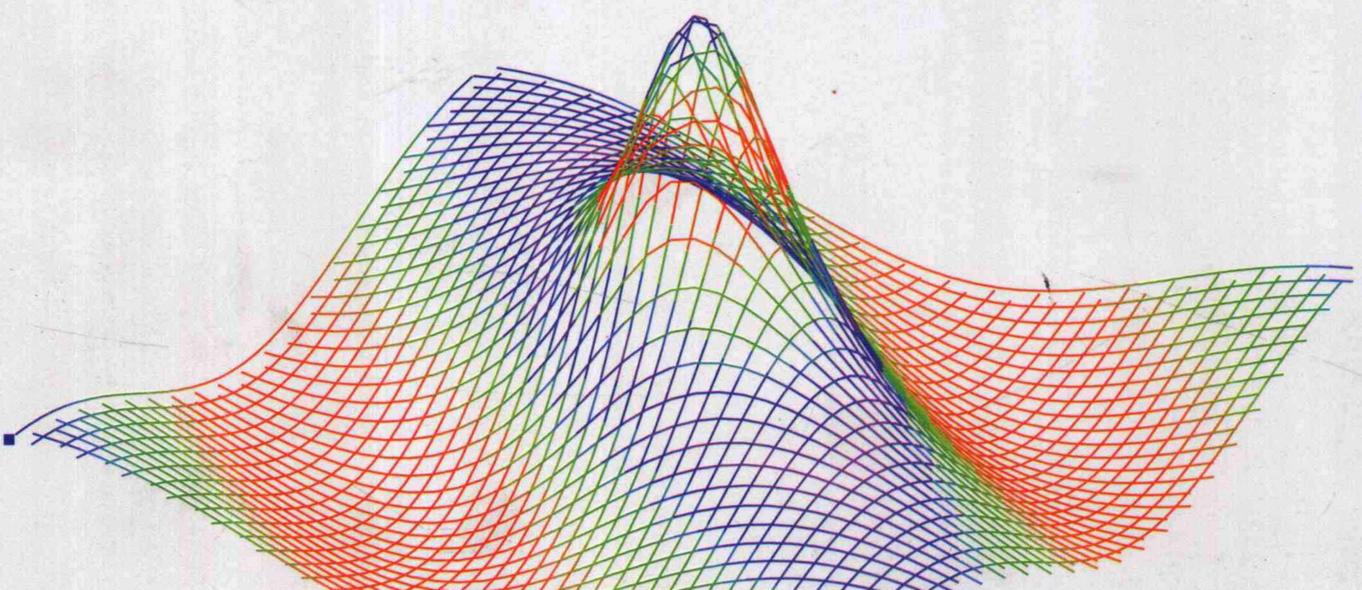
生精品丛书

云南大学研究生教学用书

非线性演化方程

林国广　编著



云南大学出版社

研究生精品丛书
云南大学研究生教学用书

本教材由云南大学研究生教材建设基金资助

非线性演化方程

林国广　编著

常州大学图书馆
藏书章

云南大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

非线性演化方程 / 林国广编著. -- 昆明 ： 云南大学出版社，2011
(研究生精品丛书)
ISBN 978-7-5482-0521-0

Ⅰ. ①非… Ⅱ. ①林… Ⅲ. ①非线性方程-研究生-教材 Ⅳ. ①0175

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 138748 号

非线性演化方程

林国广　编著

策划编辑： 张丽华
责任编辑： 张丽华
装帧设计： 丁群亚
出版发行： 云南大学出版社
印　　装： 云南大学出版社印刷厂
开　　本： 880mm×1230mm　1/16
印　　张： 23.5
字　　数： 800 千
版　　次： 2011 年 9 月第 1 版
印　　次： 2011 年 9 月第 1 次印刷
书　　号： ISBN 978-7-5482-0521-0
定　　价： 68.00 元

地　　址： 云南省昆明市翠湖北路 2 号云南大学英华园内（邮编：650091）
发行电话： 0871-5033244
网　　址： http://www.ynup.com　E-mail:market@ynup.com

前言

本书系统地介绍了非线性演化方程解的适定性，以及非线性耗散系统的长时间性态或全局稳定性,包括整体解存在唯一性、有界吸收集、吸引子、惯性流形;非线性守恒系统解轨道的稳定性与不稳定性。着重于数学基础和数学方法的研究.

在20世纪70年代,人们对自然界认识的深度和精度达到空前高涨,非线性科学的研究就成为自然科学研究的主流。而非线性演化方程是用数学式子来反映和描述某些自然现象运动变化规律的科学分支,它也是非线性科学研究的重要组成部分.在本书中，我们广泛讨论了许多物理、化学及流体动力学中典型的非线性偏微分方程，包括流体中的 Navier-Stokes 方程;量子力学中的 Schrödinger 方程;水波的 Kdv 方程;Zakharov 方程; Swift-Hohenberg 方程; Kuramoto-Sivashinsky 方程; Kadomotsev-Petviashvili 方程;K-PP 方程等.

第一章主要为各章做准备,引入非线性演化方程解的基本空间:Banach 空间、Hilbert 空间及 Sobolev 空间.引入解的先验估计时所用到的一些不等式;在考虑到解的存在性时,我们主要在第二章介绍 Galerkin 有限元方法.由于线性算子半群理论既可用来证明解的存在性又在第三章中用到,故将线性算子半群理论在第一章中作为基本知识介绍.最后引入非线性演化方程及其解的性态等.

第二章系统介绍研究非线性演化方程初边值问题的最直接的数学方法—紧致法.其中包括 Schrödinger 方程;Navier-Stokes 方程;耦合的非线性波动方程等的适定性,以及一些整体解不存在的问题.

第三章关于非线性演化方程的吸引子，首先系统介绍耗散非线性演化方程的吸引子一般理论,其次以具体方程:广义 Kuramoto-Sivashinsky 方程、弱阻尼广义 Kdv 方程、分数次非线性 Schrödinger 方程、非线性波动方程等等为例,介绍吸引子的存在性证明的数学方法.

第四章非线性演化方程的惯性流形.首先阐述非线性演化方程的惯性流形存在性的基本理论。然后以具体非线性演化方程为例,考虑高维空间,非自伴算子,局部耗散以及带有时滞项等情形来论证惯性流形的存在性,学习为此提供的数学思想和方法.

第五章非线性演化方程孤立波的存在性和稳定性,分别介绍轨道稳定性和具体方程的孤立波稳定与不稳定性,振动不稳定,渐近稳定性研究的数学方法.

由于非线性演化方程自身包含十分丰富的内容和物理意义;研究的数学方法又涉及泛函分析、拓扑空间、几何测度论等较为深刻的数学知识和理论;研究的新方法和新成果层出不穷.限于作者的水平和能力,本书难免存在不妥之处,甚至出现错误之处,敬请读者给予批评和指正.

