

新三S平面幾何學

許彥生譯

Plane Geomtry

(New Edition)

By

Schultze, Sevenoak, Stone

新三S平面幾何學

許彥生譯

Plane Geomtry

(New Edition)

By

Schultze, Sevenoak, Stone

開明書店印行

新三S平面幾何學

一九四八年三月初版

一九五〇年十月六版

國產紙本 每冊人民幣六一〇〇元

原 著 者

Schultze
Sevenoak
Stone

翻 譯 者

許 彥 生

發 行 者

北 京 八 面 槽
開 明 書 店
代 表 人 范 洗 人

印 刷 者

開 明 書 店

有 著 作 權 ■ 不 准 翻 印

新 版 原 序

在這第三次的增訂版中,凡是原版中的特點,仍舊保留.本書每版的主要目的,都在引導讀者有系統地學習初步的幾何學.所以在材料的選擇和安排方面,無不以此旨為依歸.編者但願教授幾何學的教師們會覺得這個理想在本書中已經有幾分實現.

在這一個增訂版中,值得注意的有下列幾點:

1. 在‘導言’中對於正式幾何學作更透澈而周密的擴充,增加作圖題和分度器練習,同時並添加大量的計算題.事實上‘導言’一章可視作一課頗為完整的非正式幾何學.

2. 作圖法在幾何學中所佔極重要的地位,曾予以充分發揮,對於作圖題中圖形的完整,以及對於所求部分應用虛線來表示,都特加注意.

3. 對於軌跡曾予以充分的討論,並努力使其開端儘可能的簡單.

4. 某些命題曾給以多種證法,使教師學生可不受編者偏好的影響.

5. 本書廣搜所有為教師所必需的材料,以免另找補充教材之煩

6. 爲使習題所涉及的範圍不限於 30° , 45° , 60° 諸角起見, 本書對於三角函數曾加以詳細的解釋, 在第三編中討論過了三角函數以後, 就到處有它的應用.

7. 書中常有牽涉到三度空間之處, 因此對於平面的觀念就予以必需的修正.

8. 凡遇新定理必儘可能插入計算題和作圖題以爲例證, 藉以闡明其確切意義.

9. 附錄裏搜集了許多有趣的材料, 以供讀者想要在平面幾何學的普通課程以外更加精研之用.

增訂版的編者竭忱向男童中學 (Boy's High School) 的第一屆算學科主任故愛德華派孫 (Edward B. Parsons) 先生致敬, 近代幾何學教授方法之進步, 多得歸功於先生的才能.

史 東

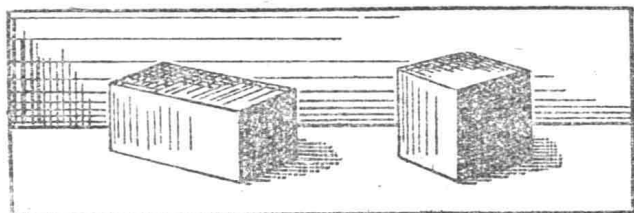
目 錄

導 言	1
第一編 直線和直線形	25
第二編 圓 作圖 軌跡	119
第三編 比例 相似多邊形 三角法	181
第四編 多邊形的面積	245
第五編 正多邊形 圓的度量	275
附 錄 極大和極小 極限 十邊形 π 的計算	301
中西名詞對照表	343

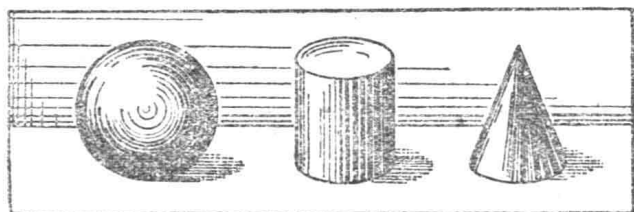
新三S平面幾何學

導 言

自然界的物體(實物)都佔有空間。若是物體包圍着平的表面,例如箱子,則此等物體就有三個向度,那就是諸位所熟知的長、闊、厚(或高)。



若是物體包圍着曲的表面,如球體,則此等物體亦佔有三個向度的空間,不過牠們的向度是用半徑來表明的。



平面幾何學僅討論畫在平面上的圖形。此種圖形若由直線構成,就只能有兩個向度,若由曲線構成,則其向度是用半徑來表明的。

幾何學上所討論的事實和圖形,大都是日常生活中所常見的。也許諸位現在就能回答下列問題。

- | | |
|-------------------|--------------|
| 1. 何謂角? | 2. 何謂平行線? |
| 3. 何謂三角形? 正方形? | 4. 直線會變更方向麼? |
| 5. 直線能延長到多少遠? | 6. 二直線能相交幾次? |
| 7. 從一點到另一點能作幾條直線? | |

