# 2

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

# Б.П.吉米多维奇
# 数学分析
# 习题集题解

第四版

山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

# 2

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

# Б.П.吉米多维奇
# 数学分析
## 习题集题解

第四版

山东科学技术出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

Б.П.吉米多维奇数学分析习题集题解 2/费定晖，周学圣编演.—4 版. —济南：山东科学技术出版社，2012
ISBN 978-7-5331-5899-6

Ⅰ.①吉... Ⅱ.①费... ②周... Ⅲ.①数学分析—高等学校—题解 Ⅳ.①017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 120151 号

**Б.П.吉米多维奇**
**数学分析习题集题解 2**

**出版者：山东科学技术出版社**
地址：济南市玉函路16号
邮编：250002　电话：(0531)82098088
网址：www.lkj.com.cn
电子邮件：sdkj@sdpress.com.cn

**发行者：山东科学技术出版社**
地址：济南市玉函路16号
邮编：250002　电话：(0531)82098071

**印刷者：山东新华印刷厂潍坊厂**
地址：潍坊市潍州路753号
邮编：261031　电话：(0536)2116806

开本：787 mm × 1092mm　1/16
印张：14
版次：2012 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

**ISBN 978-7-5331-5899-6**
**定价：19.00 元**

# 第四版前言

本书自 1979 年出版发行以来，历经 30 多个春秋，一直畅销不衰，深得读者厚爱。在郭大钧教授的帮助和指导下，对全书我不断地修订和补充，不断地修正错误，不断地替换更为简洁的解法和证明，力求本书一直保持其先进性、完整性和准确性，以求对读者的高度责任感。读者通过学习该书，对掌握数学分析的基本知识、基础理论和基本技能的训练，感到获益匪浅，赞誉其为学习数学分析“不可替代”之图书，对此我们倍感欣慰，鞭策我们为读者作出更多的奉献。

这次受山东科学技术出版社的约请，并得到郭大钧教授的大力支持，仍由我负责全书第四版的修订、增补和校阅工作，以适应文化建设繁荣发展的需要，更加激发全国广大读者的强烈求知欲。具体主要做了以下几方面的工作：

第一，为全书 4462 题中的近三成的习题，根据题型的不同，在原题解的前面，分别或给出提示，或给出解题思路，或给出证明思路。冀图启发读者怎样分析该题，怎样下手求解；启发读者怎样总结解题的规律；启发读者怎样正确使用有关的数学公式、概念和理论，开拓视野，活跃思路；帮助读者逐步解决学习中的困难，为他们在学习过程中提供一个良师益友。这是本次修订的主要工作。

第二，根据当前的语言习惯，对全书的文字作了较多的润色，使其表述更加准确，更加简洁凝练。

第三，改正了第三版中的个别印刷错误，修正了函数图像中的个别问题和个别习题的答案。

第四，根据国家相关标准，规范了有关术语和数学式子的表达；并对全书使用的外国人名，按照现在的标准或通用译法重新翻译人名，以求统一标准。

第五，对全书的版面和开本重新进行了调整，使其更富有时代的色彩。

我们殷切期望使用本书的读者，懂得只有通过个人的独立思考，加上勤学苦练才能取得成功，“只看不练假把式”，数学的学习是在个人的独立解题中逐步弄懂有关的概念、公式和理论的，我们编写本书，就是希望能

对数学分析课程的学习起到一个抛砖引玉的作用。读者使用本书最好是不要先看题解,更不要查抄解答和答案,而是自己先对照教材中的有关概念、公式和理论独立进行思考,必要时可参照书中的提示、解题思路或证明思路独立完成解题,然后再查看书中是怎样解答的,比较自己的解答和书中解答的异同,从中找出差距,找出自己的问题所在,甚至找出书中解答的的错误和不足之处,进而找到更为简洁的解答。只有这样才能提高自己的思维能力和创造才能,任何削弱独立思考的做法都是违背我们出版本书的初衷的。

山东科学技术出版社颜秀锦、宋德万、胡新蓉等老一代资深编辑为本书前三版的出版和发行付出了艰辛努力,责任编辑宋涛为本书第四版怎样提高质量倾注了不少心血,在此我们一并表示感谢。同时感谢山东大学、华东交通大学、山东师范大学等兄弟学校对本书出版的支持。感谢社会各界同仁对本书的支持。虽然历经 30 余年的反复修订,面对如此庞大的图书,限于本人水平,书中难免有错误和不当之处,敬请各位专家、同仁和广大读者批评指正,不胜感激,并在新版中改正。