于此，作者衷心感谢恩师郭柏灵院士的培养和关怀. 同时感谢：王磊、党金宝、冷承语、李素梅、吴景珠、赵鹏、秦晨辉、黄家祥、茶丽芳、李焕、廖玉怀、张远平、张纪科、李光旭、李昌涛、李敏、乔丽华、徐瑰瑰、赵洪波、齐文惠、刘华、孙光辉、戴西来、唐全华、朱辉、陆清汝、秦闯亮、王有德等研究生的学习和探讨.衷心感谢云南大学研究生部为本书出版的资助;衷心感谢云南大学出版社为本书出版所做的辛勤劳动.

最后特别感谢吴景珠、茶丽芳、徐瑰瑰、齐文惠及秦闯亮为本书所做的帮助和支持.

林国广
2010年10月于昆明

目 录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　泛函空间

本章是为以后各章做准备的,它是后面各章必备的基础知识,其内容可参考参考文献[1-10]的内容，因此有些内容只写出结论,不予证明.对于结论重要、证明思想方法美妙的命题,给予证明.

§1　Banach 空间与 Hilbert 空间

定义 1.1.1 设V是一个线性空间，如果$V \to R$的映射$x \to \|x\|$满足

（1）$\|x\| \ge 0(\forall x \in V)$，$\|x\| = 0$当且仅当$x = 0$；

（2）$\|ax\| = |a|\|x\|(\forall a \in R, x \in V)$；

（3）$\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|(\forall x, y \in V)$（三角不等式），

则称$\|x\|$是V中元素x的范数(模).对线性空间V赋予范数后,称V为线性赋范空间.

定义 1.1.2 设V是一个线性赋范空间,$\forall x_n \in V$,$n = 1,2,3,\cdots$.如果$m,n \to \infty$时,$\|x_m - x_n\| \to 0$,则称序列$\{x_n\}$为V中的 Cauchy 序列.如果$x \in V$,且当$n \to \infty$时,$\|x_n - x\| \to 0$,则称序列$\{x_n\}$在V中收敛于x.如果V中每一个 Cauchy 序列均收敛于V中的一个元素,则称V是完备的.完备的线性赋范空间又称为 Banach 空间.

例 1.1.1 设$\Omega \subset R^n$有界区域，$L^p(\Omega)$表示由所有在Ω上可测并关于Ω为$p \ge 1$次可积的函数组成的空间，关于范数

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

成为一个 Banach 空间.

例 1.1.2 $L^p(a,b;X)$表示从(a,b)到 Banach 空间X的L^p函数空间,在范数

$$\|f\|_{L^p(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|f(t)\|_X^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

下它是一个 Banach 空间.

定义 1.1.3 设E是 Banach 空间,A是E的一个子集.

(1) 如果存在常数$C > 0$，使得$\|x\| \le C\ (\forall u \in A)$，则称$A$为$E$中的有界集.

(2) 如果A中的每一个 Cauchy 序列的极限元素都属于A，则称A为E中的闭集.

(3) 如果$S \subset A$,且对每一个元素$u \in A$,都存在$\{u_n\} \subset S$,使得当$n \to \infty$时,在E中有$u_n \to u$,则称S为A的稠密子集或S在A中稠密.

(4) 如果A的每一个无穷子集都有收敛的子序列，则称A是E中的列紧集或准紧集.如果E中的列紧集A又是闭集（A的每一个无穷子集的每一个收敛子序列的极限都属于A）则称A是E中的紧集.

Banach 空间中的列紧集都是有界集.在有限维 Banach 空间中,有界集都是列紧集,有界闭集都是紧集.

例 1.1.3 无限维 Banach 空间中有界集不一定是列紧集.

令$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx$,有$\|u_n\|_{L^2([-\pi,\pi])}^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx dx = 1$.因而序列$\{u_n\}$是$L^2([-\pi,\pi])$中的有界集.但对$m \ne n$时，

$$\|u_m - u_n\| = \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin mx - \sin nx)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

这表明$\{u_n(x)\}$在$L^2([-\pi,\pi])$中没有收敛的子列.从而证明了$\{u_n(x)\}$在$L^2([-\pi,\pi])$中是有界集而不是列紧集.

对于$\Omega \subset R^n$有界区域，著名的 Arzela-Ascoli 定理给出了$C(\overline{\Omega})$中的集合具有列紧性的条件.

定理 1.1.1(Arzela-Ascoli) 如果$C(\overline{\Omega})$中的集合S满足条件:

（1）S 是一致有界的，即存在常数 $K>0$，使得

$$\left|u(x)\right|\le K\left(\forall x\in\bar{\Omega},u\in S\right),\ \|u\|_{C(\bar{\Omega})}=\max_{x\in\bar{\Omega}}\left|u(x)\right|\le K\quad(\forall u\in S);$$

（2）S 是等度连续的，即对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得对任意 $x,y\in\bar{\Omega}$，且 $|x-y|<\delta$，则

$$\left|u(x)-u(y)\right|<\varepsilon\quad(\forall u\in S)$$

那么，S 是 $C(\bar{\Omega})$ 中的列紧集.

证明 设 $\left\{u_K(x)\right\}$ 为 S 的任一子序列，由条件（1），对常数 $K>0$ 有

$$\left|u_K(x)\right|\le K\quad\left(x\in\bar{\Omega},K=1,2,\cdots\right);\tag{1.1.1}$$

以 $A=\left\{r_j\right\}$ 表示 $\bar{\Omega}$ 中所有有理点(坐标为有理数的点)的集合，它是可数的.于是序列 $\left\{u_K(x)\right\}$ 有在所有有理点 $r_j\ (j=1,2,\cdots)$ 上均收敛的子序列 $\left\{u^{(K)}(x)\right\}$.由条件(2)，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ 使得所有 $K=1,2,\cdots$ 有

$$\left|u^{(K)}(x)-u^{(K)}(y)\right|<\varepsilon\quad\left(\forall x,y\in\bar{\Omega},|x-y|<\delta\right).\tag{1.1.2}$$

因为有理点集 $A=\left\{r_j\right\}$ 在 $\bar{\Omega}$ 中稠密，所以开球集 $\left\{B_\delta(r_j)\middle|r_j\in A\right\}$ 覆盖 $\bar{\Omega}$，而 $\bar{\Omega}$ 为有界闭集，故 $\bar{\Omega}$ 为开球集 $\left\{B_\delta(r_j)\middle|r_j\in A\right\}$ 中有限个开球 $B=\left\{B_\delta(r_1),\cdots,B_\delta(r_m)\right\}$ 所覆盖.又 $u^{(K)}(x)$ 在 $x=r_j\ (j=1,2,\cdots,m)$ 处收敛，于是存在正整数 N，使得对 $j=1,2,\cdots,m$ 均有

$$\left|u^{(K)}(r_j)-u^{(L)}(r_j)\right|<\varepsilon\quad(\text{当}K,L>N).\tag{1.1.3}$$

