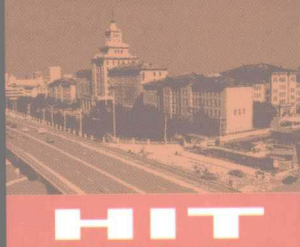


Elementary Differential Topology



数学·统计学系列

初等微分拓扑学

[美] 曼克勒斯 著 李培信 译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



数学·统计学系列

Elementary Differential Topology

初等微分拓扑学

● [美] 曼克勒斯 著 ● 李培信 译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书讲述微分拓扑学、特别是它的几何方面的基本内容,不涉及代数拓扑的结果与方法.全书共分两章,第一章微分流形,讲述了有关微分流形的一些经常用而不证的基本事实的证明;第二章微分流形的剖分,讲述光滑部分的存在性和唯一性.书中在每一个基本概念或定理之后都有习题和问题,便于读者思考.

本书可供高等学校数学系拓扑专业作为教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

初等微分拓扑学/(美)曼克勒斯著;李培信译. —哈尔滨:
哈尔滨工业大学出版社,2012.7
ISBN 978-7-5603-3638-1

I. ①初… II. ①曼…②李… III. ①微分拓扑
IV. ①O189.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 156012 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 杨万鑫 李 慧
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 6 字数 110 千字
版 次 2012 年 7 月第 1 版 2012 年 7 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-3638-1
定 价 18.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎ 序

可以说,微分拓扑学是研究微分流形在微分同胚下保持不变的各种性质的.这个领域内的问题,是由于研究流形的拓扑结构,组合结构以及微分结构之间的相互联系而产生的.可是,它们并不涉及联络、测地线、曲率等一类概念,因此这门学科与微分几何应该有所区别.

这一分支,由于 H. Whitney, S. S. Cairns, J. H. C. Whitehead 等人的工作,在 20 世纪 30 年代取得了特殊的发展.晚近,随着 J. Milnor, R. Thom, S. Smale, M. Kervaire 以及其他作者的工作而有了新的进展.当然,后期的工作是依赖于前期的,但在处理上大不相同,特别是它利用了代数拓扑的结果与方法.前期的工作在本质上是更多地属于纯粹几何的,因而在某种意义上较为初等.

以数论来打个比方,如果数论里把一个定理称为初等的,则它的证明没有用到复变函数的理论,否则这个证明就称为非初等的.按照这种理解,“初等”一词并不反映证明的难易,初等证明常常比其他的证明更为困难.

我们所谓微分拓扑的初等部分,也就有类似的意义.这就是本书的主题.

因为我们的定理和证明(除了很少的例外)都不涉及代数拓扑,我们希望读者具有下面的基础知识:多元函数的微分学

和有关的线性代数、点集拓扑以及第二章用到的单纯复形的几何(不是代数). 除了这些课题外,本书力图独立自主.

读者不会发现本书写得特别精致. 尽管如此,我们并不企求把任何证明都写成像一个定型的工作,甚至这个主题的最初等部分也是这样. 说得更确切一些,我们的希望宁愿是提供一本札记,使读者能够由此得到微分拓扑,至少在它的几何方面的一些感性知识. 为了这个目的,有必要让读者通过分散在书中各处的习题和问题来勤于思考,它们是按照这个目的细心挑选的.

“问题”一词用来指一种练习,无论是它的结果本身,抑或是它的证明,都是特别有趣或困难的. 那些对主题的逻辑连贯性来说并不重要的问题和练习,都记上一个星号.

关于微分流形有一些经常用而不证的基本事实,本书的第二个目的就是要提供一些比以前更易接受的证明. 第一章的大多数定理,粗言之,都是说:任何一个结果,它对无穷可微的流形和映射成立,那么对可微性的次数稍小时也成立. 这些定理的证明某些时候是所谓“口头文献”的一部分. 只是近来才有人把它们写下来([8]和[9])(Whitney 关于解析流形的更强的定理,要求特别不同的证明,可以在他的经典文章[15]中找到).

就某种意义而言,这些结果本身是消极的,因为它们断定 C^1 流形和 C^∞ 流形之间没有出现什么真正有意义的东西. 但是它们的证明,至少片面地对于其所含的技巧来说,仍然是有价值的.

第二章用来证明微分流形的光滑剖分的存在性与唯一性. 这方面我们根据 J. H. C. Whitehead 的工作[14]稍加修饰而成. 这一结果本身是微分拓扑最有用的工具之一,同时它所包含的技巧,对任何研究流形的组合结构与微分结构的人都是重要的. 如果读者的主要兴趣在于剖分,就可以略去 §4、§5、§6 而不致影响连贯性.