諸位對於上列問題 1, 2, 3 之答案,可能是非科學的。因為科學而無精確的定義,就不能作合乎邏輯的發展,故給上述諸圖形及將要討論之其他圖形以嚴密的科學定義,頗屬重要。

問題 4, 5, 6, 7 的答案之敘述,必須十分正確,如是則此種答案即可用以作進一步探究的基礎。

故讀者在入手之初,必須學習若干正確的定義,若干敘述正確的假設,並練習作正確的圖形。

敘述正確和證明嚴密應為學習幾何學之經常目標。敘述散漫和推理鬆懈,為任何科學所不能容許,尤以幾何學為甚。

I. 直線的定義

1. 線只有一個向度——長。

例如二省之間的“省界線”,祇有長而無闊。

2. 點只有位置而無向度。

例如海上船的位置為由經度和緯度所說明的點。線上的點無長亦無闊。

3. 直線是線上的任何一點都不變更其方向的線。

由此定義,易於推知:

- (a) 直線是兩點間的最短距離。
- (b) 二直線僅能相交於一點。
- (c) 二點決定一直線;即二點之間僅能作一直線。

4. 折線由兩條或兩條以上之直線所構成。

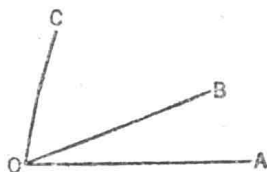
5. 曲線上之每一點均改變其方向。

平面幾何學上所用的曲線,僅為圓或圓弧。

II. 角的定義

6. 角由相交於一點的二直線所構成，此相交點稱為頂點。

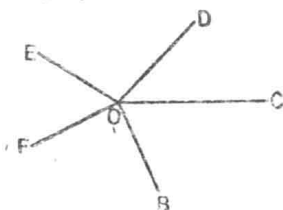
學習如何命名一角，頗為重要。圖中三角具有同一的頂點 O ，其邊則各各不同。故角即用其邊以命名。例如其中最小的角稱為 $\angle AOB$ ，最大的角稱為 $\angle AOC$ ，另一角稱為 $\angle BOC$ 。注意：頂點 O 是中間一字母。圖中又表出最大角係由其他二角所構成，等於該二角之和，即 $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$ 。故 $\angle AOC - \angle BOC = \angle AOB$ 。因此知角可相加並相減。



習題 1. $\angle BOD$ 等於什麼角的和？

習題 2. $\angle BOE$ 等於什麼角的和？

習題 3. $\angle BOE - \angle EOC$ 等於什麼角？



環繞一點的諸角之和稱為一周角。一周角等於 360° ，或 360° 。

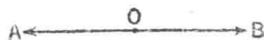
7. 平角是二邊同在一直線上而自頂點向相反方向延長所成的角；如 $\angle AOB$ 。

一平角等於 180° 。

所有平角都相等。

時鐘的指針在幾點鐘成一平角？

平角是周角的幾分之幾？



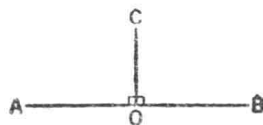
8. 直角為平角之半；例如 $\angle COB$ 和 $\angle COA$ 是直角。

一直角有幾度？

所有直角都相等。

時鐘的指針在幾點鐘成一直角？

直角是周角的幾分之幾？



9. 垂線是構成直角的直線。如 $CO \perp AB$ 和 $AB \perp CO$ 。

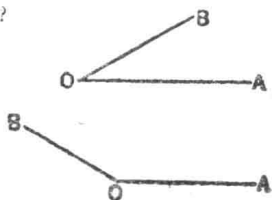
直角的二邊稱為互相垂直。

習題 1. 若 $\angle AOC = \angle COB$, 爲何 $CO \perp AB$?

