普通高等教育农业部“十二五”规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材

线性代数与概率论学习指导

XIANXING DAISHU YU GAILÜLUN XUEXI ZHIDAO

◆ 吴瑞武 郑大川 主编 ◆

中国农业出版社

普通高等教育农业部“十二五”规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材

线性代数与概率论学习指导

吴瑞武 郑大川 主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与概率论学习指导 / 吴瑞武，郑大川主编．—北京：中国农业出版社，2011.12

普通高等教育农业部“十二五”规划教材．全国高等农林院校“十二五”规划教材

ISBN 978-7-109-16374-4

Ⅰ．①线… Ⅱ．①吴…②郑… Ⅲ．①线性代数-高等学校-教学参考资料②概率论-高等学校-教学参考资料 Ⅳ．①O151.2②O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 268884 号

中国农业出版社出版

（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）

（邮政编码 100125）

策划编辑 朱 雷 魏明龙

文字编辑 魏明龙

北京通州皇家印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行

2012 年 1 月第 1 版 2012 年 1 月北京第 1 次印刷

开本：787mm×1092mm 1/16 印张：11

字数：262 千字

定价：18.00 元

内　容　简　介

本书是《线性代数与概率论》(郑大川、吴瑞武主编)的配套书，按教材章节编写。书中通过简明的理论介绍与方法总结，以及对大量的有代表性的典型例题进行分析、求解和评注，揭示了线性代数与概率论的解题方法与技巧。另外，书中给出了各章课堂练习、练习题的解答，提供了各章测试题和详解。

本书可作为本科学生学习线性代数与概率论课程的指导书，可供报考硕士研究生的读者以及有关教师和相关科技工作者参考。

编写人员名单

主　编　吴瑞武　郑大川

副主编　艾世猛　杨如艳　高　鑫　左珊珊　夏梓祥

参　编　赵　军　刘　雯　杨建红　吴　奇　吴兴纯　邱　靖　黄永林　梁　兵

前　言

为了更好地适应农林院校培养高等技术应用型人才的需要，提高学生的基本素质和教学质量，解决农林院校教育这一层次《线性代数与概率论》课程的教材问题，我们根据农林院校对数学教学的基本要求，本着教学与专业相融，基础教学为专业服务和以应用为目的，以必须、够用为度的原则，在多年从事高等农林院校教学实践的基础上，编写了《线性代数与概率论》教材和《线性代数与概率论》学习指导书。

《线性代数与概率论》学习指导书是教材的配套书，按教材章节编写。内容包括本章基本内容、例题选讲、本章练习答案、本章测试题及参考答案。以框架的形式搭建知识构架，补充定理和性质的证明以及更多的例题，供学生开拓视野，进一步掌握所学知识，对考研的内容加以强化并提供测试题帮助学生进行自我检查。

本书由云南农业大学吴瑞武、郑大川担任主编，云南农业大学艾世猛、杨如艳、高鑫、左珊珊、夏梓祥担任副主编，云南农业大学赵军、刘雯、杨建红、吴奇、吴兴纯、邱靖，云南省机电职业技术学院黄永林，深圳职业技术学院梁兵参加编写。

非常感谢云南农业大学教务处对本教材的出版给予的关心和大力支持。

由于编者的水平有限，错误和不足在所难免，期待读者批评和指正。

编　者

2011年10月

目　　录

上　篇

线性代数

第一章 行列式

一、本章基本内容

1. 全排列、逆序数、对换、n 阶行列式的定义

(1) 全排列：把 n 个不同的数(元素)排成一列，称为这 n 个数(元素)的全排列(简称排列).

(2) 逆序数：在一个由 n 个不同元素构成的全排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，如果有某个较大的数 p_i 排在较小的数 p_j 的前面，就称 p_i 与 p_j 构成了一个逆序．在一个排列中，逆序的总数称为逆序数．

(3) 对换：在一个排列 $p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 中，如果只将 p_i 与 p_j 两元素的位置互换(其余均不动)，得到另一个排列 $p_1p_2\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$，这样的变换称为一次对换．

(4) n 阶行列式：由排成 n 行 n 列的 n^2 个数 a_{ij} (i，$j=1$，2，…，n)构成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式．数 a_{ij} (i，$j=1$，2，…，n)称为行列式的元素，元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列．

n 阶行列式的值为

$$D=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)+\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}.$$

行列式指的是一个数，只不过把这个数用一种特殊的记号和数字表示出来．

2. 行列式的性质

(1) 交换行列式的两行(列)，行列式的值改变符号．

(2) 行列式中某行(列)元素的公因子可以提到行列式的外面．

(3) 行列式某两行(列)的对应元素成比例，或行列式中有一行(列)的元素全为零，则此行列式的值为零．

(4) 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和，则行列式等于该行(列)的元素对应的两个行列式之和，其余各行(列)的元素与原行列式相同．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(5) 将行列式的某行(列)的各元素乘以常数 k 加到另一行(列)的对应元素上去．行列式的值不变．

(6) 行列式 D 按某一行(列)展开

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}D, & i=j,\\ 0, & i\neq j\end{cases}(i=1,2,\cdots,n),\quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}D, & i=j,\\ 0, & i\neq j\end{cases}(i=1,2,\cdots,n),$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式．

3. 范德蒙行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)(n\geqslant 2).$$

4. 克拉默法则

(1) 非齐次线性方程组的系数行列式不等于零，则方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D}.$$

(2) 若非齐次线性方程组无解或有无穷多解，则其系数行列式 $D=0$.