与 Milnor 1958 年在 Princeton 的微分拓扑讲义相比较,除了必需的以外,我们有意识地尽力避免过多的重复. 正因为如此,我们略去了 Whitney 嵌入定理的证明,而满足于较弱的. 我们希望在本书与 Milnor 的讲义之间,读者会找到一些有用的相互补充.

曼克勒斯

◎ 译者附言

微分拓扑学是研究微分流形与微分映射的学科. 它的最初思想归于 H. Poincaré, 当时他所谓的拓扑学就是现在的微分拓扑学. 在 20 世纪 30 年代由于 H. Whitney、S. S. Cairns 等人的工作, 微分拓扑学得到了进一步的发展. 而近十多年来的发展特别迅速. 一方面是新理论的创立, 如 Thom 的配边理论 (cobordism theory), Milnor 的纤维丛理论 (microbundle theory) 等. 另一方面是几乎每年都有一些原来看成高不可攀的著名古典问题得到了解决, 例如球面可以具有许多种不同的微分结构, 而且在许多场合我们能够计算它们的种数 (Milnor-Smale); 有这样的拓扑流形存在, 它们根本没有微分结构 (Kervaire); Haupt-Vermutung (主要推测) 已被否定 (Mazur-Milnor); H. Poincaré 猜想除了三维和四维的情形外已被证明 (Smale-Stallings), 等等.

由于这个学科和分析的紧密联系, 看来它将成为拓扑学中的一个主流.

目前关于微分流形方面的书籍还比较少, 在仅有的几本书中, J. R. Munkres 的书是有它自己的特色和优点的. 本书对基本概念不仅分析得细致清楚, 而且写得精练. 既介绍了一些基本结果, 又介绍了微分拓扑学中常用的一些技巧, 如光滑化引理, 管状邻域等, 同时内容安排却很紧凑. 另外, 在每讲一基本概念或基本定理之后都附有习题. 它是本书的有机部分, 使

读者能够更深一步来理解所讲的内容. 译者 1963 年在中国科学技术大学给数学系四年级几何拓扑专业同学讲微分流形一课, 曾将本书的一部分译出作为教材, 在教与学的过程中感到本书是一本有价值的书, 因此冒昧地介绍给国内读者参考.

李培信

1964 年 10 月于北京

◎ 目 录

第一章 微分流形	//1
§ 1 引言	//1
§ 2 子流形和嵌入	//10
§ 3 映射和逼近	//14
§ 4 映射的光滑化和流形的光滑化	//24
§ 5 有边流形	//30
§ 6 流形的倍流形的唯一性*	//41
第二章 微分流形的剖分	//46
§ 7 胞腔复形和组合等价	//46
§ 8 复形的浸入和嵌入	//51
§ 9 映射 f 导出的割映射	//59
§ 10 嵌入复形的相处	//64
参考文献	//71
名词索引	//72
编辑手记	//76

微分流形

第
一
章

§ 1 引言

在这一节里我们要定义像微分流形、微分映射、浸入、嵌入和微分同胚这样一些基本概念,并且要证明隐函数定理.

欧氏空间 $\mathbb{R}^m$ 看作是由所有无穷的实数序列 $x = (x^1, x^2, \dots)$ 组成的空间,这里在 $i > m$ 时, $x^i = 0$;欧氏半空间 H^m 是 $\mathbb{R}^m$ 的子集,满足条件 $x^m \geq 0$. 于是 $\mathbb{R}^{m-1} \subset H^m \subset \mathbb{R}^m$. 我们以 $\|x\|$ 记 $\sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^m)^2}$,以 $|x|$ 记 $\max |x^i|$. 单位球面 S^{m-1} 是 $\mathbb{R}^m$ 的子集,满足条件 $\|x\| = 1$;单位球 B^m 则是由合于 $\|x\| \leq 1$ 的点组成的子集; r -方体 $C^m(r)$ 是满足条件 $|x| \leq r$ 的点所成的集合. 如果不致发生混淆,我们也常常把 $\mathbb{R}^m$ 就看做是所有 m 维向量 $(x^1, \dots, x^m)$ 组成的空间.

1.1 定义 (拓扑)流形 M 是一个 Hausdorff 空间,具有可数基,并且满足下面条件:存在一个整数 m ,使得 M 的每一点都有一个邻域同胚于 H^m 或 $\mathbb{R}^m$ 的开子集.