10. 銳角是較直角爲小的角。

11. 鈍角是較直角爲大, 較平角爲小的角。

12. 除掉直角和平角, 其餘的角都稱爲斜角。例如銳角和鈍角都是斜角。



III. 涉及兩角的定義

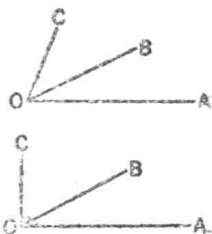
13. 兩角之間有一公共邊, 且有同一頂點的, 稱爲鄰角。

$\angle AOB$ 和 $\angle BOC$ 是鄰角。

習題 1. $\angle AOB + \angle BOC$ 等於什麼角?

習題 2. $\angle AOC - \angle BOC$ 等於什麼角?

習題 3. $\angle AOC - \angle AOB$ 等於什麼角?



14. 兩角的和等於一直角, 則兩角互爲餘角, 或稱其中之一角爲他角的餘角。

$\angle AOB$ 和 $\angle BOC$ 互爲餘角。

$\angle AOB$ 是 $\angle BOC$ 的餘角, 而 $\angle BOC$ 是 $\angle AOB$ 的餘角。

[注意] 互爲餘角的一角等於自直角減去另一角。若互爲餘角的二角相等, 則每角有幾度?

15. 兩角的和等於一平角, 則兩角互爲補角, 或稱其中之一角爲他角的補角。



$\angle AOB$ 和 $\angle BOC$ 互爲補角。

$\angle AOB$ 是 $\angle BOC$ 的補角, $\angle BOC$ 是 $\angle AOB$ 的補角。

若互爲補角的二角相等, 則每角有幾度?

二直角互爲補角否?

一般言之, 若二角互爲補角, 則一爲銳角, 另一爲鈍角。

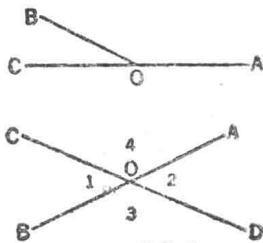
從補角的定義, 易於導出下列重要的陳述:

補角的半量是餘角。(平角的半量是直角。)

餘角的兩倍是補角。(直角的兩倍是平角。)

16. 對頂角是相交二直線所成的相對兩角。

直線 AB 和 CD 相交於點 O , 成四角。



習題 1. 說出四對“鄰角。”

習題 2. 說出兩對“對頂角。”

習題 3. 說出四對“補角。”

習題 4. 說出 $\angle AOC$, $\angle DOA$, $\angle BOC$, $\angle BOD$ 諸角的補角各二個。

IV. 角的度量

17. 角量的單位是度, 一度等於一直角的 $\frac{1}{90}$ 。

一度分成 60 等分, 叫做分; 即 $1^\circ = 60'$ 。

一分分成 60 等分, 叫做秒; 即 $1' = 60''$ 。

18. 角量表。

$$60'' = 1'$$

$$60' = 1^\circ$$

$$90^\circ = 1 \text{ 直角。}$$

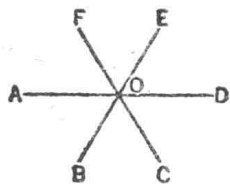
$$180^\circ = 1 \text{ 平角。}$$

$$360^\circ = 1 \text{ 周角。}$$

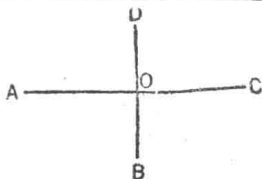
習題 1. 加:
$$\begin{array}{r} 23^\circ 47' \\ 37^\circ 34' \\ \hline \end{array}$$

習題 2. 減:
$$\begin{array}{r} 40^\circ 23' \\ 17^\circ 35' \\ \hline \end{array}$$

習題 3. 若一點周圍有六角相等, 則每角有幾度? $\angle FOC$ 是一平角否? $\angle AOD$ 是一平角否?



習題 4. 若一點周圍有四角相等, 則每角有幾度? 每角叫做什麼角? $\angle AOC$ 是否一直線? DOB 呢? AC 和 BD 互相垂直否? 為何?

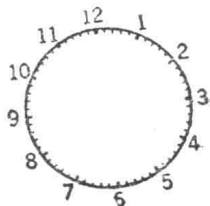


習題 5. 從 $45^\circ 45'$ 之角減去 $30^\circ 30'$ 之角; 從直角減去 $30^\circ 30'$ 之角; 從平角減去 $30^\circ 30'$ 之角.