对任意 $x\in\bar{\Omega}$，由于 B 覆盖 $\bar{\Omega}$，存在 $r_j\in A$ 使得

$$\left|x-r_j\right|<\delta.\tag{1.1.4}$$

对 $K,L>N$ 时，综合(1.1.2),(1.1.3),（1.1.4）式有

$$\left|u^{(K)}(x)-u^{(L)}(x)\right|\le\left|u^{(K)}(x)-u^{(K)}(r_j)\right|+\left|u^{(K)}(r_j)-u^{(L)}(r_j)\right|+\left|u^{(L)}(r_j)-u^{(L)}(x)\right|<3\varepsilon.$$

因为 $\left\{u^{(K)}(x)\right\}$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一致收敛，即序列 $\left\{u_K(x)\right\}$ 有子列 $\left\{u^{(K)}(x)\right\}$ 在 $C(\bar{\Omega})$ 中收敛. 证毕.

类似地，下面讨论与 $L^p(\Omega)$ 中列紧性相关问题.

定义 1.1.4 设 A 与 B 都是度量空间 X 的子集，$\varepsilon>0$.如果对任一点 $x\in A$ 都可以找到一点 $y\in B$，使得 $\rho(x,y)<\varepsilon$，则称 B 是 A 的 ε 网.

定理 1.1.2（Hausdorff） 设 X 是完备的度量空间，A 是 X 的子集.A 是 X 的列紧集的充要条件是：对任意 $\varepsilon>0$ 都有 A 的有限 ε 网存在.

证明 充分性.设对任意 $\varepsilon>0$ 都有 A 的有限 ε 网存在.从而对每一个 $\varepsilon_n=\dfrac{1}{n}$，存在 A 的有限 ε_n 网

$$M_n=\left\{x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots,x_{K_n}^{(n)}\right\}$$

使得

$$A\subset\bigcup_{i=1}^{K_n}B_{\frac{1}{n}}\left(x_i^{(n)}\right),n=1,2,\cdots.$$

设 T 是 A 的一个无穷子集，则由 $T\subset A\subset\bigcup_{i=1}^{K_1}B_1\left(x_i^{(1)}\right)$，在 $B_1\left(x_1^{(1)}\right),\cdots,B_1\left(x_{K_1}^{(1)}\right)$ 中至少有一个球含有 T 的无穷子集.设 T 的无穷子集 $T_1\subset B_1(x_1)$，且 $x_1\in\left\{x_1^{(1)},\cdots,x_{K_1}^{(1)}\right\}$.由于，

$$T_1\subset T\subset A\subset\bigcap_{i=1}^{K_2}B_{\frac{1}{2}}\left(x_i^{(2)}\right),$$

同理，存在无穷子集 $T_2\subset T_1$ 使得

$$T_2 \subset B_{\frac{1}{2}}(x_2), x_2 \in \left\{x_1^{(2)}, \cdots, x_{K_2}^{(2)}\right\}.$$

依此类推,得到T的无穷多个无穷子集

$$T \supset T_1 \supset T_2 \supset \cdots \supset T_n \supset T_{n+1} \supset \cdots,$$

且存在$x_n \in \left\{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_{K_n}^{(n)}\right\}$使得

$$T_n \subset B_{\frac{1}{n}}(x_n), n = 1, 2, 3, \cdots,$$

因而T_n中任意两点的距离小于$\frac{2}{n}$.依次取

$$t_1 \in T_1, t_2 \in T_2 \setminus \{t_1\}, t_3 \in T_3 \setminus \{t_1, t_2\}, \cdots, t_n \in T_n \setminus \{t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}\}, \cdots$$

得到序列$\{t_n\} \subset T$.对任意正整数K及n有

$$t_n \in T_n, t_{n+K} \in T_{n+K} \subset T_n.$$

由此得出

$$\rho(t_n, t_{n+K}) < \frac{2}{n} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

即$\{t_n\}$是X中的 Cauchy 序列.因为X是完备的度量空间,于是$\{t_n\}$在X中收敛.从而证明了A的任意无穷子集T都有收敛的子列$\{t_n\}$,所以A是X的列紧集.

必要性.用反证法.假设对某个$\varepsilon_0 > 0$使得A没有ε_0网.任取$x_1 \in A$，必存在$x_2 \in A$使得$\rho(x_1, x_2) \ge \varepsilon_0$(否则$\{x_1\}$就是$A$的$\varepsilon_0$网).同理,又必存在$x_3 \in A$使得$\rho(x_i, x_3) \ge \varepsilon_0$，$i = 1, 2$(否则$\{x_1, x_2\}$就是$A$的有限$\varepsilon_0$网).这样继续下去,对所有正整数$n = 2, 3, \cdots$，必存在$x_n \in A$使得$\rho(x_m, x_n) \ge \varepsilon_0$($\forall m < n$).显然$A$的子列$\{x_n\}$没有收敛的子序列.因此,$A$不是$X$的列紧集. 证毕.

推论 1.1.1 设A是完备度量空间X的子集.若对任意$\varepsilon > 0$都有A的列紧ε网存在,则A是X的列紧集.

证明 对任意$\varepsilon > 0$,设M是A的一个列紧$\frac{\varepsilon}{2}$网，由定理 1.1.2 知M有有限$\frac{\varepsilon}{2}$网M_0存在.下面需证M_0是A的有限ε网.对任一点$x \in A$,必有$y \in M$且使得

$$\rho(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

对于$y \in M$，又有$z \in M$,使得

$$\rho(y, z) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因而对任一点$x \in A$，在M_0中存在点z使得

$$\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z) < \varepsilon,$$

即M_0是A的有限ε网. 证毕.

定理 1.1.3（Колмогоров）设$\Omega \subset R^n$有界区域,$1 \le P < \infty$.如果$S \subset L^P(\Omega)$满足条件:

(1) S有界,即存在常数$K > 0$使得

$$\|u\|_{L^P(\Omega)} \le K \quad (\forall u \in S); \tag{1.1.5}$$

(2) S中的函数u的平均函数一致收敛于u,即对任意正数$\varepsilon > 0$,存在$h_0 = h_0(\varepsilon) > 0$,$h_0$与$u$无关,使得

$$\|u_h - u\|_{L^P(\Omega)} < \varepsilon \quad (u \in S, 0 < h < h_0), \tag{1.1.6}$$

其中$u_h(x) = \int_{R^n} \rho_h(x - y) u(y) dy$为函数$u$的平均函数,且在$\Omega$外视$u = 0$.那么,$S$是$L^P(\Omega)$中的列紧集.