如果 $h: U \rightarrow H^m$ (或 $\mathbb{R}^m$)是一个同胚映射,把 x 的邻域 U 映成 H^m 或 $\mathbb{R}^m$ 的一个开子集,则常常称 (U, h) 为 M 上的坐标邻

域. 如果 $h(U)$ 是 H^m 的开集, 并且 $h(x)$ 属于 $\mathbb{R}^{m-1}$, 则 x 称为 M 的边界点, 所有边界点的集合称为 M 的边界. 记为 $\text{Bd } M$. 如果 $\text{Bd } M$ 是空的, 则称 M 是无边流形 (在文献中, 流形一词通常仅用于 $\text{Bd } M$ 是空集的情形. 更广泛的名称是有边流形) 集合 $M - \text{Bd } M$ 称为 M 的内部, 记为 $\text{Int } M$. (如果 A 是拓扑空间 X 的子集合, 在不致引起混淆时, 我们也用 $\text{Int } A$ 表示 $X - \text{Cl}(X - A)$)

为了验证这些定义是合理的, 应当注意, 如果 $h_1: U_1 \rightarrow H^m$ 和 $h_2: U_2 \rightarrow H^m$ 是两个同胚映射, 分别把 x 的邻域 U_1 和 U_2 映成 H^m 的开集, 并且如果 $h_1(x)$ 属于 $\mathbb{R}^{m-1}$, 那么 $h_2(x)$ 也属于 $\mathbb{R}^{m-1}$: 假若不然, 则从映射 $h_1 h_2^{-1}$ 就会得到一个同胚映射, 把 H^m 中的一个开集映成点 $p = h_1(x)$ 在 H^m 中的一个邻域. 后者当然不是 $\mathbb{R}^m$ 的开集, 这与 Brouwer 的区域不变性定理 (见文献[3]95 页) 相矛盾.

还可以证明: 数 m 是由 M 唯一确定的; 这个数就称为 M 的维数, M 称为 n 维流形. 要得到这个结论可以利用 Brouwer 的区域不变性定理, 或者应用维数论的一个定理, 它说: M 的拓扑维数是 m (见文献[3]46 页). 严格说, 应用后面这个定理, 我们需要知道 M 是可分的可度量化空间, 但从点集拓扑的一个典型的度量化定理可以推出这点 (见文献[2]75 页).

从一个典型的定理还可以推出: M 是仿紧空间 (见文献[2]79 页). 仿紧的意思是说, 对 M 的任意开覆盖 $\mathcal{R}$, 存在 M 的另外一个开覆盖 $\mathcal{B}$, 使得:

- (1) $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{R}$ 的精致, 即 $\mathcal{B}$ 的每一个元素都包含在 $\mathcal{R}$ 的一个元素中.
- (2) 覆盖 $\mathcal{B}$ 是局部有限的, 即 M 的每一点都有一个邻域, 仅与 $\mathcal{B}$ 的有限多个元素相交.

还有一点应该注意, 因为 M 具有可数基, 所以 M 的任何一个局部有限开覆盖必为可数的.

习题 1 如果 M 是一个 m 维流形, 试证 $\text{Bd } M$ 是 $m - 1$ 维无边流形, 或者是空集.

习题 2 命 M 是一个 m 维流形, 具有非空边界. 命 $M_0 = M \times 0$ 和 $M_1 = M \times 1$ 是 M 的两个模型. 对于每个 $x \in \text{Bd } M$, 在 $M_0 \cup M_1$ 中把 $(x, 0)$ 和 $(x, 1)$ 粘合起来, 我们得到一个拓扑空间, 称为 M 的倍流形, 记为 $D(M)$. 试证: $D(M)$ 是 m 维无边流形.

习题 3 如果 M 和 N 分别是 m 维和 n 维流形, 那么 $M \times N$ 是 $m + n$ 维流形, 并且 $\text{Bd}(M \times N) = ((\text{Bd } M) \times N) \cup (M \times (\text{Bd } N))$.

1.2 定义 命 U 是 $\mathbb{R}^m$ 的开子集, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是一映射. 如果分量函数 $f^1, \dots, f^n$ 的直到 r 阶的偏导数都在 U 上连续, 那么就称 f 属于类 C^r 可微的, 或者说, f 属于 C^r . 如果对一切有限的 r , f 都属于 C^r , 则称 f 属于类 C^∞ .

命 A 是 $\mathbb{R}^m$ 的任意子集, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个映射. 如果 f 可以延拓为 A 在 $\mathbb{R}^m$ 中的

一邻域 U 上的函数,使得延拓后的函数在 U 上属于类 $C^r (1 \leq r \leq \infty)$,则称 $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是属于类 C^r 可微的. 实际上,我们仅在下面两种情况才应用这个定义:

(1) A 是 H^m 的开子集; (2) A 是 $\mathbb{R}^m$ 中一个闭的平直单形.