習題 6. 加直角之半於平角的三分之二.

習題 7. 時鐘面上標明各小時之間的間隔有幾度? 標明各分之間的間隔有幾度?

習題 8. 時鐘的二指針在三點鐘, 六點鐘, 九點鐘, 十點鐘, 六點半鐘, 五點半鐘, 各成什麼角?



習題 9. 用代數符號寫出:

- (a) x° 的餘角. (b) x° 的補角.
(c) x° 的餘角加 40° .

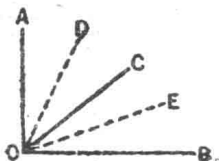
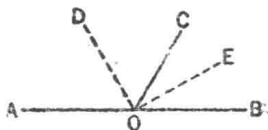
習題 10. 若 $\angle AOC = 120^\circ$, $\angle COB = 60^\circ$, 則由此二角的平分線所成的 $\angle DOE$ 有幾度?

習題 11. 若 AOB 是一直線, $\angle AOC = x^\circ$, 則由 $\angle AOC$ 和 $\angle COB$ 的平分線所成的 $\angle DOE$ 是幾度. (提示: 先算 $\angle COB$.)

習題 12. 互為補角的二角之平分線所成的角是幾度?

習題 13. 若 $\angle AOC = 50^\circ$, $\angle COB = 40^\circ$, 則二角的平分線 DO 和 OE 所成的角是幾度?

習題 14. 互為餘角的二角之平分線所成的角是幾度?



餘角和補角的計算題

1. 求 45° ; $47^\circ 11'$; $51^\circ 41' 27''$; x° 諸角的餘角.
2. 求 75° ; $77^\circ 9'$; $121^\circ 51' 24''$; x° 諸角的補角.
3. 某角的餘角較某角大 20° ; 求某角的度數.
4. 某角的補角較某角大 100° ; 求某角的度數.
5. 某角的餘角較某角的一半大 30° ; 求某角的度數.
6. 某角的補角較某角的一半大 120° ; 求某角的度數.
7. 何種角等於牠的補角?
8. 一角的補角較其餘角大幾度?
9. 求互為餘角的二角, 使一角較另一角大四倍.
10. $89^\circ 59' 60''$ 的角是何種角?

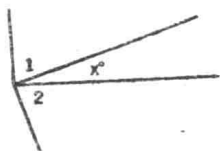
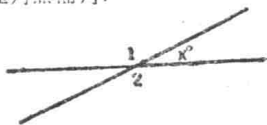
11. 餘角是 47° ; 80° 的角有幾度?
12. 求 150° ; 40° 等角的補角之餘角.
13. 求 75° ; 19° ; 86° ; 78° 諸角的餘角之補角.
14. 一角的餘角是 54° ; 其補角為幾度?
15. 一角的補角是 130° ; 其餘角為幾度?
16. 求一角, 其餘角對補角的比是 $4:13$.
17. 某角的餘角和補角之和較其餘角的四倍小 25° , 求某角.
18. 某角的餘角和補角之和是 120° , 則某角有幾度?
19. 某角餘角和補角之比是 $2:7$, 則某角有幾度?
20. 某角的補角較其餘角的五倍大 10° , 求某角.
21. 某角的補角為其餘角之 7 倍, 求某角.
22. 若一角增大, 則其餘角和補角之變化如何? 若一角減小, 則其餘角和補角之變化又如何?
23. 何種角無餘角? 此等角可有一補角否? 何種角無補角?

19. 同角或等角的補角相等.

因為都等於 $180^\circ - x^\circ$.

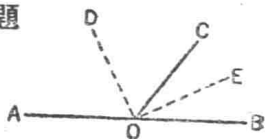
20. 同角或等角的餘角相等.

因為都等於 $90^\circ - x^\circ$.

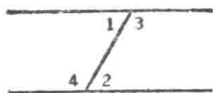


補角和餘角的習題

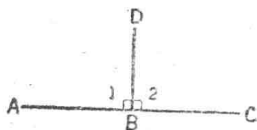
1. 設 DO 平分 $\angle AOC$, EO 平分 $\angle COB$, 求證 $\angle DOE = 90^\circ$. (提示: $\angle AOC + \angle COB = 180^\circ$.)