(3) 齐次线性方程组的系数行列式不等于零，则方程组只有唯一零解．

(4) 齐次线性方程组有非零解，则系数行列式必为零．

二、例题选讲

例 1 选择合适的 i 与 k，使排列 $1274i56k9$ 成偶排列．

解 在排列 $1274i56k9$ 中缺数字 3，8，不妨先令 $i=3$，$k=8$ 得 127435689，此排列的逆序数为 $\tau(127435689)=0+0+0+1+2+1+1+0+0=5$，是奇排列，但由于对换可以改变排列的奇偶性，故取 $i=8$，$k=3$ 得 127485639 是偶排列．

例 2 确定在六阶行列式中，项 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ 的符号．

解 方法 1 对换项中元素的位置，使每个元素所对应的行标为自然顺序，即把此项改写成 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$，其列标所构成的排列为 431265，逆序数为 6，是偶排列，故此项应带正号．

方法 2 $\tau(234516)=4$，$\tau(312645)=4$，均为偶数，故此项应带正号．

例 3 确定

$$f(x)=\begin{vmatrix}2x & x & 1 & 2\\ 1 & x & 1 & -1\\ 3 & 2 & x & 1\\ 1 & 1 & 1 & x\end{vmatrix}$$

中 x^3 的系数．

解 根据行列式定义，能含有 x^3 的项为 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$，即 $x\cdot 1\cdot x\cdot x=x^3$，其列标构成排列为 2134，且 $\tau(2134)=1$，故 $f(x)$ 中含 x^3 的项为 $-x^3$，x^3 的系数为 -1.

例 4 已知有行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix},$$

则此行列式第 4 行各元素余子式之和的值是多少?

解 考虑行列式

$$D_1=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix},$$

将 D_1 按第 4 行展开得

$$\begin{aligned}D_1&=(-1)^{4+1}(-1)M_{41}+(-1)^{4+2}M_{42}+(-1)^{4+3}(-1)M_{43}+(-1)^{4+4}M_{44}\\&=M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44},\end{aligned}$$

将 D_1 按第 3 行展开得

$$D_1=7\begin{vmatrix}3&4&0\\2&2&2\\-1&-1&1\end{vmatrix}=7\begin{vmatrix}3&4&0\\4&4&2\\0&0&1\end{vmatrix}=7\begin{vmatrix}3&4\\4&4\end{vmatrix}=-28,$$

所以 $$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-28.$$

例 5 解方程

$$\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&1-x&1&\cdots&1\\1&1&2-x&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&n-1-x\end{vmatrix}=0.$$

解 方程左边的行列式展开后是关于 x 的 $n-1$ 次多项式，所以该方程最多有 $n-1$ 个根．当 $x=0，1，\cdots，n-2$ 时，该行列式都有两行相同，从而为零，故这 $n-1$ 个数是此方程的全部根．

例 6 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a_1&b&\cdots&b\\b&a_2&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&\cdots&a_n\end{vmatrix}\ (a_i\neq b,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

解 此行列式元素的分布特点是行列式对角线上元素不同，其余元素相同．这类题目的解题方法可以利用行列式的展开式性质，在行列式值不变的情况下，增加一行一列，再进行化简．

$$D_n=\begin{vmatrix}a_1&b&\cdots&b\\b&a_2&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&\cdots&a_n\end{vmatrix}_n=\begin{vmatrix}1&b&b&\cdots&b\\0&a_1&b&\cdots&b\\0&b&a_2&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&b&b&\cdots&a_n\end{vmatrix}_{n+1}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{r_i-r_1}\begin{vmatrix}1 & b & b & \cdots & b\\ -1 & a_1-b & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & a_2-b & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n-b\end{vmatrix}_{n+1}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{c_1+c_i\cdot\frac{1}{a_{i-1}-b}}\begin{vmatrix}1+b\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i-b} & b & b & \cdots & b\\ 0 & a_1-b & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2-b & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n-b\end{vmatrix}_{n+1}$$

$$=\left(1+b\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i-b}\right)(a_1-b)(a_2-b)\cdots(a_n-b).$$

例 7 计算 $n(n\geqslant 2)$阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n\\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \cdots & 3n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & \cdots & n^2\end{vmatrix}.$$

解 当 $n=2$ 时，

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=4-6=-2.$$

当 $n>2$ 时，

$$D_n\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ n & n & n & \cdots & n\\ 2n & 2n & 2n & \cdots & 2n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & \cdots & n^2\end{vmatrix}=0.$$