证明 给定 $h>0$，函数 u 的平均函数为

$$u_h(x)=\int_{R^n}\rho_h(x-y)u(y)dy, \tag{1.1.7}$$

令

$$S_h=\{u_h|u\in S\}\subset C(\overline{\Omega}). \tag{1.1.8}$$

下面证明 S_h 是 $C(\overline{\Omega})$ 中的列紧集.

由(1.1.5)，(1.1.7)式及软化子 $\rho_h(x)=\begin{cases}Ce^{\frac{1}{|x|^2-h^2}},|x|<h\\ 0,|x|\geq h\end{cases}$ 可得

$$|u_h(x)|\leq\|\rho_h\|_{L^{P'}(\Omega)}\|u\|_{L^P(\Omega)}\leq C_hK\quad(u\in S,x\in\overline{\Omega}),$$

其中 C_h 是只与 h 有关的常数.因此,S_h 是一致有界的.由 $\rho_h\in C_0^\infty(R^n)$ 知 ρ_h 在 R^n 中是一致连续的,对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ 使得

$$|\rho_h(x)-\rho_h(z)|<\frac{\varepsilon}{|\Omega|^{1-\frac{1}{P}}K}\quad(当|x-z|<\delta) \tag{1.1.9}$$

由(1.1.5)，(1.1.7)式及(1.1.9)式可知：当 $|x-z|<\delta$ 时有

$$\begin{aligned}|u_h(x)-u_h(z)|&\leq\int_{R^n}|\rho_h(x-y)-\rho_h(z-y)||u(y)|dy\\&<\int_{R^n}\frac{\varepsilon}{|\Omega|^{1-\frac{1}{P}}K}|u(y)|dy\leq\frac{\varepsilon}{|\Omega|^{1-\frac{1}{P}}K}|\Omega|^{1-\frac{1}{P}}\|u\|_{L^P(\Omega)}<\varepsilon,(\forall u\in S),\end{aligned}$$

即 S_h 是等度连续的.由定理 1.1.1 可知 S_h 在 $C(\overline{\Omega})$ 中是列紧的.因此,由 Ω 是有界区域知 S_h 在 $L^P(\Omega)$ 中也是列紧的.由条件(2),任取 $\varepsilon>0$,存在 $h_0=h_0(\varepsilon)>0$ 使得

$$\|u_h-u\|_{L^P(\Omega)}<\varepsilon\quad(当 u\in S,0<h<h_0),$$

即 S_h 为 S 的列紧 ε 网.由推论 1.1.1 知 S 是列紧的.

定理 1.1.4（F. Riesz） 设 Ω 是 R^n 中的有界区域,$1\leq P<\infty$,$S\subset L^P(\Omega)$ 满足下列条件:

(1) S 是有界的,即存在常数 $K>0$，使得

$$\|u\|_{L^P(\Omega)}\leq K\quad(\forall u\in S);$$

(2) S 是“等度整体连续”的,即对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得对任意 $h\in R^n$,当 $|h|<\delta$ 时,就有

$$\|u(x+h)-u(x)\|_{L^P(\Omega)}=\left(\int_\Omega|u(x+h)-u(x)|^Pdx\right)^{\frac{1}{P}}<\varepsilon\quad(\forall u\in S),$$

其中 $u(x)=0\quad(\forall x\in R^n\setminus\Omega)$.

那么,S 是 $L^P(\Omega)$ 中的列紧集.

证明 只需证明(1.1.8)式定义的 S_h 满足定理 1.1.3 的条件(2).由本定理的条件(2),对任意 $\varepsilon>0$,存在 $h_0=h_0(\varepsilon)>0$ 使得

$$\|u(x+h)-u(x)\|_{L^P(\Omega)}<\varepsilon\quad(当|h|<h_0,u\in S). \tag{1.1.10}$$

由(1.1.7)式,利用 Holder 不等式后,再经变换 $y=z+x$ 得

$$\begin{aligned}|u_h(x)-u(x)|&=\left|\int_{R^n}\rho_h(x-y)[u(y)-u(x)]dy\right|\\&\leq\left(\int_{R^n}\rho_h(x-y)dy\right)^{\frac{1}{P'}}\left(\int_{R^n}\rho_h(x-y)|u(y)-u(x)|^Pdy\right)^{\frac{1}{P}}\end{aligned}$$

$$=\left(\int_{R^n}\rho_h(x-y)\left|u(y)-u(x)\right|^P dy\right)^{\frac{1}{P}}=\left(\int_{R^n}\rho_h(z)\left|u(x+z)-u(x)\right|^P dz\right)^{\frac{1}{P}}.$$

由上式及（1.1.10）式得

$$\begin{aligned}\int_\Omega\left|u_h(x)-u(x)\right|^P dx &\le \int_{R^n}\int_{R^n}\rho_h(z)\left|u(x+z)-u(x)\right|^P dzdx\\ &=\int_{R^n}\rho_h(z)dz\int_{R^n}\left|u(x+z)-u(x)\right|^P dx\\ &<\varepsilon^P\int_{R^n}\rho_h(z)dz=\varepsilon^P\ （当|h|<h_0,u\in S）.\end{aligned}$$

由此推出

$$\left\|u_h-u\right\|_{L^P(\Omega)}<\varepsilon\quad（当|h|<h_0,u\in S）.$$

即定理 1.1.3 的条件(2)成立.故由定理 1.1.3 证明了定理 1.1.4. 证毕.

定义 1.1.5 设 S 是一个非空集合.如果函数 $\rho:S\times S\to R$ 满足条件：

(1) $\rho(x,y)\ge 0$；$\rho(x,y)=0$ 的充要条件是 $x=y$，

(2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$，

(3) $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)$ （三角不等式），

则称 $\rho(x,y)$ 是 x 与 y 的距离.并称 S 为度量空间.

对线性赋范空间 V 中的任意非空子集 S，如果定义 $\rho(x,y)=\|x-y\|$，则 S 成为一个度量空间.

定义 1.1.6 设 S 是一个度量空间,如果 $x\in S$，序列 $\{x_K\}\subset S$ 满足

$$\rho(x_K,x)\to 0\ （当 K\to\infty），$$

则称序列 $\{x_K\}$ 收敛于 x，记为 $x_K\to x\,(K\to\infty)$ 或 $\lim\limits_{K\to\infty}x_K=x$.

据此定义,可以将定义 1.1.2,定义 1.1.3 中空间的完备性、闭集、紧集及稠密等概念照搬到度量空间中来.

定义 1.1.7 如果在度量空间 S 中存在稠密的可数子集,则称 S 是可分的.

例 1.1.4 设 Ω 是 R^n 中的有界区域,空间 $C(\overline{\Omega})$ 和空间 $L^P(\Omega)$，$1\le P<\infty$ 都是可分的.