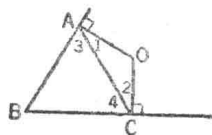
2. 設 $\angle 1 = \angle 2$, 求證 $\angle 3 = \angle 4$.
3. 在同圖中, 若 $\angle 3 = \angle 4$, 求證 $\angle 1 = \angle 2$.
4. 設 $\angle 1 = \angle 2$, 求證 $\angle 3 = \angle 4$.
5. 在同圖中, 設 $\angle 1 = \angle 2$, 求證:
 - (a) $\angle 1$ 和 $\angle 4$ 互為補角;
 - (b) $\angle 3$ 和 $\angle 2$ 互為補角.
6. 在同圖中, 設 $\angle 1$ 為 $\angle 4$ 之補角, 求證:
 - (a) $\angle 1 = \angle 2$;
 - (b) $\angle 3 = \angle 4$.



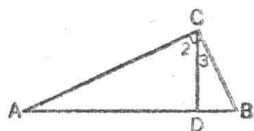
7. 設 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 爲直角, 求證 ABC 爲一直線。



8. 設 $OA \perp AB$, $OC \perp BC$, $\angle 3 = \angle 4$, 求證 $\angle 1 = \angle 2$ 。

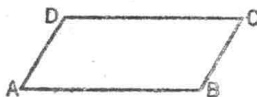


9. 設 $AC \perp BC$, $\angle A$ 爲 $\angle 2$ 之餘角, 求證 $\angle A = \angle 3$ 。

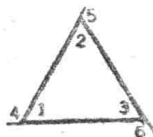


10. 在同圖中, 設 $\angle B$ 和 $\angle 3$ 互爲餘角, 求證 $\angle 2 = \angle B$ 。

11. 設 $\angle A$ 爲 $\angle D$ 之補角, 亦爲 $\angle B$ 之補角, 求證 $\angle D = \angle B$ 。



12. 設三角形之內角均相等, 何以其外角亦均相等?



V. 量角器的練習

1. 作相交於一點的二直線, 量所成之角。
2. 作一銳角, 並度量之。
3. 延長上題中銳角之一邊, 量所成之鈍角。
4. 求題二中銳角的度數及題三中鈍角的度數之和。
5. 作相交二直線。量所成之四角。哪幾角相等?
6. 作長約二吋的直線, 於每端作一 40° 的角。量相交於原線上方的二直線之長。此二線應相等。
7. 作一 50° 之角, 於每邊量取一時, 然後聯結此二端點, 量所成三角形之另二角。此二角應相等。
8. 作一 60° 之角, 於每邊量取一時, 然後聯結此二端點。所成三角形的三邊應相等。
9. 作三角形, 使底邊長一時, 底邊兩端之角分別等於 40° 及 50° 。量第三角, 此角應等於 90° 。

10. 作三角形,使二邊各長一時及一時半,並使此二邊所夾之角等於 45° . 量其他二角,並求其和. 其和為 135° 否?

11. 作任意三角形. 然後用直尺及量角器照畫一三角形,僅使其底邊及二底角與原三角形相等. 量兩三角形之第三角及他二邊而比較之,結果如何?

12. 作任意三角形. 然後用直尺及量角器照畫一三角形,僅使其二邊及夾角與原三角形相等. 量兩三角形之第三邊及他二角而比較之. 結果如何?

13. 作任意四邊形. 量其四角並求其和. 其和為 360° 否?

14. 用量角器和直尺作一正方形.

15. 用量角器和直尺作一長兩倍於其闊的矩形. 則必須作成幾個直角?

16. 用圓規作一圓. 自圓心作二半徑,使所夾之角等於 60° . 在圓心能作幾個這樣的角?

17. 作一圓. 自圓心作二直線,使成一直角. 在圓心能作幾個直角?

18. 不用量角器作一小角,並估計其度數. 然後用量角器較正這估計.

19. 不用量角器,作一 30° 的角,儘量使其正確. 以量角器較正之. 如有差別,試量得其值.

VI. 作圖

平面幾何學中,作圖祇用直尺和圓規二種工具. 因此祇能作兩種線,即直線和圓或圓的一部份.

所有作圖的方法,都須證明. 但下列諸作圖題,均極基本,此處暫假定其為真確.