费 定 晖

2012 年 5 月于南昌华东交通大学

# 出版说明 CHUBANSHUOMING

吉米多维奇(Б. П. ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本,自50年代初在我国翻译出版以来,引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生,常以试解该习题集中的习题,作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来,对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题,数量多,内容丰富,由浅入深,部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限,一元函数微分学,不定积分,定积分,级数,多元函数微分学,带参数的积分以及多重积分与曲线积分、曲面积分等等,概括了数学分析的全部主题。当前,我国广大读者,特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者,在为四个现代化而勤奋学习的热潮中,迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此,我们特约作者,将全书4462题的所有解答汇辑成书,共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书,同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知,原习题集,题多难度大,其中不少习题如果认真习作的话,既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念,又可以有效地提高我们的运算能力,特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样,我们殷切期望初学数学分析的青年读者,一定要刻苦钻研,千万不要轻易查抄本书的解答,因为任何削弱独立思索的作法,都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准,仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免,一经发觉,恳请指正,不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题,都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有刘一鸣同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中,还得到山东大学、山东工学院、山东师范学院和曲阜师范学院的领导和同志们的大力支持,特在此一并致谢。

1979年于济南

# 目录

# 第二章　一元函数微分学

## §1.　显函数的导数

1° **导数的定义**　若 $x$ 及 $x_1=x+\Delta x$ 为自变量的值，则差

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

称为函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[x,x_1]$ 上的**增量**. 表达式

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{1}$$

若有意义，则称为**导数**，而函数 $f(x)$ 本身在此情形下称为**可微函数**.

导数 $f'(x)$ 在几何上是函数 $y=f(x)$ 的图像在 $x$ 点切线的斜率 $[\tan\alpha=f'(x)]$（图 2.1）.

2° **求导数的基本法则**　若 $c$ 为常数且函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$，$w=w(x)$ 都有导数，则

(1) $c'=0$；　(2) $(cu)'=cu'$；

(3) $(u+v-w)'=u'+v'-w'$；　(4) $(uv)'=u'v+v'u$；

(5) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$　$(v\neq 0)$；　(6) $(u^n)'=nu^{n-1}u'$　（$n$ 为常数）；

(7) 若函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 都有导数，则 $y'_x=y'_u u'_x$.

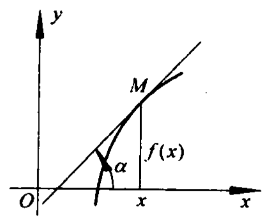


图 2.1

3° **基本公式**　若 $x$ 为自变量*，则

Ⅰ. $(x^n)'=nx^{n-1}$（$n$ 为常数）；

Ⅱ. $(\sin x)'=\cos x$；

Ⅲ. $(\cos x)'=-\sin x$；

Ⅳ. $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$；

Ⅴ. $(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$；

Ⅵ. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

Ⅶ. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

Ⅷ. $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$；

Ⅸ. $(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$；

Ⅹ. $(a^x)'=a^x\ln a$　$(a>0)$；$(e^x)'=e^x$；

Ⅺ. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$　（$a>0$ 且 $a\neq 1$）；$(\ln x)'=\frac{1}{x}$；

Ⅻ. $(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$；

ⅩⅢ. $(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$；

ⅩⅣ. $(\operatorname{th} x)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$；

ⅩⅤ. $(\operatorname{cth} x)'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

4° **单侧导数**　表达式

$$f'_-(x)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},\quad f'_+(x)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

分别称为函数 $f(x)$ 在 $x$ 点的**左导数**和**右导数**.

---

* 在本章基本公式及习题解答的叙述过程中，一些明显的定义域要求，例如，本节公式Ⅴ中要求 $x\neq k\pi$（k 为整数），Ⅵ中要求 $|x|<1$ 等等. 以及例如尔后 §5 中相应的限制，一般地就不再一一声明.

《题解》作者注

导数 $f'(x)$存在的充分必要条件是

$$f'_-(x)=f'_+(x).$$

5° **无穷导数** 若函数 $f(x)$在点 $x$ 连续，且

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\infty,$$

则称函数 $f(x)$在点 $x$ 有无穷导数. 在此种情形下，函数 $y=f(x)$的图像在 $x$ 点的切线与 $Ox$ 轴垂直.