定理 1.1.5 可分度量空间的子空间也是可分空间.

证明 设度量空间 V 有可数稠密子集 $S=\{x_K\}$，W 是 V 的子空间,取 $\delta_1>\delta_2>\cdots>\delta_n>\cdots>0$，使得 $\delta_j\to 0\,(j\to\infty)$.由于 S 在 V 中稠密及定义

$$dist(x_K,W)=\inf_{z\in W}\|z-x_K\|,\tag{1.1.11}$$

存在 $z_{Kj}\in W$ 使得

$$\|z_{Kj}-x_K\|<dist(x_K,W)+\delta_j.\tag{1.1.12}$$

下证 $z=\{z_{Kj}\}$ 是 W 的稠密子集.设 $x\in W$，对任意 $\varepsilon>0$，由 S 是 V 的稠密子集,存在 $x_K\in S$ 使得

$$\|x_K-x\|<\frac{\varepsilon}{3},\tag{1.1.13}$$

取 j 充分大使得 $\delta_j<\frac{\varepsilon}{3}$.由（1.1.11）、（1.1.12）及（1.1.13）式有

$$\|z_{Kj}-x\|\le\|z_{Kj}-x_K\|+\|x_K-x\|\le dist(x_K,W)+\delta_j+\frac{\varepsilon}{3}<\|x-x_K\|+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon,$$

即证明了可数集 $z=\{z_{Kj}\}$ 是 W 的稠密子集,从而 W 是可分的. 证毕.

定义 1.1.8 设 V 是线性空间，如果对于任意两个元素 x、$y\in V$，都有一个实数 $(x,y)\in R$ 与之对应，且满足

（1）（对称性）$(x,y)=(y,x)$（$\forall x,y\in V$），

(2)（线性性）$(ax+by,z)=a(x,z)+b(y,z)$，$\forall x,y,z\in V;a,b\in R$，

(3)（正定性）当$0\neq x\in V$时有$(x,x)>0$.

则称(x,y)为V的内积.线性空间V赋以内积后称为内积空间.在内积空间V中定义范数为

$$\|x\|=(x,x)^{\frac{1}{2}}\quad(\forall x\in V),$$

从而内积空间一定是线性赋范空间.完备的内积空间又称为Hilbert空间.

例1.1.5 n维欧式空间R^n关于内积

$$(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n,\quad \forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in R^n,$$

它是一个Hilbert空间.

例1.1.6 设Ω是R^n中的一个区域,Ω上平方可积函数类$L^2(\Omega)$关于内积

$$(u,v)=\int_\Omega u(x)v(x)dx\quad(\forall u,v\in L^2(\Omega))$$

成为一个Hilbert空间.

例1.1.7 证明（Schwarz不等式）对于内积空间中的任意两个元素x及y有$|(x,y)|\leq\|x\|\|y\|$,式中当且仅当x与y线性相关时取等号.

证明 当x与y线性相关；不妨设$y=ax,a\in R$，则

$$|(x,y)|=|(x,ax)|=|a|(x,x)=|a|\|x\|^2=\|x\|\|ax\|=\|x\|\|y\|.$$

当x与y线性无关,则对任意$a\in R$,$ax-y\neq 0$,可得内积

$$(ax-y,ax-y)>0,\quad a^2(x,x)-2a(x,y)+(y,y)>0\quad(\forall a\in R).$$

因此,上式左端关于a的二次三项式的判别式必为负值,即

$$(x,y)^2-(x,x)(y,y)<0.$$

由此得出

$$|(x,y)|<\|x\|\|y\|.$$

利用Schwarz不等式,我们可以把欧式空间中两个向量的夹角的概念推广到Hilbert空间中.

定义1.1.9 在Hilbert空间中,两个元素x与y的夹角θ定义为

$$\theta=\arccos\frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|},$$

或

$$\cos\theta=\frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}.$$

如果$(x,y)=0$,则称x与y正交,记为$x\perp y$.

定义1.1.10 设$\{\varphi_n\}$是Hilbert空间H中的序列(有限或无限),且每一个φ_n都不是零元素.

(1) 如果$\{\varphi_n\}$中任意两个元素都正交，则称$\{\varphi_n\}$是一个正交组.

(2) 如果正交组$\{\varphi_n\}$的所有元素的范数都是1($\|\varphi_n\|=1$)，则称$\{\varphi_n\}$为标准正交组.

(3) 如果$\{\varphi_n\}$是线性无关的,而且在H中除零元素外,不存在与$\{\varphi_n\}$中所有φ_n都正交的元素,则称$\{\varphi_n\}$为空间的基.

定理1.1.6 Hilbert空间中任一正交组是线性无关的.

证明 设$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$是一正交组,下面证$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$是线性无关的.假设存在实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$使得

$$a_1\varphi_1+a_2\varphi_2+\cdots+a_n\varphi_n=0,$$

上式两边与φ_1取内积得

$$a_1(\varphi_1,\varphi_1)+a_2(\varphi_2,\varphi_1)+\cdots+a_n(\varphi_n,\varphi_1)=0$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

因为$\varphi_2,\varphi_3,\cdots,\varphi_n$都与$\varphi_1$正交,上式变为

$$a_1\|\varphi_1\|^2=0.$$

但$\varphi_1\neq 0$,$\|\varphi_1\|^2>0$,所以$a_1=0$.同理可证$a_2=\cdots=a_n=0$，这就证明了$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$是线性无关的.证毕.

定理 1.1.7 Hilbert 空间H的标准正交基$\{x_n\}$,则H中每一个元素x都可以展成$\{x_n\}$的 Fourier 级数

$$x=\sum_{K=1}^{\infty}(x,x_K)x_K, \tag{1.1.14}$$

且成立 Parseval 等式

$$\sum_{K=1}^{\infty}(x,x_K)^2=\|x\|^2. \tag{1.1.15}$$

证明 设$\{x_n\}$是 Hilbert 空间H的标准正交基,x是H中任一元素,令

$$S_n=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n,$$

求出S_n且使得$\|x-S_n\|$取最小值.

$$\|x-S_n\|^2=(x-S_n,x-S_n)=\left(x-\sum_{K=1}^{n}a_Kx_K,x-\sum_{K=1}^{n}a_Kx_K\right)=\|x\|^2+\sum_{K=1}^{n}\left[a_K-(x,x_K)\right]^2-\sum_{K=1}^{n}(x,x_K)^2.$$

当$a_K=(x,x_K)$时,取最小值

$$\|x-S_n\|^2=\|x\|^2-\sum_{K=1}^{n}(x,x_K)^2=\|x\|^2-\sum_{K=1}^{n}a_K^2, \tag{1.1.16}$$

