教学参考用书

XIAN XING DAI SHU

线性代数

姚允龙 张国梁 黄午阳 编著

上海电视大学

前　言

目前,线性代数越来越广泛地应用于科学技术各个领域,因此,广大工程技术人员与工科大学生迫切需要这方面的通俗读物。他们希望以较少篇幅包括线性代数最常用的内容,要求通俗易懂、深入浅出,避免通常教本的那种烦杂体系以及使人不得要领的处理方式。作者经多年研究,在本书中采用一系列新的处理方法,教学试用后收效显著。本书首次引入的"多项式特征向量"等概念,曾在全国微分方程会议上得到有关专家的好评。

本书第一、二章是线性代数必不可少的知识。所有概念均以工程技术人员所熟知的线性系统输入输出为背景,因而具体形象,便于掌握,便于直接应用。第三章建立的多项式特征向量及其基本定理,可用以推导线性代数一些较深入的结果,并能在一些领域中得到应用,如第四、五章所列举。读者可以看出新工具用起来简捷明快而又自然利落。由于"多项式特征向量"等概念比较深刻而直接地揭示了线性代数的实质,我们深信它是有生命力的。

作为直接应用,第三章§3解决了二次型化平方的问题,并在第四章§1中加以推广。作为其它领域中应用的例子,见第四章§3、§4,后者还给出了多项式特征向量的有效求法。如对基本定理稍作补充说明,就容易得到方阵的Jordan标准型,见第五章§3。

本书主要是为工程技术人员与工科大学生而写的，只要具有高中以上文化程度以及微积分初步知识的读者即可阅读。本书对高等院校的数学教师以及数学专业学生也有参考价值。

限于作者水平、本书难免有不足之处。敬请读者指正。对于上海市业余工业大学、上海电视大学以及出版部门给予的支持,对于许多前辈数学家的关怀,作者深表谢意。

编著者于 1981.8.

目 录

第一章　矩阵初步知识

§1　矩阵和矩阵的运算

许多简单的工程问题可归结为线性函数(也称比例关系式)$y=ax$ 的研究。譬如，线性放大器的输入讯号 x 与输出讯号 y 之间满足比例关系式 $y=ax$，其中 a 称为放大系数。又如测量仪表中被测量 x 与表上的读数 y 之间也是 $y=ax$ 关系。这种例子不胜枚举。线性函数 $y=ax$ 可直观地用所谓“框图”表示出来(见图1(1))。在框图中，自变量 x 常称为输入量，函数值 y 则称为输出量。在控制工程中，$y=ax$ 称为比例放大器，它只有一个输入，一个输出，我们常称它为单输入、单输出系统。

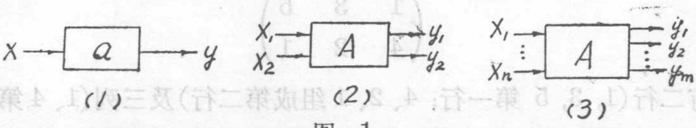

图　1

在比较复杂的一些问题中，输入量与输出量均可能不止一个。图1(2)表示了有两个输入量 x_1, x_2 与两个输出量 y_1, y_2 的系统，设输入 x_1, x_2 与输出 y_1, y_2 之间满足关系式:

$$\begin{cases} y_1=ax_1+bx_2 \\ y_2=cx_1+dx_2 \end{cases} \tag{1}$$

其中 a、b、c、d 四个数称为该系统的系数。借助于下面介绍的矩阵概念，可以将系统(1)表示得象单输入、单输出系统一样简单。

先将输入量 x_1, x_2、输出量 y_1, y_2、系数 a、b、c、d 列成下面三个数字表格(为了清楚起见,我们用圆括号将每个表格括起来):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