**【821】** 若 $x$ 由 1 变到 1000，求自变量 $x$ 的增量$\Delta x$ 和函数 $y=\lg x$ 的相应增量$\Delta y$.

**解** $\Delta x=1000-1=999$; $\Delta y=\lg 1000-\lg 1=3$.

**【822】** 若 $x$ 由 0.01 变到 0.001，求自变量 $x$ 的增量$\Delta x$ 和函数 $y=\frac{1}{x^2}$的相应增量 $\Delta y$.

**解** $\Delta x=0.001-0.01=-0.009$; $\Delta y=\frac{1}{(0.001)^2}-\frac{1}{(0.01)^2}=990000$.

**【823】** 设：(1) $y=ax+b$; (2) $y=ax^2+bx+c$; (3) $y=a^x$. 若变量 $x$ 的增量为$\Delta x$，求增量 $\Delta y$.

**解** (1) $\Delta y=[(ax+a\Delta x)+b]-[ax+b]=a\Delta x$;

(2) $\Delta y=[a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c]-[ax^2+bx+c]=(2ax+b)\Delta x+a(\Delta x)^2$;

(3) $\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1)$.

**【824】** 证明：(1) $\Delta[f(x)+g(x)]=\Delta f(x)+\Delta g(x)$;

(2) $\Delta[f(x)g(x)]=g(x+\Delta x)\Delta f(x)+f(x)\Delta g(x)$.

**提示** 由增量的定义，命题即获证.

**证** (1) $\Delta[f(x)+g(x)]=[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)]-[f(x)+g(x)]$

$$=[f(x+\Delta x)-f(x)]+[g(x+\Delta x)-g(x)]=\Delta f(x)+\Delta g(x),$$

于是，$\Delta[f(x)+g(x)]=\Delta f(x)+\Delta g(x)$;

(2) $\Delta[f(x)g(x)]=[f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)]-[f(x)g(x)]$

$$=[f(x+\Delta x)-f(x)]g(x+\Delta x)+[g(x+\Delta x)-g(x)]f(x)$$

$$=\Delta f(x)g(x+\Delta x)+\Delta g(x)f(x),$$

于是，$\Delta[f(x)\ g(x)]=g(x+\Delta x)\Delta f(x)+f(x)\Delta g(x)$.

同样，我们还可将(2)的结果写成 $\Delta[f(x)g(x)]=f(x+\Delta x)\Delta g(x)+g(x)\Delta f(x)$.

**【825】** 过曲线 $y=x^2$ 上的二点 $A(2,4)$和 $A'(2+\Delta x,4+\Delta y)$引割线 $AA'$，求此割线的斜率，设：

(1) $\Delta x=1$; (2) $\Delta x=0.1$; (3) $\Delta x=0.01$; (4) $\Delta x$ 为任意小量.

在该曲线上 $A$ 点的切线的斜率等于什么？

**解** 割线 $AA'$的斜率 $k_{AA'}=\frac{(2+\Delta x)^2-4}{\Delta x}=4+\Delta x$,

(1) $k_{AA'}=5$; (2) $k_{AA'}=4.1$; (3) $k_{AA'}=4.01$; (4) $k_{AA'}=4+\Delta x$.

于是，在 $A$ 点的切线斜率为

$$k_A=\lim_{A'\to A}k_{AA'}=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4.$$

**【826】** 利用函数 $y=x^3$ 把 $Ox$ 轴上的线段 $1\leqslant x\leqslant 1+h$ 映射到 $Oy$ 轴上. 求其平均伸长系数. 设：

(1) $h=0.1$; (2) $h=0.01$; (3) $h=0.001$,

计算此系数的值. 当 $x=1$ 时伸长的系数等于什么？

**解** 平均伸长系数 $\bar{l}=\frac{(1+h)^3-1^3}{h}=3+3h+h^2$,

(1) $\bar{l}=3+3(0.1)+(0.1)^2=3.31$;

(2) $\bar{l}=3+3(0.01)+(0.01)^2=3.0301$;

(3) $\bar{l}=3+3(0.001)+(0.001)^2=3.003001$.

于是，$l\Big|_{x=1}=\lim\limits_{h\to 0}\bar{l}=3$.

【827】 动点沿 $Ox$ 轴运动的规律由下式给出

$$x=10t+5t^2,$$

式中 $t$ 以 s(秒)计的时间,$x$ 为以 m(米)计的距离.求在 $20\leqslant t\leqslant 20+\Delta t$ 时间内运动的平均速度.设:

(1)$\Delta t=1$; (2)$\Delta t=0.1$; (3)$\Delta t=0.01$,

计算此速度的值.当 $t=20$ 时运动的速度等于什么?

**解** 平均速度

$$\bar{v}=\{[10(20+\Delta t)+5(20+\Delta t)^2]-[10\times 20+5\times 20^2]\}\div\Delta t=210+5\Delta t\ (\text{m/s}),$$

(1) $\bar{v}=210+5\times 1=215$ (m/s);

(2) $\bar{v}=210.5$ (m/s);

(3) $\bar{v}=210.05$ (m/s).