从而所求S_n可表示为

$$S_n=\sum_{K=1}^{n}a_Kx_K=\sum_{K=1}^{n}(x,x_K)x_K, \tag{1.1.17}$$

由（1.1.16）式可得出贝塞尔不等式

$$\sum_{K=1}^{n}(x,x_K)^2=\sum_{K=1}^{n}a_K^2\leq\|x\|^2,$$

由此可知级数$\sum_{K=1}^{\infty}(x,x_K)^2=\sum_{K=1}^{\infty}a_K^2$是收敛的,且

$$\sum_{K=1}^{\infty}(x,x_K)^2=\sum_{K=1}^{\infty}a_K^2\leq\|x\|^2.$$

由柯西收敛原理和$\{x_n\}$的标准正交性,对$m>n$有

$$\|S_m-S_n\|=\left\|\sum_{K=n+1}^{m}a_Kx_K\right\|^2=\sum_{K=n+1}^{m}\|a_Kx_K\|^2=\sum_{K=n+1}^{m}a_K^2\to 0\text{ （}m\to\infty,n\to\infty\text{）}.$$

表明$\{S_n\}$是 Hilbert 空间中的一个 Cauchy 序列,因此在H中有极限元素

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{K=1}^{\infty}a_Kx_K=\sum_{K=1}^{\infty}(x,x_K)x_K. \tag{1.1.18}$$

对$n>k$有

$$(x-S,x_K)=(x,x_K)-(S,x_K)=a_K-(S-S_n,x_K)-(S_n,x_K)=a_K-(S-S_n,x_K)-a_K=-(S-S_n,x_K).$$

由 Schwarz 不等式有

$$|(x-S,x_K)|\leq\|S-S_n\|\|x_K\|=\|S-S_n\|\to 0\text{ （}n\to\infty\text{）}.$$

于是有$(x-S,x_K)=0$，$K=1,2,3,\cdots$

由于$\{x_n\}$是基，故$x-S=0$，即$x=S$.由（1.1.18）式

$$x=\sum_{K=1}^{\infty}(x,x_K)x_K\ ,\tag{1.1.19}$$

x 为关于基 $\{x_n\}$ 的傅里叶级数，$a_K=(x,x_K)$ 傅里叶系数.

在（1.1.16）式两边令 $n\to\infty$，得 Parseval 等式

$$\|x\|^2=\sum_{K=1}^{\infty}a_K^2=\sum_{K=1}^{\infty}(x,x_K)^2\ .\qquad \text{证毕.}\tag{1.1.20}$$

例 1.1.8 平方可积函数类 $L^2([-\pi,\pi])$ 有标准正交基

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\cdots,\frac{\cos Kx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin Kx}{\sqrt{\pi}},\cdots.$$

因此,所有平方可积函数 $f(x)\in L^2([-\pi,\pi])$ 都可以展开成 Fourier 级数

$$f(x)=\frac{a_0}{\sqrt{2\pi}}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{K=1}^{\infty}(a_K\cos Kx+b_K\sin Kx)\ ,$$

其中

$$a_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\ ,\quad a_K=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos Kxdx\ ,\quad b_K=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin Kxdx\ .$$

此时的 Parseval 等式为

$$\sum_{K=0}^{\infty}a_K^2+\sum_{K=1}^{\infty}b_K^2=\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx\ .$$

§2　泛函的 Frechet 微分与 Gateaux 导数

设 E 及 B 是两个 Banach 空间, $D\subset E$, A 为 D 到 B 中的算子(即 D 中每一元素 x 对应于 B 中唯一的元素 Ax), 记为 $A:D\to B$. 算子 $A:D\to E$ 又称为 D 上的算子.

若算子 A 把 D 中任何有界集均映成 B 中的有界集, 则称 A 在 D 上有界.

若对任意元素 $x\in D$ 及序列 $\{x_n\}\subset D$, 当 $x_n\to x$ (在 E 中)时, 必有 $Ax_n\to Ax$ (在 B 中), 则称 A 在 D 上连续.

若 A 把 D 中任意有界集均映成 B 中的列紧集, 则称 A 是 D 到 B 中的紧算子.

显然, 紧算子必定是有界算子.

若 A 是 D 到 B 中的连续紧算子, 则又称 A 是 D 到 B 中的全连续算子.

若算子 $A:D\to B$ 满足条件

$$A(x+y)=Ax+Ay\ (\forall x,y\in D),\quad A(ax)=aAx\qquad(\forall a\in R,x\in D),$$

则称 A 在 D 上是线性的.

若线性算子 $A:E\to B$ 满足条件

$$\|Ax\|_B\le M\|x\|_E\ (\forall x\in E,\exists M>0),\tag{1.2.1}$$

则称 A 为 E 上的线性有界算子.

显然, 若对算子 $A:D\to B$, 存在常数 $M>0$ 使得(1. 2. 1)式成立, 则 A 在 D 上有界. 反之, 有界算子 $A:D\to B$ 不一定满足(1. 2. 1)式.

设 $A:E\to B$ 是线性有界算子, 则对任意 $x\in E$ 及 $\{x_n\}\subset E$, 由(1. 2. 1)式得

$$\|Ax_n-Ax\|_B=\|A(x_n-x)\|_B\le M\|x_n-x\|_E\ .$$

由此可知, 当 $x_n\to x$ 时推出 $Ax_n\to Ax$. 表明线性有界算子 $A:E\to B$ 是线性连续算子. 因此, 线性紧算子 $A:E\to B$ 是线性有界算子, 也是线性连续算子, 也是线性全连续算子.

以 $\varphi(E,B)$ 表示所有线性有界算子 $A:E\to B$ 的集合. 对 $A_1,A_2\in\varphi(E,B)$ 定义算子加法 $A=A_1+A_2$ 为

$$Ax=A_1x+A_2x\ (\forall x\in E),$$

对数 $a\in R$ 与算子 $A\in\varphi(E,B)$ 的乘法 aA 为

$(aA)x = a(Ax)$,

对 $A \in \varphi(E,B)$ 定义 A 的范数为

$$\|A\| = \sup_{0 \neq x \in E} \frac{\|Ax\|_B}{\|x\|_E} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E = 1}} \|Ax\|_B .$$

容易证明, $\varphi(E,B)$ 是一个 Banach 空间，并称为 E 到 B 中的线性有界算子空间.

算子 $A: E \to R$ 又称为 E 上的泛函. Banach 空间 E 上所有线性连续泛函所成的 Banach 空间 $\varphi(E,R)$ 称为 E 的共轭空间或对偶空间, 记为 E^* 或 E'.

设 $D \subset E$，对所有 $x \in D$，把 x 映成 x 的算子 I ($Ix = x$)称为 D 上的恒等算子或单位算子.