第一个表格记为 $\boldsymbol{x}$, 第二个记为 $\boldsymbol{y}$, 第三个记为 A 即

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{2}$$

$\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 分别由两个数组成, 称它们是二维向量。A 是由 4 个数组成的表格,共有二行(a、b 组成第一行, c、d 组成第二行)二列(a、c 组成第一列, b、d 组成第二列),这个数字(字母)表格在代数上称为矩阵 A,或更精确地称为二行二列矩阵,简称 2×2 阵。矩阵就是指数字(或字母)排成的长方或正方用圆括号括起来的表格。一般矩阵的行数与列数不一定要相同,譬如矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

有二行(1, 3, 5 第一行; 4、2、1 组成第二行)及三列(1、4 第一列; 3、2 第二列; 5、1 第三列), 它称为二行三列矩阵, 或 2×3 阵。向量 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 也可看成矩阵,它是二行一列矩阵,或 2×1 阵。一行二列矩阵, 例如 (x_1, x_2), 也可称为向量, 为了与 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 区别起见, $\boldsymbol{x}$ 称为二维列向量,而 (x_1, x_2) 称为二维行向量。

对于有更多输入与输出的系统,对应的系数远不止 a、b、c、d 四个, 这时单用 a、b、… 等字母就无法表示所有系数了,我们可用足标法来克服这个困难,仍以 2×2 阵为例来说明。在 A 的

矩阵表示中，a 处于第一行第一列的位置，将它记为 $a_{11}=a$，b 在第一行第二列位置，则记为 $a_{12}=b$，同样 $a_{21}=c$，$a_{22}=d$，这样，A 便可写成有规则的形式

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{3}$$

有 n 个输入量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 m 个输出量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的系统(见图 1(3))，如果输入与输出的关系为

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{cases} \tag{4}$$

则称它为一个 n 个输入，m 个输出的线性系统，这种系统在工程、控制工程及管理科学等等中经常遇到。仿照二输入、二输出系统(1)，将输入 $x_1, x_2, \cdots, x_n$；输出 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 与系数 $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{mn}$ 列成下面的长方表格：

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 是由 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 这 n 个数组成，称为 n 维(列)向量，同样 $\boldsymbol{y}$ 称为 m 维(列)向量，它们又可分别称为 $n\times1$ 阵(n 行 1 列矩阵)及 $m\times1$ 阵。A 是由 mn 个数组成的长方表格。前已讲到，它称为矩阵。a_{ij} 称为矩阵 A 的元素，足标中第一个，即 i 表示元素 a_{ij} 所在的行，而第二个足标，即 j 表示元素 a_{ij} 所在的列。譬 a_{12} 在第一行第二列。显然 $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}$ 组成 A 的第一行，而 $a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}$ 组成 A 的第二行，…最后 $a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn}$ 组成 A 的第 m 行。同样 $a_{11}, a_{21}, a_{31}, \cdots, a_{m1}$ 组

成 A 的第一列，类似地可指出 A 的第二列，…，第 n 列。因为 A 有 m 行 n 列，故 A 称为 $m\times n$ 阵。我们已经知道 $m\times n$ 阵 A 对应着 n 个输入 $x_1, \cdots, x_n$ 与 m 个输出 $y_1, y_2, \cdots, y_m$，于是 $m\times n$ 中后一个数 n 表示输入的个数，前一个数 m 表示输出的个数。譬如，2×3 阵就对应着三个输入，两个输出的系统。

我们再回到二输入、二输出系统(1)来说明用了向量与矩阵记号后，究竟有些什么好处。

先来规定 2×2 矩阵 A 与 2×1 向量 $\boldsymbol{x}$ 的“乘积” $A\boldsymbol{x}$：

$$A\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax_1+bx_2 \\ cx_1+dx_2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

再强调一下，等式(6)不是“证明”出来的，而就是这样规定的。这样规定以后，二输入、二输出系统(1)就可写成与单输入、单输出系统 $y=ax$ 类似的形式

$$\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x} \tag{7}$$

这是由于(7)式左边 $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$，而右边 $A\boldsymbol{x}$ 利用规定(6)式得 $y_1=ax_1+bx_2$, $y_2=cx_2+dx_2$，这正是系统(1)。下面来看二个例子：