如果 $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是可微的, x 属于 A , 我们用 $Df(x)$ 来表示 f 在 x 处的 Jacobi 矩阵, 它的一般项是 $a_{ij} = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}$. 我们也用记号 $\frac{\partial(f^1, \dots, f^n)}{\partial(x^1, \dots, x^m)}$ 表示这个矩阵. 为定义这些偏导数, 首先必须把 f 延拓到 A 的邻域上; 在那两个我们感兴趣的情形中, 偏导数与延拓的选取无关 (见习题 2).

这里我们回忆一下导数的链法则, 这个法则是说 $D(fg) = Df \cdot Dg$, 其中 fg 是复合函数, 黑点表示矩阵乘法.

习题 1 验证可微性的定义是完全确定的, 即 $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的可微性并不依赖于 A 的“包含空间” $\mathbb{R}^m$ 的选取.

习题 2 命 A 是 H^m 的开集, 或者是 $\mathbb{R}^m$ 中一个闭的平直 m 维单形. 如果 $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ 属于类 C^1 , 而 x 属于 A . 试证: $Df(x)$ 不依赖于 f 到 A 在 $\mathbb{R}^m$ 中的邻域上所取的延拓.

* **习题 3** 试求 $\mathbb{R}^2$ 的一个开子集 U 和一个类 C^1 的映射 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ (这里 $A = \overline{U}$), 使得习题 2 所述定理的结论不成立.

注 命 f 把 $\mathbb{R}^m$ 的子集 A 映入 $\mathbb{R}^n$. 如果 A 是 $\mathbb{R}^m$ 的开集, 则显然可见, f 可微的一个充分条件是: f 是局部可微的, 即 A 的每一点都有一个邻域 V , 使得 $f|_V \cap A$ 是可微的. 但是, 如果 A 不是 $\mathbb{R}^m$ 的开集, 这个结论就不像这样明显, 而是需要下面三个引理才能证明的.

1.3 引理 存在属于类 C^∞ 的函数 $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1$, 它在 $C(\frac{1}{2})$ 上等于 1, 在 $C(1)$ 内部是正的, 而在 $C(1)$ 的外面等于零.

证明 命 $f(t) = e^{-\frac{1}{t}}, t > 0; f(t) = 0, t \leq 0$. 那么 f 属于类 C^∞ , 当 $t > 0$ 时, 它是正的.

命 $g(t) = \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}$. 那么 g 是一个属于类 C^∞ 的函数, 使得当 $t \leq 0$ 时, $g(t) = 0$; 当 $0 < t < 1$ 时, $g(t) > 0$; 当 $t \geq 1$ 时, $g(t) = 1$.

命 $h(t) = g(2t+2) \cdot g(-2t+2)$, 那么 h 是一个属于类 C^∞ 的函数, 使得当 $|t| \geq 1$ 时, $h(t) = 0$, 当 $|t| \leq 1$ 时, $h(t) > 0$, 当 $|t| \leq \frac{1}{2}$ 时, $h(t) = 1$ (图 1).

命 $\varphi(x^1, \dots, x^m) = h(x^1) \cdot h(x^2) \cdot \dots \cdot h(x^m)$, 就满足引理的要求.

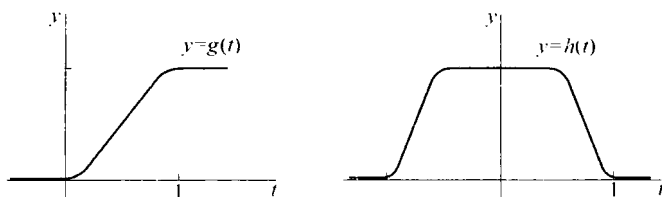


图 1

习题 推广上述引理如下: 命 U 是 $\mathbb{R}^m$ 的开子集; 命 C 是 U 的一个紧致子集. 那么存在一个类 C' 的实值函数 ψ , 定义在 $\mathbb{R}^m$ 上, 使得 ψ 在 C 上是正的, 而在 U 的补集的一个领域内是零.

注 X 的一些子集作成的有标组 $\{C_i\}$ 称为局部有限的, 是指 X 的每一点都有一个邻域只与有限多个 C_i 相交. 这个约定是方便的, 否则序列 $C_1, C_2, \dots$ 中某个集合可能出现无穷多次.

1.4 引理 命 $\{U_i\}$ 是拓扑流形 M 的一个局部有限的开覆盖. 那么存在 M 的一个闭覆盖 $\{C_i\}$, 使得对每一个 i 有 $C_i \subset U_i$.

证明 我们用归纳法来构造这个覆盖. 命 V_1 是一个包含 $M - (U_2 \cup U_3 \cup \dots)$ 的开集, 它的闭包含于 U_1 里. (利用 M 的正规性就知道这样的 V_1 是存在的) 命 $C_1 = \bar{V}_1$.

