广播师大教材

高等代数

新疆广播师范大学

一九七八·八

说　明

本书选自吉林师范大学编的《几何与代数》前三章，供广播师范大学数学专修科作讲义用。

为了照顾学员知识水平的不同，每章习题都分为必作题和选作题。不带*号的为必作题，带*号的为选作题。

目　　录

第一章　行列式论

§1. 数环与数体

对于任意给定的多项式和方程来说，它是被它的系数和次数所决定的．而多项式与方程的系数取在那个范围，对于多项式和方程的讨论来说，有很大关系，比方说，对多项式

$$x^5+x^4-4x-4$$

作因子分解．

在整数或有理数的范围内，它的结果是：

$$(x+1)(x^2-2)(x^2+2).$$

在实数范围内它的结果是：

$$(x+1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^2+2).$$

在复数范围内它的结果是：

$$(x+1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i).$$

因此可见，在不同的范围内讨论多项式，所得的结果可能不同，所以系数取在那个范围，对于多项式理论的探讨是有很大关系的．在中学代数里，多项式的系数在初中阶段是取在整数和有理数范围里；而在高中一年级多项式的系数则是取在实数范围里；最后当数的知识扩张到复数以后，那时多项式的系数则是取在复数范围之内．不过在当时没有把这

个问题特殊明确出来．为了明确多项式和方程的系数范围，我们先来介绍数环和数体的概念．

为了以后叙述问题方便起见，我们把若干个数的全体叫做数集，并且把在中学代数里所曾遇到过的所有整数的全体叫做整数集；所有有理数的全体叫做有理数集；所有实数的全体叫做实数集；所有复数的全体叫做复数集；并且分别用Z, R, D, K来表示它们．下面我们就来研究一下，什么样的数集可以取为多项式和方程的系数范围，来研究多项式．

为此，我们先来考查一下，在讨论多项式时，Z, R, D, K这四个数集可以作为多项式的系数范围，到底是由于它们具备那些特性？

先来看，由1，2，3，4，5五个数所组成的数集．这个数集不能作为多项式的系数范围来讨论多项式．这是因为，对于系数是取自这个数集的某两个多项式来说，比如

$$x+3 \qquad 3x+4$$

的系数属于给定的数集，但是，当把它们加一加，减一减，乘一乘，这时所得的多项式其系数就都已不在上面给定的数集里边了．由此可见，若以这个数集作为讨论多项式的系数范围，甚至连最基本的加、减、乘三个运算都不能作，当然更谈不到对多项式作进一步的讨论．

现在，我们再反回来观察一下，Z, R, D, K这四个数集．

首先看整数集Z．我们知道，任意两整数的和，差，积，自然是一个整数，其结果仍然在整数集里边．至于R, D, K这三个数集，它们也具有上面这个特征．其和，差，积仍然

属于原来的数集．事实上，正由于这四个数集具有这个共同特征，才使得它们可以作为多项式的系数范围．为了把具有上述性质的数集与其他数集区分开，我们把这样的数集命名为数环．

定义1．令S是一个数集。当下列条件被满足时，就把S叫做一个数环：

（1）s至少含有一个数；

（2）若a，b属于S，那末$a+b$，$a-b$，和$a\cdot b$也属于S．

Z，R，D，K这四个数集都是数环．除此之外，还有很多数环．我们看几个例子．

例1．数零组成一个数环．

例2．全体偶数组成一个数环．

事实上，任意二偶数之和，差，积仍为偶数．

例3．令a是一个固定整数，则一切形如na的数，组成一个数环，此处n为任意整数．

事实上，对于任意形如na的二数n_1a、n_2a，

由于 $n_1a\pm n_2a=(n_1\pm n_2)a$，$n_1a\cdot n_2a=(n_1n_2a)a$，而$n_1\pm n_2$、$n_1n_2a$仍为整数．

所以由定义，此数集是一个数环．

例4．P是一切形如$a+b\sqrt{2}$的数，组成一个数环．此处a,b是任意有理数．

事实上，令$a_1+b_1\sqrt{2}$，$a_2+b_2\sqrt{2}$是此数集中任意二数，由于

$(a_1+b_1\sqrt{2})\pm(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1\pm a_2)$

$$+(b_1 \pm b_2)\sqrt{2},$$

$$(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1a_2+2b_1b_2)$$
$$+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2},$$

所以此数集是数环.

例5. 全体奇数不是一个数环.

事实上,二奇数之和已不是奇数,所以此数集不是数环.

