8】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}$.

解析 因为

$$u_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{u_n},$$

$$u_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}=\frac{1}{4n}\cdot\frac{1}{u_n},$$

有

$$\frac{1}{4n}\leqslant u_n^2\leqslant\frac{1}{2n+1},$$

即

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}\leqslant u_n\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}=0.$$

评注： 本题的表达式比较特殊，处理的方法是放缩，放大和缩小之后的式子中仍然出现原来的表达式，进而通过移项找到上下“界”，而后采用两边夹准则.

【例 1.9】 （首届全国大学生数学竞赛决赛试题）求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}.$$

解析 利用泰勒展开式和定积分定义

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left[\frac{k\pi}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\pi\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\pi\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}=\pi\int_0^1(1+x)x\mathrm{d}x=\frac{5\pi}{6}.\end{aligned}$$

评注： 本题若直接用定积分定义，将很难分离出代表区间长度的项 $\frac{1}{n}$，故先用泰勒展

开式将 sin 去掉.

【例 1.10】 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{\tan x^2[x+\ln(1-x)]}$.

解析 利用泰勒展开式

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4),$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4),$$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2),$$

于是

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{\tan x^2[x+\ln(1-x)]}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-o(x^4)}{x^2[x-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{-\frac{x^4}{2}+o(x^4)}=\frac{1}{6}.$$

评注：一般当所给的函数式中含有的函数类型很多且为代数和式时，可考虑用泰勒展开式，进而能将各种类型的函数都统一成多项式函数.

【例 1.11】（第二届全国大学生数学竞赛预赛试题）设

$$x_n=(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n}),\ |a|<1,$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解析 根据所给表达式的特点，

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$$

$$=\frac{1}{1-a}\lim_{n\to\infty}(1-a)(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})=\frac{1}{1-a}\lim_{n\to\infty}(1-a^{2^{n+1}})=\frac{1}{1-a}.$$

评注：本题借助平方差公式将所给的 $n+1$ 项的乘积进行化简减项.

【例 1.12】 设 $a_1=2, a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解析 由不等式$\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)\geqslant\sqrt{a_n\cdot\dfrac{1}{a_n}}=1$ 知$\{a_n\}$有下界，故只需再证$\{a_n\}$单调递减，

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)-a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n}-a_n\right),$$

由 $a_n\geqslant1$，有 $a_{n+1}-a_n\leqslant0$，即 $a_{n+1}\leqslant a_n$.

由 $\{a_n\}$ 单调减少有下界，知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$，对 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$，令 $n\to\infty$，两边取极限得

$$b=\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right),$$

解得 $b=\pm1$. 舍去 -1，得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

评注：本题是求“递推数列”的极限，此类极限常用的方法就是“单调有界准则”.

【例 1.13】 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{\ln(1+x^2)}$.

解析 利用等价无穷小代换

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1+1-\cos x}{\ln(1+x^2)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{\ln(1+x^2)}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{3}{2}.$$

评注：请判别下列解法是否正确

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}=1;$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1+1-\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{3}{2}.$$

这两种解法均是错误的．第一种解法的错误是将原式中的部分先取了极限，而另一部分则不取极限，这显然是不合理的，因为极限过程是同时的．第二种解法的错误是对式中的加、减项作等价无穷小的代换，尽管此题的结论是对的，但这只是巧合，这样的代换是不允许的.

【例 1.14】 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$.

解析 根据分子、分母间的特殊关系

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x(1-e^{\sin x-x})}{x-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0}e^x\cdot\lim_{x\to0}\frac{1-e^{\sin x-x}}{x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{-(\sin x-x)}{x-\sin x}=1.$$

评注：若在计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^{\sin x-x}}{x-\sin x}$ 时，未想到等价无穷小代换，而利用洛必达法则也可.

【例 1.15】 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^5+7x^4+3)^a-x]=b\neq0$，求 a,b 的值.