假设我们已经构造了 $V_1, \dots, V_{j-1}$, 使得 $\bar{V}_k \subset U_k, k = 1, 2, \dots, j-1$, 并且 $V_1 \cup \dots \cup V_{j-1} \cup U_j \cup \dots = M$. 命 V_j 是一个开集含有

$$M - (V_1 \cup \dots \cup V_{j-1} \cup U_{j+1} \cup \dots)$$

而它的闭包含于 U_j 里. 命 $C_j = \bar{V}_j$.

为了证明集组 $\{V_j\}$ 覆盖 M , 我们注意, 任何一点 x 都只属于有限多个集合 U_j . 因此, 对于某一个 j , x 不属于 $U_j \cup U_{j+1} \cup \dots$. 由归纳假设, 可见 x 必须属于 $V_1 \cup \dots \cup V_{j-1}$.

1.5 引理 命 A 是 $\mathbb{R}^m$ 的子集. 命 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. 如果 f 局部地属于类 C' , 则 f 属于类 C' .

证明 由假设, 对 A 的每一点 x , 存在 x 的一个邻域 U_x , 使得 $f|A \cap U_x$ 可以延拓为一个函数, 它在 U_x 上属于类 C' . 我们选取 U_x 使得 $\bar{U}_x$ 是紧致的. 命 M 是集合 U_x 的并集; 它是 $\mathbb{R}^m$ 的开子集. 命 $\{V_j\}$ 是 M 的覆盖 $\{U_x\}$ 的局部有限的开精致. 命 $\{C_i\}$ 是 M 的闭覆盖, 使得对每一个 i 有 $C_i \subset V_i$. 命 ψ_i 是定义在 $\mathbb{R}^m$ 上的类 C^∞ 的函数, 它在 C_i 上是正的, 而在 V_i 的补集的一个邻域内等于零. 那么 $\sum \psi_j(x)$ 是 M 上的类 C^∞ 函数, 这是由于它在 M 的任一已知点的某个领域内等

于一个有限和. 定义 $\varphi_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\sum \psi_j(x)}$, 那么 $\sum \varphi_i(x) = 1$.

对每一个 i , 命 f_i 表示 $f|A \cap V_i$ 在 V_i 上的一个属于类 C' 的延拓; 如果 $A \cap V_i$ 是空的, 则命 f_i 是零函数. 那么 $\varphi_i f_i$ 可以延拓为 M 上的类 C' 函数, 这只需让它在 V_i 外为零.

定义

$$\tilde{f}(x) = \sum_i \varphi_i(x) f_i(x)$$

在 M 的任意一点 x 的某个邻域内, 这是有限和, 因此在 M 上属于类 C' . 此外, 如果 x 属于 A , 则对每一个 i , 有 $f_i(x) = f(x)$, 所以

$$\tilde{f}(x) = \sum \varphi_i(x) f(x) = f(x)$$

因此 $\tilde{f}$ 是 f 在 A 的关于 $\mathbb{R}^m$ 的邻域 M 上的 C' 延拓, 这就是所要求的.

1.6 定义 一个类 C' 的 m 维微分流形是指一个 m 维流形 M 和 M 上的一个类 C' 的微分结构 $\mathcal{L}$. M 上一个类 C' 的微分结构 $\mathcal{L}$, 是指 M 上的一组坐标邻域 (U, h) , 满足下面三个条件:

(1) $\mathcal{L}$ 中的坐标邻域覆盖 M .

(2) 如果 (U_1, h_1) 和 (U_2, h_2) 属于 $\mathcal{L}$, 那么

$$h_1 h_2^{-1} : h_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ 或 } H^m$$

是属于类 C' 可微的.

(3) 集 $\mathcal{L}$ 关于性质 (2) 是最大的, 即如果把任何一个不属于 $\mathcal{L}$ 的坐标邻域加入集 $\mathcal{L}$, 那么性质 (2) 不成立.

$\mathcal{L}$ 的元素常常称为微分流形 M 上的坐标系.