设 A 与 B 都是 $E \to E$ 的算子, 则由对应

$$x \to B(Ax)$$

确定一个 $E \to E$ 的算子, 称为算子 B 与 A 的乘积, 记为 BA, 即

$$(BA)x = B(Ax).$$

引理 1.2.1 设 $A: E \to E$ 线性有界算子, 则 $A^0 = I, A^m = A(A^{m-1})$ (整数 $m \geq 1$) 都是线性有界算子, 且有

$$\|A^m\| \leq \|A\|^m \tag{1.2.2}$$

此引理由数学归纳法容易证明.

设 $D \subset E$，$A: D \to B$, 如果对每一个元素 $y \in B$, 方程

$$Ax = y$$

有唯一解 $x \in D$, 则把对应 $y \to x$ 看成 B 到 E 中的算子, 称为 A 的逆算子, 记为 A^{-1}, 即

$$A^{-1}y = x \quad (\forall y \in B).$$

此时也称 A 为可逆的.

显然，$AA^{-1} = I_B$ 是 B 上的恒等算子，$A^{-1}A = I_D$ 是 D 上的恒等算子. 若 $A: D \to B$ 是线性的, 则 $A^{-1}: B \to E$ 也是线性的.

定理 1.2.1 设 E 是 Banach 空间，$A: E \to E$ 有界线性算子, 且 $\|A\| < 1$, 那么

（1）$\forall x \in E$，$\sum_{K=0}^{m} A^K x$ 在 E 中收敛到 $\sum_{K=0}^{\infty} A^K x$ （$m \to \infty$），即

$$\sum_{K=0}^{\infty} A^K x = \lim_{m \to \infty} \sum_{K=0}^{m} A^K x . \tag{1.2.3}$$

（2）对应 $x \to \sum_{K=0}^{\infty} A^K x$ 确定的算子 $\sum_{K=0}^{\infty} A^K : E \to E$ 是线性有界的.

（3）$I - A$ 是可逆算子，且

$$(I - A)^{-1} = \sum_{K=0}^{\infty} A^K . \tag{1.2.4}$$

证明 因为 $\|A\| < 1$，故级数 $\sum_{K=0}^{\infty} \|A\|^K$ 收敛，记

$$\sum_{K=0}^{\infty} \|A\|^K = M . \tag{1.2.5}$$

（1）$\forall x \in E$，令 $y_m = \sum_{K=0}^{m} A^K x$. 当 $m > l$ 时由引理 1.2.1 及（1.2.5）式得

$$\|y_m - y_l\| = \left\| \sum_{K=0}^{m} A^K x - \sum_{K=0}^{l} A^K x \right\| = \left\| \sum_{K=l+1}^{m} A^K x \right\| \leq \sum_{K=l+1}^{m} \|A^K x\| \leq \sum_{K=l+1}^{m} \|A^K\| \|x\|$$

$$\leq \sum_{K=l+1}^{m} \|A\|^{K} \|x\| \to 0,(m,l \to \infty).$$

于是$\{y_m\}$是E中的Cauchy序列,则

$$y_m = \sum_{K=0}^{m} A^K x \to \sum_{K=0}^{\infty} A^K x \ (m \to \infty), \tag{1.2.6}$$

即（1.2.3）成立.

（2）算子$\sum_{K=0}^{\infty} A^K$显然是线性的,对$x \in E$,由（1.2.2）和（1.2.5）式得

$$\left\|\sum_{K=0}^{m} A^K x\right\| \leq \sum_{K=0}^{m} \left\|A^K x\right\| \leq \sum_{K=0}^{m} \left\|A^K\right\| \|x\| \leq \sum_{K=0}^{m} \|A\|^K \|x\| \leq M\|x\|. \tag{1.2.7}$$

由（1.2.6）式知

$$\left\|\sum_{K=0}^{m} A^K x\right\| \to \left\|\sum_{K=0}^{\infty} A^K x\right\|, (m \to \infty). \tag{1.2.8}$$

结合（1.2.7）和（1.2.8）式有

$$\left\|\sum_{K=0}^{\infty} A^K x\right\| \leq M\|x\|,$$

证明了算子$\sum_{K=0}^{\infty} A^K$是有界的.

（3）$\forall x \in E$有

$$(I-A)\sum_{K=0}^{m} A^K x = \sum_{K=0}^{m} A^K x - \sum_{K=1}^{m+1} A^K x = x - A^{m+1}x,$$

于是

$$\left\|(I-A)\sum_{K=0}^{m} A^K x - x\right\| = \left\|A^{m+1}x\right\| \leq \|A\|^{m+1}\|x\| \to 0 \ (m \to \infty). \tag{1.2.9}$$

因为$I-A$为线性有界算子,所以$I-A$也是连续算子,由（1.2.6）式推出

$$(I-A)\sum_{K=0}^{m} A^K x \to (I-A)\sum_{K=0}^{\infty} A^K x \ (m \to \infty). \tag{1.2.10}$$

根据（1.2.9）和（1.2.10）式可得

$$(I-A)\sum_{K=0}^{\infty} A^K x = x.$$

上式对$\forall x \in E$都成立，因此有

$$(I-A)\sum_{K=0}^{\infty} A^K = I.$$

从而证明了$I-A$可逆且$(I-A)^{-1} = \sum_{K=0}^{\infty} A^K$. 证毕.

定义1.2.1 设E是Banach空间, $B: E \to R$是E上的泛函,$u \in E$.如果存在$A(u) \in E^*$（即$A(u)$是E上的线性有界泛函）,使得

$$B(u+\varphi) = B(u) + \langle A(u), \varphi \rangle + w(u,\varphi), \tag{1.2.11}$$

其中$\langle A(u), \varphi \rangle = A(u)(\varphi)$表示泛函$A(u)$在$\varphi$处的值,$w(u,\varphi) = o(\|\varphi\|)$,即

$$\lim_{\|\varphi\| \to 0} \frac{\|w(u,\varphi)\|}{\|\varphi\|} = 0, \tag{1.2.12}$$

则称泛函B在u处Frechet可微,$A(u)$称为B在u处的Frechet导数,记$A(u) = B'(u)$, $A(u)\varphi = B'(u)\varphi$称

为 B 在 u 处的 Frechet 微分.