21. 圓是平面上的封閉曲線,其上各點距圓內一定點等遠. 此定點稱曰圓心.

22. 半徑是從圓心到圓上任一點的直線.

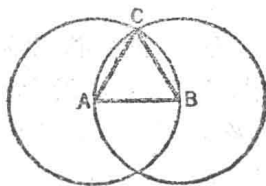
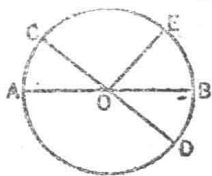
一圓的所有半徑都相等.

23. 直徑是通過圓心而兩端都在圓上的直線.

一圓的所有直徑都相等. 何故?

24. 弧是圓的一部分.

若以 A 及 B 為圓心, AB 為半徑,作二圓. 何以 $\triangle ABC$ 為等邊?



習題 1. 已設一邊，作等邊三角形。

[注意] 此後將證明等邊三角形之各角都等於 60° 。

習題 2. 作 60° 的角。

習題 3. 在已知線 AB 上截取一段，使等於較短的已設直線 CD 。

習題 4. 作直線，使等於已設直線 AB 的長之三倍。

習題 5. 作直線，使等於二不等的已設直線之和。

習題 6. 作一線，使等於二不等的已設直線之差。

習題 7. 已設長為 a 及 b 的二直線，作直線使等於 (a) $2a + 3b$, (b) $3a - 2b$,
(c) $a + 2b - 3a$.

習題 8. 通過 A ，延長已設圓的半徑 OA ，使延長部份等於 OA 。

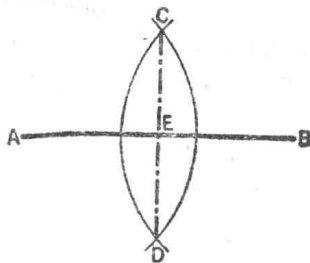
習題 9. 在已設圓的直徑上，作等邊三角形。

習題 10. 作已設圓的二半徑，使成一 60° 的角。

習題 11. 已設直線 AB ；以 A, B 為圓心，用較大於 AB 的線段為半徑，作二弧相交於 C ，聯接 AC 及 BC 。

VII. 初步作圖

I. 作圖題. 平分一直線.



假設：定長直線 AB 。

求：平分 AB 。

作 法

取 A 做中心，以大於 $\frac{1}{2}AB$ 的任意半徑作適度長的弧；又以相同半徑，取 B 做中心作一弧，使二弧相交於兩點，命此二點為 C 及 D ；作 CD 。則 CD 平分 AB 。

25. 系. 一直線可以平分。

[注意] 圖中所示的平分法極為重要，因為它不僅作出 AB 的平分線 CD ， CD 且是 AB 的中垂線；即 CD 平分 AB 而成直角。

習題 1. 以已設直線為直徑，畫一圓。

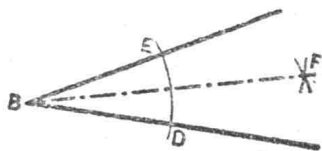
習題 2. 四等分一已設直線。

習題 3. 平分一已設三角形的三邊。

習題 4. 作已設三角形各邊的中垂線。

習題 5. 作聯接已設三角形二邊中點的直線。

II. 作圖題. 平分一已設角.



假設: $\angle B$.

求: 平分 $\angle B$.

作 法

取 B 做中心，以任意長的半徑作弧，交 $\angle B$ 的二邊於 D 及 E 。再取 D 做中心，以大於 $\frac{1}{2}DE$ 的任何半徑作適當長的弧；又以相同半徑，取 E 做中心作一弧；使二弧相交於一點，命此一點為 F ，作 BF 。則 BF 平分 $\angle B$ 。

26. 系. 已設角可以平分.

習題 1. 用上法平分一已設平角。

習題 2. 作 90° , 45° , $22^\circ 30'$ 諸角。

習題 3. 作 60° , 30° , 15° 諸角。

習題 4. 平分已設三角形的三角。

習題 5. 四等分一已設角。

習題 6. 作已設圓的二半徑，使所夾的角為 30° ；又使為 45° 。

習題 7. 作已設圓的二直徑，使所夾的角為 45° ；又使為 30° 。

習題 8. 作二對頂角，並平分之。

習題 9. 四等分一已設平角。