于是,$v\Big|_{t=20}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(210+5\Delta t)=210$ (m/s).

【828】 根据导数的定义,直接求下列函数的导数:

(1)$x^2$; (2)$x^3$; (3)$\dfrac{1}{x}$; (4)$\sqrt{x}$; (5)$\sqrt[3]{x}$;

(6)$\tan x$; (7)$\cot x$; (8)$\arcsin x$; (9)$\arccos x$; (10)$\arctan x$.

**解** (1) $y=x^2$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=2x+\Delta x.$$

于是,$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$.

(2) $y=x^3$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2,$$

于是,$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2]=3x^2$.

(3) $y=\dfrac{1}{x}$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}}{\Delta x}=-\frac{1}{x(\Delta x+x)}.$$

于是,$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[-\dfrac{1}{x(\Delta x+x)}\right]=-\dfrac{1}{x^2}$.

(4) $y=\sqrt{x}$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}.$$

于是,$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x>0)$.

(5) $y=\sqrt[3]{x}$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x(x+\Delta x)}+\sqrt[3]{x^2}}.$$

于是,$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x(x+\Delta x)}+\sqrt[3]{x^2}}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $(x\neq 0)$.

(6) $y=\tan x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\tan(x+\Delta x)-\tan x}{\Delta x}=\frac{\dfrac{\tan x+\tan\Delta x}{1-\tan x\tan\Delta x}-\tan x}{\Delta x}=\frac{\tan\Delta x(1+\tan^2 x)}{\Delta x(1-\tan x\tan\Delta x)}=\frac{\tan\Delta x\sec^2 x}{\Delta x(1-\tan x\tan\Delta x)}.$$

于是，$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\tan\Delta x\sec^2 x}{\Delta x(1-\tan x\tan\Delta x)}=\sec^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\left(x\neq(2k-1)\dfrac{\pi}{2};\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$.

(7) $y=\cot x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cot(x+\Delta x)-\cot x}{\Delta x}=\frac{\dfrac{\cot x\cot\Delta x-1}{\cot x+\cot\Delta x}-\cot x}{\Delta x}=\frac{-1-\cot^2 x}{\Delta x(\cot x+\cot\Delta x)}=-\frac{\csc^2 x}{\Delta x(\cot x+\cot\Delta x)}.$$

于是，$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-\csc^2 x}{\Delta x(\cot x+\cot\Delta x)}=-\csc^2 x=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ $(x\neq k\pi;\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

(8) $y=\arcsin x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\arcsin(x+\Delta x)-\arcsin x}{\Delta x}=\frac{\arcsin[(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}\,x]}{\Delta x}$$

$$=\frac{\arcsin[(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x\Delta x)^2}]}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}\cdot\frac{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$=\frac{\arcsin t}{t}\cdot\frac{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$=\frac{\arcsin t}{t}\cdot\frac{2x+\Delta x}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}},$$

式中 $t=(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}$，从而，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}t=0$.

于是，$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2x+\Delta x}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}\cdot\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\arcsin t}{t}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$,

其中$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\arcsin t}{t}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\sin u}=1$.

(9) $y=\arccos x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\arccos(x+\Delta x)-\arccos x}{\Delta x}=\frac{\arcsin[(x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2})-(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}]}{\Delta x}$$

$$=\frac{\arcsin t}{t}\cdot\frac{-(2x+\Delta x)}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}},$$

式中 $t=(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}$，从而，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}t=0$.

于是，$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-(2x+\Delta x)}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}\cdot\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\arcsin t}{t}=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$.

(10) $y=\arctan x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\arctan(x+\Delta x)-\arctan x}{\Delta x}=\frac{\arctan\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\Delta x}=\frac{\arctan\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}\cdot\frac{1}{1+x(x+\Delta x)}.$$

于是，
$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\arctan\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}\cdot\frac{1}{1+x(x+\Delta x)}\right]=\frac{1}{1+x^2},$$

其中利用$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\arctan t}{t}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\tan u}=1$.

**【829】** 设 $f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$，求 $f'(1)$，$f'(2)$和 $f'(3)$.

**解** $f'(x)=(x-2)^2(x-3)^3+2(x-1)(x-2)(x-3)^3+3(x-1)(x-2)^2(x-3)^2$

$\quad=2(x-2)(x-3)^2(3x^2-11x+9)$.

于是，$f'(1)=-8$；$f'(2)=f'(3)=0$.

**【830】** 设 $f(x)=x^2\sin(x-2)$，求 $f'(2)$.

**解** $f'(x)=2x\sin(x-2)+x^2\cos(x-2)$. 于是，$f'(2)=4$.

【831】 设 $f(x)=x+(x-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$，求 $f'(1)$.