于是,（1.2.11）式可以写成

$$B(u+\varphi)=B(u)+\langle B'(u),\varphi\rangle+o(\|\varphi\|). \tag{1.2.13}$$

定义 1.2.2 设 E 是 Banach 空间, $B:E\to R$ 是 E 上的泛函,如果对 $u,\varphi\in E$,极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{B(u+t\varphi)-B(u)}{t} \tag{1.2.14}$$

存在,则称 B 在 u 处 Gateaux 可微,极限(1.2.14)称为 B 在 u 处(沿方向 φ)的 Gateaux 微分,记为

$$DB(u,\varphi)=\lim_{t\to 0}\frac{B(u+t\varphi)-B(u)}{t}. \tag{1.2.15}$$

如果 Gateaux 微分(1.2.15)可以表示为

$$DB(u,\varphi)=\langle C,\varphi\rangle,\quad C\in E^*, \tag{1.2.16}$$

则称 B 在 u 处具有线性有界的 Gateaux 微分, C 称为 B 在 u 处(沿方向 φ)的 Gateaux 导数,记为

$$C=DB(u),\quad DB(u,\varphi)=\langle DB(u),\varphi\rangle. \tag{1.2.17}$$

定理 1.2.2 设 I 是 Banach 空间 E 上的泛函, $u\in E$.如果 I 在 u 的某邻域内具有线性有界的 Gateaux 微分,且 Gateaux 导数 $DI(u)$ 在 u 处是连续的,则 I 在 u 处 Frechet 可微,且 $DI(u)=I'(u)$.

证明 设 I 在 u 的邻域 $B_r(u)$ 内沿 φ 方向具有线性有界的 Gateaux 微分,不妨设 $\|\varphi\|<r$,令

$$g(s)=I(u+s\varphi),\quad s\in[0,1]. \tag{1.2.18}$$

当 $s\in[0,1]$ 时, $u+s\varphi\in B_r(u)$, 由（1.2.15),（1.2.17）及(1.2.18)式得

$$\langle DI(u+s\varphi),\varphi\rangle=\lim_{t\to 0}\frac{I(u+s\varphi+t\varphi)-I(u+s\varphi)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{g(s+t)-g(s)}{t}=g'(s).$$

由中值公式,存在 $\theta, 0<\theta<1$,使得

$$g(1)-g(0)=g'(\theta),$$

$$I(u+\varphi)-I(u)=\langle DI(u+\theta\varphi),\varphi\rangle. \tag{1.2.19}$$

令

$$w(u,\varphi)=I(u+\varphi)-I(u)-\langle DI(u),\varphi\rangle, \tag{1.2.20}$$

则

$$I(u+\varphi)=I(u)+\langle DI(u),\varphi\rangle+w(u,\varphi). \tag{1.2.21}$$

将(1.2.19)式代入(1.2.20)式得

$$w(u,\varphi)=\langle DI(u+\theta\varphi),\varphi\rangle-\langle DI(u),\varphi\rangle=\langle DI(u+\theta\varphi)-DI(u),\varphi\rangle.$$

从而有

$$|w(u,\varphi)|\le\|DI(u+\theta\varphi)-DI(u)\|\|\varphi\|.$$

因为 $DI(u)$ 在 u 处连续, 由上式可得

$$\frac{|w(u,\varphi)|}{\|\varphi\|}\le\|DI(u+\theta\varphi)-DI(u)\|\to 0\ (\|\varphi\|\to 0).$$

由此式及(1.2.21)式证明了 I 在 u 处 Frechet 可微,且 $DI(u)=I'(u)$. 证毕.

§3 Riesz 表示定理与 Fredholm 定理及压缩映射定理

设 Hilbert 空间 H 的一个子集 M ,集合

$$M^{\perp}=\{x\in H\,|\,(x,y)=0,\forall y\in M\}$$

称为 M 的正交补空间.

引理 1.3.1 设 $M\subset H$,则 $M^{\perp}$ 是 H 的闭子空间,且

$M\cap M^{\perp}=\{0\}$.

证明 $M^{\perp}$ 显然是 H 的线性子空间,下面证 $M^{\perp}$ 是闭的.设 $\{x_n\}\subset M^{\perp}$, $x\in H$, $\|x_n-x\|\to 0$,则

$$(x_n,y)=0\ (\forall y\in M),$$

从而

$$|(x,y)|=|(x_n,y)-(x,y)|=|(x_n-x,y)|\le\|x_n-x\|\|y\|\to 0,$$

于是,$(x,y)=0$ ($\forall y\in M$),即 $x\in M^{\perp}$,所以 $M^{\perp}$ 是闭的.设 $x\in M\cap M^{\perp}$,则 $(x,x)=0$,因而 $x=0$,即 $M\cap M^{\perp}=\{0\}$.

证毕.

定理 1.3.1 若 M 是 Hilbert 空间 H 的闭子空间,则 H 中的每一个元素 x 均可唯一的表达为

$$x=y+z,y\in M,z\in M^{\perp}. \tag{1.3.1}$$

证明 设 $x\in H$,令

$$d=dist(x,M)=\inf_{u\in M}\|u-x\|$$

表示 x 与集合 M 的距离,则存在序列 $\{y_K\}\subset M$ 使得

$$\|y_K-x\|\to d.$$

由平行四边形定理有

$$\|y_l-x+y_K-x\|^2+\|(y_l-x)+(y_m-x)\|^2=2\left(\|y_l-x\|^2+\|y_m-x\|^2\right).$$

因为 $\frac{y_l+y_K}{2}\in M$ 及 d 的定义,

$$\|y_l-x+y_K-x\|=2\left\|\frac{y_l+y_K}{2}-x\right\|\ge 2d.$$

综合上面两个式子

$$(2d)^2+\|y_l-y_m\|^2\le 2\left(\|y_l-x\|^2+\|y_m-x\|^2\right)\to 4d^2.$$

于是当 $m,l\to\infty$ 时,$\|y_l-y_m\|\to 0$,即 $\{y_K\}$ 是 H 中的 Cauchy 序列,而 M 为 H 的闭子空间,因而存在 $y\in M$ 使得 $\|y_K-y\|\to 0$.因此,

$$d\le\|y-x\|=\|(y_K-x)-(y_K-y)\|\le\|y_K-x\|+\|y_K-y\|\to d+0$$

从而推出 $\|y-x\|=d$,令 $z=x-y$ 则 $x=y+z$.

下面需证 $z\in M^{\perp}$.对任意 $0\ne v\in M,a\in R$ 有 $y+av\in M$,因而

$$\|z-av\|^2=\|x-(y+av)\|^2\ge d^2.$$

又注意到 $\|z\|=d$,由上式可得

$$-2a(z,v)+a^2\|v\|^2\ge 0,$$

令 $a=\frac{(z,v)}{\|v\|^2}$ 代入上式

$$-\frac{|(z,v)|^2}{\|v\|^2}\ge 0,$$

由此得 $(z,v)=0$,故 $z\in M^{\perp}$

最后证明表示式(1.3.1)是唯一的.若还有 $x=y_1+z_1$, $y_1\in M,z_1\in M^{\perp}$,则由引理 1.3.1 有

$$y-y_1=z_1-z\in M\cap M^{\perp}=\{0\},$$

因此 $y=y_1,z=z_1$.

证毕.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com