数环的例子是不胜枚举的，学员们可以自己再去找一些例子.

在数环当中，还有一种比较特殊的数环，这种数环就是数体.

定义2. 令 P 是一个数环. 当下列条件被满足时,就把 P 叫做一个数体(域).

1) P 至少含有一个不等于零的数;

2) 对于 P 中的任意二数，a,b 来说当 $b\neq 0$，$\frac{a}{b}$ 也属于 P.

容易看出，R，D，K 这三个数环是数体.

例6. 证明例 4 的数环 P 是数体.

事实上，设 $a_1+b_1\sqrt{2}$，$a_2+b_2\sqrt{2}\neq 0$ 是此数环中任意两个数. 由于 $a_2+b_2\sqrt{2}\neq 0$，故有

$$a_2-b_2\sqrt{2}\neq 0.$$

反之，若 $a_2-b_2\sqrt{2}=0$，则由于 $\sqrt{2}$ 是无理数，必须 $a_2=0$，$b_2=0$，因而 $a_2+b_2\sqrt{2}$ 也等于零. 这与假设矛盾. 因此

$$\frac{a_1+b_1\sqrt{2}}{a_2+b_2\sqrt{2}}=\frac{(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}{(a_2+b_2\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}$$

$$=\frac{a_1a_2-2b_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}\sqrt{2}.$$

由于 a_1, a_2, b_1, b_2 都是有理数，所以

$$\frac{a_1a_2-2b_1b_2}{a_2^2-2b_2^2},\ \frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}$$

也都是有理数．则$\frac{a_1+b_1\sqrt{2}}{a_2+b_2\sqrt{2}}$属于 P，故 P 是数体．

例7． 一切形如 $a+bi$ 的数组成一个数体，此处 a, b 是任意有理数（证法与例 6 类似）．

下面我们证明数体的一个重要性质．

定理．任何数体都包含有理数体．

证明： 设 P 是任意一个数体．因为 P 至少含一个不等于零的数 a．因此，由数体定义的条件 2）知$\frac{a}{a}=1$ 也属于P．以 1 与自己重复相加则得出全体正整数，因而全体正整数都属于 P．另一方面，$a-a=0$ 也属于 P(由数体定义的前提)，从而 0 与任意正整数之差也含在 P 里边．因此 P 含全体负整数．从而，P 含全体整数．于是P也包含任意二整数之商（分母不为零），因而 P 包含全体有理数，定理得到证明．

以后我们将以数体作为我们讨论问题的范围，所以如此，是由于在数体内，加、减、乘、除这四种运算都可以施

行，也就是说，对于数体中任意二数之和、差、积、商（分母不为 0）仍然属于此数体。

而在我们的讨论当中，只能遇到这四种运算，所以数体作为我们讨论问题的范围，恰好够用。

另一方面，由于在一般数体所讨论的结果，对于任一具体的数体都能适用，所以就不必将每一个结论都对各个具体数体进行讨论。这样一来，既简化了讨论的程序又使所得的结果能有广泛的应用。

习　题　一

1．试判定下列数集是否是数环。

(1)全体正整数；

(2)全体真分数；

*(3)一切形如$\frac{\beta}{2^k}$的数所组成的数集（β为奇数，k为一切非负整数）．

2．试证任意数环都含有数 0．

3．试证一切形如$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$的数所组的数集构成数环（$a,b,c$为任意有理数）．

*4．设P_1和P_2是两个数体，P是一切既属于P_1又属于P_2的数所组成的数集．试证P是一个数体．

5．有没有只含两个数的数环？假如有，举出实例；假如没有，严格证明之．

§2.二、三阶行列式

在中学我们曾经讨论了二元和三元一次联立方程组，知道了求解的方法．但通常会遇到未知量的个数和方程的个数多于三个的方程组．为了掌握普遍的理论，在第一、二两章里我们研究带有多个未知量的线性方程组，即多元一次联立方程组．为了讨论方便起见，首先规定用 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 表示未知量．用 a_{ij} 表示第 i 个方程第 j 个未知量的系数．用 b_i 表示第 i 个方程的常数项．我们所讨论的方程，其系数属于某一个固定的数体 P，即 a_{ij} 及 b_i 都是数体 P 中的数．于是线性方程组的一般形式可以写成：

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{aligned} \tag{1}$$

如果在数体 P 内有一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，用 k_i 代替对应的未知量 x_i 以后，方程组（1）都成为等式时，则这组数 $k_i(i=1,2,\cdots,n$ 就叫做方程组（1）的一组解．