**提示** 从导数定义出发，易得 $f'(1)=1+\dfrac{\pi}{4}$.

**解** 解法 1：若用复合函数求导法，可得

$$f'(x)=1+\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}+\frac{x-1}{2(x+1)\sqrt{x}}.$$

于是，$f'(1)=1+\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{2}}=1+\dfrac{\pi}{4}$.

解法 2：若按定义作，注意到当 $x=1$ 时，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=1+\arcsin\sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}},$$

即得

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\arcsin\sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}}\right)=1+\frac{\pi}{4}.$$

【832】 设函数 $f(x)$ 在 $a$ 点可微，求 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

**解** 设 $\Delta x=x-a$，则当 $x\to a$ 时，$\Delta x\to 0$. 于是，得

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{\Delta x\to a}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=f'(a).$$

【833】 证明：若函数 $f(x)$ 可微及 $n$ 为正整数，则

$$\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=f'(x). \tag{1}$$

反之，若对于函数 $f(x)$ 有极限(1)存在，则可否断定此函数有导数？研究狄利克雷函数的例子(参阅第一章 734 题).

**提示** 由导数定义易证(1)式成立. 然其逆不成立，可研究 734 题所示的狄利克雷函数 $\chi(x)$：

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

**证** $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-f(x)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left[f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-f(x)\right]}{\dfrac{1}{n}}=f'(x)$.

反之，就不一定对了. 例如，对于狄利克雷函数

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

在任一有理点是不连续的，当然其导数也不存在. 但由于 $x+\dfrac{1}{n}$ 仍为有理数，故当 $x$ 为有理数时，

$$\chi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\chi(x)=1-1=0,$$

从而，极限(1) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\chi\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-\chi(x)\right]=0$ 存在.

**利用导数表，求下列函数的导数：**

【834】 $y=2+x-x^2$.

问 $y'(0)$；$y'\left(\dfrac{1}{2}\right)$；$y'(1)$；$y'(-10)$ 等于什么？

**解** 由于 $y'(x)=1-2x$，故得

$y'(0)=1$； $y'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$； $y'(1)=-1$； $y'(-10)=21$.

【835】 $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x$. 当 $x$ 为何值时：

(1) $y'(x)=0$； (2) $y'(x)=-2$； (3) $y'(x)=10$?

**提示** 先求出 $y'(x)=x^2+x-2$，再利用所给条件解方程，即得所要求的 $x$ 值.

**解** $y'(x)=x^2+x-2$.

(1)令 $y'(x)=0$，得 $x^2+x-2=0$. 于是，$x=-2$ 或 $x=1$；

(2)令 $y'(x)=-2$，得 $x^2+x=0$. 于是，$x=-1$ 或 $x=0$；

(3)令 $y'(x)=10$，得 $x^2+x-12=0$. 于是，$x=-4$ 或 $x=3$.

【836】 $y=a^5+5a^3x^2-x^5$.

**解** $y'=10a^3x-5x^4$.

【837】 $y=\frac{ax+b}{a+b}$.

**解** $y'=\frac{a}{a+b}$.

【838】 $y=(x-a)(x-b)$.

**解** $y'=x-a+x-b=2x-a-b$.

【839】 $y=(x+1)(x+2)^2(x+3)^3$.

**解** 
$$\begin{aligned}y'&=(x+2)^2(x+3)^3+2(x+1)(x+2)(x+3)^3+3(x+1)(x+2)^2(x+3)^2\\&=(x+2)(x+3)^2[(x+2)(x+3)+2(x+1)(x+3)+3(x+1)(x+2)]\\&=2(x+2)(x+3)^2(3x^2+11x+9).\end{aligned}$$

【840】 $y=(x\sin\alpha+\cos\alpha)(x\cos\alpha-\sin\alpha)$.

**解** $y'=\sin\alpha(x\cos\alpha-\sin\alpha)+\cos\alpha(x\sin\alpha+\cos\alpha)=x\sin2\alpha+\cos2\alpha$.

【841】 $y=(1+nx^m)(1+mx^n)$.

**解** $y'=mnx^{m-1}(1+mx^n)+mnx^{n-1}(1+nx^m)=mn[x^{m-1}+x^{n-1}+(m+n)x^{m+n-1}]$.

【842】 $y=(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3$.

**解** 
$$\begin{aligned}y'&=-(1-x^2)^2(1-x^3)^3-4x(1-x)(1-x^2)(1-x^3)^3-9x^2(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^2\\&=-(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)^2(1+6x+15x^2+14x^3)\\&=-(1-x)^5(1+x)(1+2x)(1+4x+7x^2)(1+x+x^2)^2.\end{aligned}$$

【843】 $y=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}$.