故
$$D_n=\begin{cases}-2, & n=2,\\ 0, & n>2.\end{cases}$$

例 8 求证：

$$D_n=\begin{vmatrix}\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha\end{vmatrix}=\cos n\alpha.$$

证明 当 $n=1$ 时，$D_1=|\cos\alpha|=\cos\alpha$；

当 $n=2$ 时，二阶行列式

$$\begin{vmatrix} \cos a & 1 \\ 1 & 2\cos a \end{vmatrix} = 2\cos^2 a - 1 = \cos 2a.$$

假设 $k<n$ 时，有

$$D_k = \begin{vmatrix} \cos a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos a \end{vmatrix}_k = \cos ka,$$

则
$$D_n = \begin{vmatrix} \cos a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos a \end{vmatrix}_n.$$

按第 n 列展开，有

$$D_n = 1\cdot(-1)^{n+n-1} \begin{vmatrix} \cos a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_{n-1} +$$

$$2\cos a\cdot(-1)^{n+n}\cdot \begin{vmatrix} \cos a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos a \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=A+B.$$

将上式中的第一个行列式 A 按第 $n-1$ 行展开，得到

$$A=(-1)\cdot 1\cdot(-1)^{(n-1)}\cdot \begin{vmatrix} \cos a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos a \end{vmatrix}_{n-2} = -D_{n-2}.$$

又因为
$$B = 2\cos a\cdot D_{n-1},$$

所以
$$\begin{aligned} D_n &= 2\cos a\cdot D_{n-1} - D_{n-2} = 2\cos a\cdot\cos(n-1)a - \cos(n-2)a \\ &= 2\cos a\cdot\cos(n-1)a - \cos a\cdot\cos(n-1)a - \sin(n-1)a\cdot\sin a \end{aligned}$$

$$=\cos a\cdot\cos(n-1)a-\sin(n-1)a\cdot\sin a=\cos na,$$

于是
$$D_n=\cos na.$$

例 9 计算行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & b\\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d\end{vmatrix}_{2n},$$

其中除两条对角线以外的元素全为零.

解 按第 $2n$ 行进行展开

$$D_{2n}=c\cdot(-1)^{2n+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & & & & & b\\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & 0\end{vmatrix}_{2n-1}+d\cdot(-1)^{2n+2n}\cdot\begin{vmatrix} a & & & & & 0\\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ 0 & & & & & d\end{vmatrix}_{2n-1}.$$

再将上式中两个行列式按第 1 行展开，得到

$$D_{2n}=c\cdot b\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} a & & & & & b\\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d\end{vmatrix}_{2n-2}+d\cdot a\cdot\begin{vmatrix} a & & & & & b\\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d\end{vmatrix}_{2n-2},$$

于是得到递推公式

$$D_{2n}=(ad-bc)D_{2(n-1)}.$$

由于
$$D_2=\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc,$$

所以
$$D_{2n}=(ad-bc)^n.$$

例 10 设 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内可导，求证：至少存在一个点 $\xi\in(a, b)$，使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a)\\ f(b) & g(b) & h(b)\\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi)\end{vmatrix}=0.$$

证明 令
$$F(x)=\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a)\\ f(b) & g(b) & h(b)\\ f(x) & g(x) & h(x)\end{vmatrix},$$

根据行列式的定义，$F(x)$是一个关于 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$的运算式，显然，$F(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内可导且满足：

$$F(a)=\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(a) & g(a) & h(a) \end{vmatrix}=0,\ F(b)=\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}=0,$$

所以，$F(x)$满足罗尔定理，即至少存在一个点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix}=0.$$

例 11(07 年数学二)　函数

$$f(x)=\begin{vmatrix} x+1 & 32 & 54 & 108 \\ 0 & x-2 & 0 & 0 \\ 0 & 72 & x+3 & 4 \\ 0 & 98 & 5 & x+4 \end{vmatrix},$$

试确定 $f(x)$中 x^3 的系数为________，常数项为________.

解　解法一　将行列式按第 1 列展开，得

$$f(x)=(x+1)\begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ 72 & x+3 & 4 \\ 98 & 5 & x+4 \end{vmatrix}=(x+1)(x-2)\begin{vmatrix} x+3 & 4 \\ 5 & x+4 \end{vmatrix}$$

$$=(x^2-x-2)(x^2+7x-8)=x^4+6x^3-17x^2-6x+16,$$

所以，$f(x)$中 x^3 的系数为 6，常数项为 16.

解法二　在 $f(x)$的展开式里，x^3 只可能出现在$(x+1)(x-2)(x+3)(x+4)$这一项中，由根与系数的关系知，x^3 的系数为 $1+(-2)+3+4=6$. 又因为常数项等于 $f(0)$，而

$$f(0)=\begin{vmatrix} 1 & 32 & 54 & 108 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 72 & 3 & 4 \\ 0 & 98 & 5 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 72 & 3 & 4 \\ 98 & 5 & 4 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=16,$$

所以常数项为 16.

此类题目一般采用解法二计算.

例 12(89 年数学四)　行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ x & 0 & 0 & -x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{4\times(4-1)}{2}}x^4=x^4.$$