例 1 有一个二输入、二输出系统

$$\begin{cases} y_1=x_1+x_2 \\ y_2=x_1-x_2 \end{cases} \tag{8}$$

试表示成向量——矩阵形式(7)。

解 令

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

则(8)可写成 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$，即

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

例 2 有一个用向量——矩阵形式表示的系统

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

试还原为普通关系式。

解 根据(6)式

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot x_1 + (-1)x_2 \\ 2\cdot x_1 + 5\cdot x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + 5x_2 \end{pmatrix}$$

所以 $y_1 = x_1 - x_2$, $y_2 = 2x_1 + 5x_2$。

对于一般的 n 个输入、m 个输出的系统(4), 它对应的矩阵 A 是 $m\times n$ 阵, $\boldsymbol{x}$ 是 n 维列向量(见(5)式), 规定 A 与 $\boldsymbol{x}$ 的"乘法" $A\boldsymbol{x}$ 为

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \qquad (9)$$

例 3 已知:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

求 2×3 阵 A 与 3×1 向量 $\boldsymbol{x}$ 的乘法。

解 根据(9)式:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1&3&5\\4&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\times1+3\times(-1)+5\times2\\4\times1+2\times(-1)+1\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$$

作法是将 A 中第一行 1, 3, 5 与向量 $\boldsymbol{x}$ 对应的元素 1, -1, 2 相乘, 然后再相加得 $1\times1+3\times(-1)+5\times2=8$, 这样所得到的是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 中第一行的元素。同样, 将 A 的第二行元素与 $\boldsymbol{x}$ 对应的元素相乘后再相加得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 中第二行元素。

从这个例子可清楚地看出, 2×3 阵与 3×1 向量相乘得 2×1 向量, 从(9)式可看出, 一般地 $m\times n$ 阵 A 与 $n\times1$ 向量相乘得到 $m\times1$ 向量(m 行 1 列)。

从这个例子, 我们还可明白一个需要特别注意的问题, 即 A 的列数与 $\boldsymbol{x}$ 的行数必须相等, 否则是不能作乘法的。譬如, 下面的 2×2 阵 A 与 3×1 向量 $\boldsymbol{x}$ 不能进行乘法:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}。$$

我们已经知道 n 输入、m 输出系统的阵 A 是 $m\times n$ 阵, 而输入 $\boldsymbol{x}$ 是 $n\times1$ 向量, 于是 A 的列数与 $\boldsymbol{x}$ 的行数都是 n, 故这时总可以作乘法。并且按(4)式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正好等于 $\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}=\boldsymbol{y}$$

这样, 多输入、多输出(一般 n 或 $m>1$ 叫多输入或多输出)系统

(4)的向量——矩阵表示 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ 与单输入单输出系统 $y=ax$ 差不多同样简单(见图 2)，这不仅是形式上的简化,以后会看出这种简化确实带来了本质性的东西。

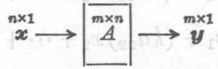

图 2　n 输入、m 输出系统 A

从上面的讨论中，已可清楚地看出，掌握了系统的系数阵 A, 则在任何输入 $\boldsymbol{x}$ 下，都可算出对应的输出 $\boldsymbol{y}$, 从而完全掌握了该系统。至于如何根据实测的输入、输出数据来求出矩阵 A, 这是一门专门学科“系统辨识”所研究的内容，我们在这里将不涉及。我们所关心的是去讨论各种系统互连起来所得到的新系统以及系统的化简,这在实用上是非常重要的。

如果系统 A 的输出讯号 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ 太小，则就要外接一个放大器,其放大倍数记为 k(见图 3)，这时输出讯号 $\boldsymbol{y}$ 的每个分量 y_i 都放大 k 倍而变成 $ky_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$。因此，规定数 k 与向量 $\boldsymbol{y}$ 的数乘 $k\boldsymbol{y}$ 为

$$k\boldsymbol{y}=k\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ky_1 \\ ky_2 \\ \vdots \\ ky_m \end{pmatrix} \tag{10}$$