**解** $y'=-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\frac{9}{x^4}\right)$ $(x\neq0)$.

【844】 证明：公式 $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'=\frac{\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$.

**提示** 利用商的求导法则及行列式的定义.

**证** $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'=\frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}=\frac{\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$. 这里已暗设 $cx+d\neq0$.

## 求下列函数的导数：

【845】 $y=\frac{2x}{1-x^2}$.

**解** $y'=\frac{2(1-x^2)+4x^2}{(1-x^2)^2}=\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$ $(|x|\neq1)$.

【846】 $y=\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

**解** 由于 $y=\frac{2}{1-x+x^2}-1$，故 $y'=\frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$.

**【847】** $y=\frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$.

**解** $y'=\frac{(1-x)^2(1+x)^3-x[3(1+x)^2(1-x)^2-2(1-x)(1+x)^3]}{(1-x)^4(1+x)^6}=\frac{1-x+4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4}\quad(|x|\neq1)$.

**【848】** $y=\frac{(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^2}$.

**解** $y'=\frac{(1-x)^2[-2x(3-x^3)-3x^2(2-x^2)]+2(1-x)(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^4}$

$=\frac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3}\quad(x\neq1)$.

**【849】** $y=\frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$.

**解** $y'=\frac{-p(1-x)^{p-1}(1+x)^q-q(1+x)^{q-1}(1-x)^p}{(1+x)^{2q}}=-\frac{(1-x)^{p-1}[(p+q)+(p-q)x]}{(1+x)^{q+1}}\quad(x\neq-1)$.

**【850】** $y=\frac{x^p(1-x)^q}{1+x}$.

**解** $y'=\frac{[px^{p-1}(1-x)^q-qx^p(1-x)^{q-1}](1+x)-x^p(1-x)^q}{(1+x)^2}$

$=\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1+x)^2}[p-(q+1)x-(p+q-1)x^2]\quad(x\neq-1)$.

**【851】** $y=x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$.

**解** $y'=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\quad(x>0)$.

**【852】** $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

**解** $y'=-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2x\sqrt{x}}+\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}\right)\quad(x>0)$.

**【853】** $y=\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}$.

**解** $y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\quad(x>0)$.

**【854】** $y=x\sqrt{1+x^2}$.

**解** $y'=\sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$.

**【855】** $y=(1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}$.

**解** $y'=\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}+(1+x)\left[\frac{x\sqrt[3]{3+x^3}}{\sqrt{2+x^2}}+\frac{x^2\sqrt{2+x^2}}{\sqrt[3]{(3+x^3)^2}}\right]=\frac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{(3+x^3)^2}}$

$(x\neq\sqrt[3]{-3})$.

**【856】** $y=\sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$.

**解** $y'=\frac{-m(1-x)^{m-1}(1+x)^n+n(1+x)^{n-1}(1-x)^m}{(m+n)\sqrt[m+n]{[(1-x)^m(1+x)^n]^{m+n-1}}}=\frac{(n-m)-(n+m)x}{(m+n)\sqrt[m+n]{(1-x)^n(1+x)^m}}\quad(|x|\neq1)$.

**【857】** $y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

**解** $y'=\frac{\sqrt{a^2-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2}=\frac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\quad(|x|<|a|)$.

【858】 $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$.

解 $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{\left(\dfrac{1+x^3}{1-x^3}\right)^2}}\cdot\dfrac{3x^2(1-x^3)+3x^2(1+x^3)}{(1-x^3)^2}=\dfrac{2x^2}{1-x^6}\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}\quad(|x|\neq 1)$.

【859】 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}$.

解 $y'=-\dfrac{1}{(1+x^2)(x+\sqrt{1+x^2})^2}\left[\sqrt{1+x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}+2x\right]=-\dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

【860】 $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

解 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]=\dfrac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\quad(x>0)$.

【861】 $y=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$.

解 $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}})^2}}\cdot\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}\cdot\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=\dfrac{1}{27\sqrt[3]{x^2(1+\sqrt[3]{x})^2}\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}})^2}}$

$(x\neq 0,\ x\neq -1,\ x\neq -8)$.

【862】 $y=\cos 2x-2\sin x$.

解 $y'=-2\sin 2x-2\cos x=-2\cos x(1+2\sin x)$.

【863】 $y=(2-x^2)\cos x+2x\sin x$.

解 $y'=-2x\cos x-(2-x^2)\sin x+2\sin x+2x\cos x=x^2\sin x$.

【864】 $y=\sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$.