解析 因为

$$\lim_{x\to+\infty}[(x^5+7x^4+3)^a-x]=\lim_{x\to+\infty}x\left[x^{5a-1}\left(1+\frac{7}{x}+\frac{3}{x^5}\right)^a-1\right]=b\neq0,$$

有 $5a-1=0$，所以 $a=\dfrac{1}{5}$，

$$b=\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{7}{x}+\frac{3}{x^5}\right)^{\frac{1}{5}}-1\right]=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{7}{x}+\frac{3}{x^5}\right)=\frac{7}{5}.$$

评注：本题属未定式 $\infty-\infty$，处理方法是转化为乘积形式，并且需知道，∞ 只有当其与 0 相乘时，极限才有可能存在.

【例 1.16】 设函数 $f(x)$在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数，且 $f(0)\neq0,f'(0)\neq0$，若 $af(x)+bf(2x)-f(0)$在 $x\to0$ 时是比 x 高阶的无穷小，试确定 a,b 的值.

解析 由题设条件，运用洛必达法则可得

$$0=\lim_{x\to0}\frac{af(x)+bf(2x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{af'(x)+2bf'(2x)}{1}=(a+2b)f'(0).$$

根据已知 $f'(0)\neq0$，则 $a+2b=0$；

又 $$0=\lim_{x\to 0}[af(x)+bf(2x)-f(0)]=(a+b-1)f(0),$$

以及已知 $f(0)\neq 0$，从而 $a+b-1=0$；

所以 $$\begin{cases}a+2b=0\\ a+b-1=0\end{cases}\Rightarrow a=2,b=-1.$$

评注：本题考查的是无穷小比较的知识，需了解各种无穷小关系的定义．另外还用到：当分母极限为 0 时，整体极限要想存在，分子的极限必须是 0.

【例 1.17】（首届全国大学生数学竞赛决赛试题）设 $f(x)$ 在 $x=1$ 附近有定义，且在 $x=1$ 可导，$f(1)=0,f'(1)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2+x\tan x}$.

解析 借助函数在一点的导数定义凑形

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2+x\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\cos x-\cos^2 x)}{\cos x-\cos^2 x}\cdot\frac{\cos x-\cos^2 x}{x^2+x\tan x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x(x+\tan x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x(x+\tan x)}=\frac{1}{2}.$$

评注：本题属于含有抽象函数的求极限问题，因为已知中给出了函数在一点的导数，故考虑应用函数在一点的导数定义，切记本题不能用洛必达法则，因为已知中没有提供函数在某个区间或邻域内可导的信息.

【例 1.18】 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导，且 $f(a)>0$，求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x$.

解析 借助第二重要极限凑形

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)-f(a)}{f(a)}\right]^x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)-f(a)}{f(a)}\right]^{\frac{f(a)}{f\left(a+\frac{1}{x}\right)-f(a)}}\right\}^{\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)-f(a)}{f(a)\cdot\frac{1}{x}}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)-f(a)}{f(a)\cdot\frac{1}{x}}}=\mathrm{e}^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

评注：本题既用到了第二类重要极限，又用到了函数在一点的导数定义.

【例 1.19】（首届全国大学生数学竞赛决赛试题）设函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$连续，无穷积分$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，求 $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{1}{y}\displaystyle\int_0^y xf(x)\mathrm{d}x$.

解析 由题设条件，设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\to l(x\to+\infty)$，显然 $F'(x)=f(x)$.

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\int_0^y xf(x)\mathrm{d}x=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\int_0^y x\mathrm{d}F(x)=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\left[yF(y)-\int_0^y F(x)\mathrm{d}x\right]$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left[F(y)-\frac{1}{y}\int_0^y F(x)\mathrm{d}x\right]=l-l=0.$$

评注：本题属于求极限的综合问题，主要用到了反常积分、分部积分公式和积分上限函数，需知道，一个函数的积分上限函数就是它的一个原函数.

【例 1.20】（2011 年第三届全国大学生数学竞赛非数学类预赛试题）求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-\mathrm{e}^2[1-\ln(1+x)]}{x}.$$