习题 1 命 $\mathcal{L}'$ 是 M 上的一系列坐标邻域的集合, 满足条件 (1) 和 (2). 证明: 存在唯一含有 $\mathcal{L}'$ 的类 C' 的微分结构 $\mathcal{L}$. (仿照一个拓扑的基和这个拓扑之间的关系, 我们也称 $\mathcal{L}'$ 为 $\mathcal{L}$ 的基)

[提示: 命 $\mathcal{L}$ 是由 M 上的所有这种坐标邻域 (U, h) 组成, 它们和 $\mathcal{L}'$ 的每个元素都是类 C' 可微复迭的; 这意思是指, 对 $\mathcal{L}'$ 的每一个元素 (U_1, h_1)

$$h_1 h^{-1} : h(U \cap U_1) \rightarrow H^m \text{ 或 } \mathbb{R}^m$$

$$h h_1^{-1} : h_1(U \cap U_1) \rightarrow H^m \text{ 或 } \mathbb{R}^m$$

都是类 C' 可微的. 为了证明 $\mathcal{L}$ 是微分结构, 读者应该利用引理 1.5]

习题 2 命 M 是类 C' 的微分流形 (在不致发生混淆时, 我们常常不再提到微分结构 $\mathcal{L}$). 那么 M 自然地也可以看作是一个类 C'^{-1} 的微分流形; 这只需取 $\mathcal{L}$ 作为 M 上类 C'^{-1} 的微分结构 $\mathcal{L}_1$ 的基. 试证: $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_1$ 是真正的包含关系. 这证明

一个微分流形所属的类 C' 是唯一确定的.

由此可见,一个微分流形 M 所属的类可以任意降低,只要把新的坐标系加入微分结构即可.反之亦然,但这却需要更多的工作来证明.

* 习题3 如果 M 是一个微分流形,要在 $D(M)$ 上配备一个微分结构,涉及的困难是什么? ($D(M)$ 的定义见 1.1 的习题 2)

1.7 定义 命 M 和 N 是两个微分流形,分别具有维数 m 和 n ,并且都是至少属于类 C' . 命 A 是 M 的子集, $f: A \rightarrow N$, f 称为属于类 C' , 如果 (U, h) 和 (V, k) 分别是 M 和 N 的任意坐标系,复合映射

$$kfh^{-1}: h(A \cap U) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

属于类 C' . (注意,虽然在微分结构保持不变时,类 C^2 的流形不是类 C^1 的流形,尽管如此,但类 C^2 的映射却也属于类 C^1)

f 在 M 的点 p 处的秩,是指 $D(kfh^{-1})$ 的秩,这里 (U, h) 和 (V, k) 分别是关于 p 和 $f(p)$ 的坐标系. 这个数是确定的,因为如果 (U_1, h_1) 和 (V_1, k_1) 是另外两个这样的坐标系,我们就有

$$D(k_1fh_1^{-1}) = D(k_1k^{-1}) \cdot D(kfh^{-1}) \cdot D(hh_1^{-1})$$

关于微分结构的要求,保证了 k_1k^{-1} 和 kk_1^{-1} 两者都是可微的,所以 $D(k_1k^{-1})$ 是非异的,以 $D(kk_1^{-1})$ 作为它的逆. 类似地, $D(hh_1^{-1})$ 是非异的,所以 $D(k_1fh_1^{-1})$ 和 $D(kfh^{-1})$ 有相同的秩.

习题 $\mathbb{R}^n$ 上的标准的类 C^∞ 的微分结构,是以单独一个坐标系 $i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 作为基而得到的微分结构. 对 H^m 也是类似的. 如果在前面的定义中,空间 M 或 N 之一是 $\mathbb{R}^m$ 或 H^m , 验证在 1.2 和 1.7 中所给的可微性定义是一致的.

1.8 定义 命 $f: M \rightarrow N$ 是属于类 C' 可微的,命 M 和 N 分别具有维数 m 和 n . 如果在 M 的每一点 p 处, $\text{rank } f = m$, 则 f 称为一个浸入. 如果 f 是同胚(入映射)并且是浸入,则称它为一个嵌入. 如果 f 是把 M 映成 N 的同胚,并且是浸入. 则称它为一个微分同胚. 自然,这时 $m = n$.

习题 1 注意 $\text{Bd } H^m = \mathbb{R}^{m-1}$, 而包含映射 $\mathbb{R}^{m-1} \rightarrow H^m$ 是嵌入. 推广这个事实如下: 如果 M 是类 C' 的微分流形, 那么 $\text{Bd } M$ 上存在唯一的类 C' 的微分结构, 使得包含映射 $\text{Bd } M \rightarrow M$ 是类 C' 的嵌入.

习题 2 命 M 和 N 都属于类 C' , M 是无边的. 构造 $M \times N$ 上一个类 C' 的微分结构, 使得分别把 M 和 N 映入 $M \times N$ 的自然包含映射都是嵌入. 我们为什么要求 M 是无边的?

习题 3 证明两个浸入的复合还是一个浸入.

* **习题 4** 构造一个把 S^1 映入 $\mathbb{R}^2$ 的类 C^∞ 的浸入, 它把 S^1 变成 8 字形的图形. 这个浸入可以延拓为把 B^2 映入 $\mathbb{R}^2$ 的浸入么?