解 $y'=-2\sin x\cos x\cos(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)-2\sin x\cos x\sin(\cos^2 x)\sin(\sin^2 x)$

$=-\sin 2x[\cos(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)+\sin(\cos^2 x)\sin(\sin^2 x)]$

$=-\sin 2x\cos(\cos^2 x-\sin^2 x)$

$=-\sin 2x\cos(\cos 2x)$.

【865】 $y=\sin^n x\cos nx$.

解 $y'=n\sin^{n-1}x\cos x\cos nx-n\sin^n x\sin nx=n\sin^{n-1}x(\cos x\cos nx-\sin x\sin nx)=n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x$.

【866】 $y=\sin[\sin(\sin x)]$.

解 $y'=\cos x\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos[\sin(\sin x)]$.

【867】 $y=\dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$.

解 $y'=\dfrac{2\sin x(\cos x\sin x^2-x\sin x\cos x^2)}{\sin^2 x^2}\quad(x^2\neq k\pi;\ k=1,2,\cdots)$.

【868】 $y=\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$.

解 $y'=\dfrac{-2\sin^3 x-4\sin x\cos^2 x}{4\sin^4 x}=-\dfrac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}\quad(x\neq k\pi;\ k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

【869】 $y=\dfrac{1}{\cos^n x}$.

解 $y'=-\dfrac{1}{\cos^{2n}x}(-n\cos^{n-1}x\sin x)=\dfrac{n\sin x}{\cos^{n+1}x}\quad(x\neq\dfrac{2k-1}{2}\pi$；$k$ 为整数$)$.

【870】 $y=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$.

解 $y'=\dfrac{1}{(\cos x+x\sin x)^2}[(x\sin x-\cos x+\cos x)(\cos x+x\sin x)-(\sin x-\sin x+x\cos x)(\sin x-x\cos x)]$

$$=\frac{x^2}{(\cos x+x\sin x)^2}.$$

【871】 $y=\tan\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}$.

解 $y'=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\csc^2\frac{x}{2}=\frac{2}{\sin^2 x}\quad(x\neq k\pi;\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

【872】 $y=\tan x-\frac{1}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x$.

解 $y'=\sec^2 x-\tan^2 x\sec^2 x+\tan^4 x\sec^2 x=1+\tan^6 x\quad\left(x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$.

【873】 $y=4\sqrt[3]{\cot^2 x}+\sqrt[3]{\cot^8 x}$.

解 $y'=\frac{8}{3}(\cot x)^{-\frac{1}{3}}(-\csc^2 x)+\frac{8}{3}(\cot x)^{\frac{5}{3}}(-\csc^2 x)=-\frac{8}{3\sin^4 x\sqrt[3]{\cot x}}$

$\left(x\neq k\pi;\ x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$.

【874】 $y=\sec^2\frac{x}{a}+\csc^2\frac{x}{a}$.

解 $y'=\frac{2}{a}\sec^2\frac{x}{a}\tan\frac{x}{a}-\frac{2}{a}\csc^2\frac{x}{a}\cot\frac{x}{a}=\frac{2}{a}\left(\frac{\sin\frac{x}{a}}{\cos^3\frac{x}{a}}-\frac{\cos\frac{x}{a}}{\sin^3\frac{x}{a}}\right)=\frac{2}{a}\cdot\frac{\sin^4\frac{x}{a}-\cos^4\frac{x}{a}}{\sin^3\frac{x}{a}\cos^3\frac{x}{a}}$

$$=\frac{16\left(\sin^2\frac{x}{a}-\cos^2\frac{x}{a}\right)}{a\left(2\sin\frac{x}{a}\cos\frac{x}{a}\right)^3}=\frac{-16\cos\frac{2x}{a}}{a\sin^3\frac{2x}{a}}\quad\left(x\neq\frac{k\pi a}{2};\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right).$$

【875】 $y=\sin[\cos^2(\tan^3 x)]$.

解 $y'=\cos[\cos^2(\tan^3 x)][-2\cos(\tan^3 x)\sin(\tan^3 x)][3\tan^2 x\sec^2 x]$

$$=-3\tan^2 x\sec^2 x\cdot\sin(2\tan^3 x)\cdot\cos[\cos^2(\tan^3 x)]\quad\left(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2};\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right).$$

【876】 $y=e^{-x^2}$.

解 $y'=-2xe^{-x^2}$.

【877】 $y=2^{\tan\frac{1}{x}}$.

解 $y'=-\frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1}{x}\cdot 2^{\tan\frac{1}{x}}\ln 2\quad(x\neq0)$.

【878】 $y=e^x(x^2-2x+2)$.