譬如,
$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.2 \end{pmatrix},$$
放大 $k=100$ 倍,即

$$k\boldsymbol{y}=100\begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 100\times 0.1 \\ 100\times(-0.2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ -20 \end{pmatrix}。$$

放大器 k 与系统 A 可化简为一个系统,事实上系统 A 的普通表示式(4)中每个式子两边都乘以 k 得到

$x \longrightarrow \boxed{A} \xrightarrow{y} \boxed{k} \longrightarrow ky \qquad x \longrightarrow \boxed{kA} \longrightarrow ky = z$

图 3

$$\begin{aligned} ky_1 &= (ka_{11})x_1 + (ka_{12})x_2 + \cdots + (ka_{1n})x_n \\ ky_2 &= (ka_{21})x_1 + (ka_{22})x_2 + \cdots + (ka_{2n})x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ ky_m &= (ka_{m1})x_1 + (ka_{m2})x_2 + \cdots + (ka_{mn})x_n \end{aligned}$$

因此系统 A 加放大器 k 后的联合系统与以下矩阵

$$\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

所对应的系统有相同的输出 $k\boldsymbol{y}$（在输入 $\boldsymbol{x}$ 相同时）。由此规定矩阵 A 与数 k 的“乘法” kA 为

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix} \tag{11}$$

从上面定义可看出，数 k 与矩阵 A 的乘法是将 k 乘到 A 中的每个元素上。并且我们已经证明了公式

$$k\boldsymbol{y} = k(A\boldsymbol{x}) = (kA)\boldsymbol{x} = A(k\boldsymbol{x}) \tag{11-1}$$

其中 $k(A\boldsymbol{x}) = A(k\boldsymbol{x})$ 是显然的。

容易验证

$$1 \cdot A = A, \quad 0 \cdot \overset{m\times n}{A} = 0_{mn}$$

$$(kl)(A) = k(lA) \quad (k、l\text{ 是数})$$

其中 0_{mn} 表示元素都是零的 $m \times n$ 阵，即

$$0_{mn}=\left.\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right\} m\text{行}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{n\text{列}}$$

称为零阵。

例 4 $(3\times2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6\times1 & 6\times2 \\ 6\times0.1 & +6\times(-1) \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 0.6 & -6 \end{pmatrix}$$

也可这样做先乘 2, 再乘 3:

$$3\times2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.1 & -1 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 2\times1 & 2\times2 \\ 2\times0.1 & 2\times(-1) \end{pmatrix}$$

$$=3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0.2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\times2 & 3\times4 \\ 3\times0.2 & 3\times(-2) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 0.6 & -6 \end{pmatrix}$$

上面一种做法结果完全一样。

我们有时需要将两个讯号迭加，设这两个讯号是两个三维向量

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{z}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

将它们迭加就是将对应分量相加, 即

$$\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix} 1+(-1) \\ 2+1 \\ (-1)+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

据此，规定二个 m 维向量 $\boldsymbol{y}$ 与 $\boldsymbol{z}$ 的加法为

$$\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1+z_1 \\ y_2+z_2 \\ \vdots \\ y_m+z_m \end{pmatrix} \tag{12}$$

很明显，只有两个维数相同(即分量个数相同)的向量才可相加。

如果两个 m 维向量 $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ 分别是系统 A，系统 B 的输出，并且系统 A、B 有相同的输入 $\boldsymbol{x}$，那末将 $\boldsymbol{y}$ 与 $\boldsymbol{z}$ 再相加后得到新系统 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{x}$。下面我们来求新系统的系数阵 C。设 B 阵是

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

于是 $\boldsymbol{z}=B\boldsymbol{x}$，写成普通形式是

$$\begin{aligned} z_1&=b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1n}x_n \\ z_2&=b_{21}x_1+b_{22}x_2+\cdots+b_{2n}x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_m&=b_{m1}x_1+b_{m2}x_2+\cdots+b_{mn}x_n \end{aligned}$$