* 习题5 证明:拓扑流形 M 上的两个类 C^r 的微分结构相同的充分必要条件是:把一个微分流形映成另一个的恒同映射是一个类 C^r 的微分同胚.

* 习题6 构造流形 $\mathbb{R}^1$ 上两个不同的类 C^∞ 的微分结构. 证明所得的微分流形是微分同胚的.

(在同一个 m 维拓扑流形上,两个不同的微分结构是否给出微分同胚的微分流形? 这久已成为一个古典的问题了,近来已经取得一些进展:如果 $m \leq 3$, 回答是肯定的(见文献[10],[13]). 如果 $m = 7$, 答案是否定的(见文献[5]). 还知道一些其他的结果,但遗留很多工作需要做)

1.9 问题 如果 $f: M \rightarrow N$ 是类 C^r 的微分同胚,证明 f^{-1} 也是类 C^r 的微分同胚.

提示:按下面的步骤来证明这个结果. 命 g 把 $\mathbb{R}^m$ 的开子集 U 映入 $\mathbb{R}^n$.

(1) $Dg(x)$ 是存在的,如果存在矩阵函数 $A(x)$ 和 $R(x_1, x)$, 使得

$$g(x_1) - g(x) = A(x) \cdot (x_1 - x) + R(x_1, x)$$

(这里 g, x_1, x 和 R 是列矩阵), 并且当 $x_1 \rightarrow x$ 时, $\frac{R(x_1, x)}{\|x_1 - x\|} \rightarrow 0$. 由此推出 $A(x) = Dg(x)$.

(2) 如果 g 在 U 上属于类 C^1 , 并且 A 是 U 的紧致子集, 那么

$$g(x_1) - g(x) = Df(x) \cdot (x_1 - x) + R(x_1, x)$$

这里对于 A 中的 x_1 和 x , 当 $\|x_1 - x\| \rightarrow 0$ 时, $\frac{R(x_1, x)}{\|x_1 - x\|}$ 一致趋于零.

(3) 如果 g 在 U 上属于类 C^1 , 并且在紧致集 A 的每一点处都有秩 m , 那么 g 满足 Lipschitz 条件: 存在常数 m 和 M , 使得

$$0 < m < \frac{\|g(x_1) - g(x)\|}{\|x_1 - x\|} < M$$

其中 x_1 和 x 属于 A .

(4) 命 f 是 $\mathbb{R}^m$ 的开子集 U 到 $\mathbb{R}^n$ 里的一个开集上的同胚; 命 f 在 U 上属于类 C^1 , 并且在 x 上有秩 m . 那么 $D(f^{-1})$ 在 $f(x)$ 上存在并且等于 $Df(x)$ 的逆.

1.10 问题* 在 $\mathbb{R}^2$ 的第一象限 $H^1 \times H^1$ 上, 构造一个类 C^∞ 的微分结构, 使得包含映射 $i: H^1 \times H^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是可微的. i 是否可以是一嵌入? 推广你的方法来证明如果 M 和 N 属于类 C^r , 那么在 $M \times N$ 上有一类 C^r 的微分结构, 使得 M 和 N 的自然包含映射都是嵌入.

注 以前我们借助于 Brouwer 的区域不变性定理来证明流形的边界和维数是完全确定的. 如果我们限于考虑那些可以允许微分结构存在的流形(最近 Kervaire 证明这是一个实在的限制), 那么在某种程度上, 可以不用 Brouwer 定理的帮助, 只需利用下面的定理, 它类似于区域不变性定理.

1.11 定理 命 f 是一个类 C^1 的映射, 把 $\mathbb{R}^m$ 的开子集 U 映入 $\mathbb{R}^m$, 且在点 x 处有秩 m . 那么 f 是一个同胚映射, 把 x 的某个邻域映成 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^m$ 中的一个邻域.

证明 我们可以假设, x 和 $f(x)$ 都是原点, 并且 $Df(0) = I, I$ 是单位矩阵. (为什么) 选以 r 充分小, 使得方体 $C(r)$ 含于 U , 并且当 x 属于 $C(r)$ 时, $Df(x) - I$ 的最大的元素绝对值小于等于 $\frac{1}{2m}$. 如果我们命 $g(x) = f(x) - x$, 那么在 x_1, x_2 属于 $C(r)$ 时

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq \frac{1}{2} |x_1 - x_2|$$

和

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq \frac{1}{2} |x_1 - x_2|$$

首先, 我们证明, $C\left(\frac{r}{2}\right)$ 的每一点 y 是 $C(r)$ 的一点 x 在 f 下的象. 为此, 命 $x_0 = 0, x_1 = y$, 并且, 一般说来, 若 x_n 属于 g 的定义域, 则命

$$x_{n+1} = y - g(x_n)$$

注意 $|x_{n+1} - x_n| = |g(x_n) - g(x_{n-1})| \leq \frac{1}{2} |x_n - x_{n-1}|$, 所以