解 $y'=e^x(x^2-2x+2)+e^x(2x-2)=x^2e^x$.

【879】 $y=\left[\frac{1-x^2}{2}\sin x-\frac{(1+x)^2}{2}\cos x\right]e^{-x}$.

解 $y'=-e^{-x}\left[\frac{1-x^2}{2}\sin x-\frac{(1+x)^2}{2}\cos x\right]+e^{-x}\left[\frac{1-x^2}{2}\cos x-x\sin x+\frac{(1+x)^2}{2}\sin x-(1+x)\cos x\right]$

$$=x^2e^{-x}\sin x.$$

【880】 $y=e^x\left(1+\cot\frac{x}{2}\right)$.

解 $y'=e^x\left(1+\cot\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}e^x\csc^2\frac{x}{2}=\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}$ （$x\neq2k\pi$；$k$ 为整数）.

【881】 $y=\frac{\ln3\cdot\sin x+\cos x}{3^x}$.

解 $y'=\frac{3^x(\ln3\cdot\cos x-\sin x)-3^x\ln3(\ln3\cdot\sin x+\cos x)}{3^{2x}}=-\frac{(1+\ln^2 3)\sin x}{3^x}$.

【882】 $y=e^{ax}\dfrac{a\sin bx-b\cos bx}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

解 $y'=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}e^{ax}[a(a\sin bx-b\cos bx)+(ab\cos bx+b^2\sin bx)]=\sqrt{a^2+b^2}\,e^{ax}\sin bx$.

【883】 $y=e^x+e^{e^x}+e^{e^{e^x}}$.

解 $y'=e^x[1+e^{e^x}(1+e^{e^{e^x}})]$.

【884】 $y=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\left(\dfrac{x}{a}\right)^b\quad(a>0,b>0)$.

提示 两边取对数后,同时对 $x$ 求导数.

解 两边取对数,得

$$\ln y=x\ln\frac{a}{b}+a(\ln b-\ln x)+b(\ln x-\ln a).$$

两边同时对 $x$ 求导数,得

$$\frac{y'}{y}=\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{x}+\frac{b}{x}.$$

于是, $y'=y\left(\ln\dfrac{a}{b}-\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x}\right)=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\left(\dfrac{x}{a}\right)^b\left(\ln\dfrac{a}{b}-\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x}\right)\quad(x>0)$.

【885】 $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}\quad(a>0)$.

解 $y'=a^ax^{a^a-1}+ax^{a-1}a^{x^a}\ln a+a^x\cdot a^{a^x}\ln^2 a$.

【886】 $y=\lg^3x^2$.

解 $y'=3\lg^2x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}2x\lg e=\dfrac{6}{x}\lg e\cdot\lg^2x^2\quad(x\neq0)$.

或按 $y=(\lg e\cdot\ln x^2)^3=8\lg^3e\cdot\ln^3|x|$ 求导数,有 $y'=24\lg^3e\cdot\left(\dfrac{1}{x}\ln^2|x|\right)^{*)}\quad(x\neq0)$.

*) $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{|x|}\cdot\dfrac{|x|}{x}=\dfrac{1}{x}$,以后不再说明.

【887】 $y=\ln[\ln(\ln x)]$.

解 $y'=\dfrac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}\quad(x>e)$.

【888】 $y=\ln[\ln^2(\ln^3x)]$.

解 $y'=\dfrac{1}{\ln^2(\ln^3x)}\cdot2\ln(\ln^3x)\dfrac{1}{\ln^3x}\cdot3\ln^2x\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{6}{x\ln x\ln(\ln^3x)}\quad(x>e)$.

【889】 $y=\dfrac{1}{2}\ln(1+x)-\dfrac{1}{4}\ln(1+x^2)-\dfrac{1}{2(1+x)}$.

解 $y'=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{x}{2(1+x^2)}+\dfrac{1}{2(1+x)^2}=\dfrac{1}{(1+x)^2(1+x^2)}\quad(x>-1)$.

【890】 $y=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

解 $y'=\dfrac{1}{4}[\ln(x^2-1)-\ln(x^2+1)]'=\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{2x}{x^2+1}\right]=\dfrac{x}{x^4-1}\quad(|x|>1)$.

【891】 $y=\dfrac{1}{4(1+x^4)}+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^4}{1+x^4}$.

解 $y=\dfrac{1}{4(1+x^4)}+\ln|x|-\dfrac{1}{4}\ln(1+x^4)$,

$y'=-\dfrac{4x^3}{4(1+x^4)^2}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{1+x^4}\cdot4x^3=\dfrac{1}{x(1+x^4)^2}\quad(x\neq0)$.

【892】 $y=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}\ln\dfrac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.