将它与(4)式相加得到

$$\begin{aligned} u_1&=y_1+z_1=(a_{11}+b_{11})x_1+(a_{12}+b_{12})x_2+\cdots+(a_{1n}+b_{1n})x_n \\ u_2&=y_2+z_2=(a_{21}+b_{21})x_1+(a_{22}+b_{22})x_2+\cdots+(a_{2n}+b_{2n})x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_m&=y_m+z_m=(a_{m1}+b_{m2})x_1+(a_{m2}+b_{m2})x_2+\cdots+(a_{m2}+b_{mn})x_n \end{aligned}$$

其中 u_1, u_2, $\cdots$, u_m 是 $\boldsymbol{u}$ 的各个分量。于是，可看出输入为 $\boldsymbol{x}$ 输出为 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$ 的系统即新系统的系数阵 C 的元素正好是 A 与 B 对应元素的和，即

$$
C=\begin{pmatrix}
a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\
a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\
a_{m1}+b_{m2} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}
\end{pmatrix}
$$

我们把这个阵定义为 $A+B$，即矩阵 A 加矩阵 B 定义为

$$
A+B=\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}
b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}
\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}
a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\
a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}
\end{pmatrix} \tag{13}
$$

从以上讨论可知，$\boldsymbol{x}$ 输入系统 $A+B$ 时所得到的输出 $(A+B)\boldsymbol{x}$ 恰好是 $A\boldsymbol{x}$ 与 $B\boldsymbol{x}$ 的和，故有

$$
(A+B)\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{x},\quad A、B\text{ 是同类型阵} \tag{13-1}
$$

例 5 已知

$$
A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}
$$

则 A 加 B 是：

$$
A+B=\begin{pmatrix} 1+(-1) & 2+(-2) \\ -1+0 & -3+3 \\ 5+5 & 1+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}
$$

必须指出，只有行数、列数分别相等的两个阵 A、B 才能相加。若 A 的行(及列)数与 B 的行(及列)数相等，则 A、B 叫同类型的阵。于是，只有同类型的阵才可相加。如例 5 中 A、B 均是 3×2 阵，故是同类型的阵，因此 A、B 可相加。

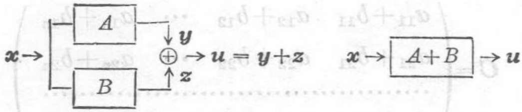

图 4

可以直接验证矩阵加法满足以下运算法则：设 A、B、C 是同类型的阵(均是 $m\times n$ 阵)，则

$$(A+B)+C=A+(B+C),\quad A+B=B+A$$

$$k(A+B)=kA+kB\quad (k\text{ 是数})$$

$$A+0_{mn}=A\quad (0_{mn}\text{ 是 } m\times n\text{ 零阵})$$

在线路中，经常将某个放大器的输出送到另一个放大器中去以进一步提高放大倍数，反映到代数中变成将系统 A 的输出 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ 作为另一个系统 B 的输入，而系统 B 的输出 $\boldsymbol{u}$ 作为总的输出(见图 5)，即通常所说的将系统 A、B 串联起来。但不是任何两个系统都可以串联起来的。A、B 可以串联起来的条件是 A 的输出向量 $\boldsymbol{y}$ 的维数应该与 B 输入向量的维数相同，否则就会发生输出量过多或过少的现象。设 A 是 $m\times n$ 阵，则 $\boldsymbol{y}$ 的维数是 m。又设 B 是 $k\times l$ 阵，则 B 的输入量要求 l 维，根据上面的讨论在 $l=m$ 时，A、B 才能串接，且 A 在前，B 在后，不能搞颠倒。若已经知道 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{u}=B\boldsymbol{y}$，现在来求总输出 $\boldsymbol{u}=B\boldsymbol{y}=B(A\boldsymbol{x})$ 的系数阵。先来举一个数字例子：

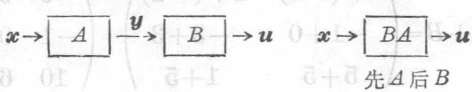

图 5

例 6 已知 A、B 均是二端网络，即 A、B 均是 2×2 阵：

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}$$