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |x_1 - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{r}{2}\right)$$

把这些不等式加起来, 我们看到, 在 $m \leq n$ 时

$$|x_{n+1} - x_m| < \left(\frac{1}{2}\right)^m r$$

从上面这个不等式 (取 $m = 0$) 推出, x_{n+1} 必须属于 $C(r)$, 因而在 g 的定义域里. 所以事实上, x_n 对所有的 n 都有定义. 从这个不等式还推出序列 x_n 是 Cauchy 序列, 因此它收敛到某一点 x . 故 $x = y - g(x)$, 所以 $f(x) = y$.

其次, 我们注意 $C(r)$ 只有一个点 x 使得 $f(x) = y$. 假若不然, 就与 $x_1, x_2 \in C(r)$ 时, $|f(x_1) - f(x_2)| \geq \frac{1}{2} |x_1 - x_2|$ 这个事实发生矛盾.

最后, 我们注意, 逆映射 $f^{-1}: C\left(\frac{r}{2}\right) \rightarrow C(r)$ 是连续的, 因为 $|y_1 - y_2| \geq \frac{1}{2} |f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)|$, 其中 $y_1, y_2 \in C\left(\frac{r}{2}\right)$.

因此 f 是一个同胚映射, 把开集 $f^{-1}\left(C\left(\frac{r}{2}\right)\right) \cap \text{Int } C(r)$ 映成开集 $\text{Int } C\left(\frac{r}{2}\right)$, 即所求证.

1.12 推论 (反函数定理) 命 f 把 $\mathbb{R}^m$ 的开集 U 映入 $\mathbb{R}^m$; 命 f 属于类 C^r 而且

在点 x 处具有秩 m . 那么 f 是一个类 C^r 的微分同胚, 把点 x 的一个邻域映成 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的一个邻域.

证明 因为我们知道 f 在上述的某个邻域上是一个同胚, 我们仅需把这个邻域取得这样小, 使得 f 在这个邻域上处处具有秩 m . 这是可能的, 因为适合 $\det Df(x) \neq 0$ 的点 x 组成一个开集.

1.13 推论 (隐函数定理) 命 $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^p)$ 表 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ 的一般点. 命 f 是一个类 C^r 的映射, 把原点 0 在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ 中的邻域 U 映入 $\mathbb{R}^p$, $f(0) = 0$, 以及 $\frac{\partial(f^1, \dots, f^p)}{\partial(y^1, \dots, y^p)}$ 在点 0 处是非异的. 于是, 存在唯一的类 C^r 的函数 g , 把 0 在 $\mathbb{R}^n$ 中的一个邻域映入 $\mathbb{R}^p$, 使得 $g(0) = 0$, 并且对于这个邻域里的点 x , $f(x, g(x)) = 0$.

证明 定义 $F: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ 为

$$F(x, y) = (x^1, \dots, x^n, f^1(x, y), \dots, f^p(x, y))$$

因为 $DF(x)$ 的形式为

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

它在原点是可逆的. 因此在 0 附近 F 有局部逆映射 G . 如果我们要 $f(x, g(x)) = 0$, 那么必须

$$F(x, g(x)) = (x, f(x, g(x))) = (x, 0)$$

所以

$$GF(x, g(x)) = (x, g(x)) = G(x, 0)$$

因此我们必须定义 $g(x) = \pi G(x, 0)$, 这里 π 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ 到 $\mathbb{R}^p$ 上的投影. 我们留给读者去验证, 这样定义的 $g(x)$ 就满足定理的要求.

1.14 推论 命 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是类 C^r 的映射, 使得 f 在原点具有秩 m , 并且 $f(0) = 0$. 那么存在一个类 C^r 的微分同胚 g , 把 $\mathbb{R}^n$ 中原点的一个邻域映成另一个邻域, 使得

$$gf(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0)$$

证明 我们可以假设 Df 的子矩阵 $\frac{\partial(f^1, \dots, f^m)}{\partial(x^1, \dots, x^m)}$ 在 0 处是非异的, 因为 Df

总有一个 m 行 m 列的子矩阵是非异的. 定义 $F: U \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 如下

$$F(x^1, \dots, x^n) = f(x^1, \dots, x^m) + (0, \dots, 0, x^{m+1}, \dots, x^n)$$

那么 F 在 0 处具有秩 n , 因为 DF 具有下面形状

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

因此 F 有局部逆映射 g . 现在 g 就是一个类 C^r 的微分同胚, 把 $\mathbb{R}^n$ 中原点的一个邻域映成自身, 并且