如同在中学看到的情形一样，线性方程组可能只有一解，可能有无限多组解，也可能没有解．例如：方程组

$$x_1 + 2x_2 = 7,$$
$$x_1 + x_2 = 4,$$

就有一组解：$x_1 = 1; x_2 = 3$，而且这组解是它的唯一解．而方程组

$$3x_1 - x_2 = 1,$$
$$6x_1 - 2x_2 = 2,$$

有无穷多组解：$x_1 = k$，$x_2 = 3k-1$，不论 k 为任何数都是方程组的解．而方程组

$$x_1 + 5x_2 = 1,$$
$$x_1 + 5x_2 = 7,$$

就没有解．任何一组数都不能使这个方程成为等式．这样的方程组叫做矛盾方程组．

讨论线性方程组的问题，主要是判断方程组是否有解？有若干个解？如何求解？关于它的普遍理论要在第二章中讨论．在本章只讨论比较特殊的线性方程组，即方程的个数与未知量的个数相等，而且仅有一组解的情形．

这种情形的讨论我们要以行列式为工具，行列式是一个很重要的概念，它在数学及其它科学部门中都有着广泛的应用，其功用并不仅限于解线性方程组．比如，在数学分析上，连分数理论上，几何学上，特别是解析几何上都有广泛的应用．

行列式的概念，起源于解含有二个和三个未知量的线性方程组．

我们考虑含有两个未知量的线性方程组：

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{aligned} \qquad (2)$$

我们假定组(2)有解．为了求这个方程组的解，我们用 a_{22} 乘第一个方程，用 $-a_{21}$ 乘第二个方程，然后相加，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2. \qquad (3_1)$$

类似的，用$-a_{21}$和a_{11}分别乘第一个和第二个方程可得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}. \qquad (3_2)$$

我们现在来研究一下(3_1)与(3_2)这两个方程．在这两个方程里x_1与x_2的系数都是$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，它只含有方程组(2)的未知量系数．如果把(2)的系数排成下表

$$\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \qquad (4)$$

那么就可以看出来(3_1)与(3_2)这两个方程中x_1与x_2的系数，可经表(4)的数按下边的规则表示出来，它等于左上角与右下角这两个数的乘积减去位于右上角与左下角的两个数的乘积．我们把代数和$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$叫做二阶行列式，并用下面符号表示：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

乘积$a_{11}a_{22}$及$a_{12}a_{21}$称为二阶行列式的项．而$a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$称为二阶行列式的元素．

一般地，对于数体P中任意四个数：$a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$所组成的代数和$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$叫做元素在数体$P$上的二阶行列式，并且用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \qquad (4)$$

来表示．

这里的$a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$并不一定是二元一次方程组中未知量的系数．

我们约定在一个行列式里，把横排叫做行，纵排叫做列.

现在再来考查一下(3_1)与(3_2)两式的常数项．比较这两个常数项与未知量的系数，我们看到把未知量系数中的a_{11}，a_{21}依次换成方程组（2）的常数项b_1与b_2就得到(3_1)的常数项；把未知量系数中的a_{12}与a_{22}依次换成常数项b_1与b_2就得到(3_2)的常数项．于是用二阶行列式的记法，这两个常数项可写成：

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

我们称$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$为组（2）的系数行列式.

当组（2）的系数行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$时、则有

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \qquad (5)$$

将组（5）代入方程组（2）后，可以验证组（5）是组（2）的一组解．而且组（5）是组（2）的唯一解.

事实上，令x_1'与x_2'是方程组的一组解．代入组（2）后得到两个等式：

$$a_{11}x_1' + a_{12}x_2' = b_1,$$

$$a_{21}x_1' + a_{22}x_2' = b_2.$$

经过与消去 x_1 或 x_2 的相同步骤，即可得到：

$$x_1' = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \quad x_2' = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

这就是说，组(5)是组(2)的唯一解.

由于组(2)是任意一个二元线性方程组，所以对于任意一个含有两个二元一次方程的方程组，当它的系数行列式不等于零时，都可用(5)式求出解来.

例1. 解方程组

$$2x_1 + x_2 = 7,$$
$$x_1 - 3x_2 = -2,$$

这个方程组的系数行列式为

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7.$$

其值不为零，故可应用公式(5)求解，分子各数为：

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -19, \quad \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -11.$$

于是得到方程组的解为

$$x_1 = \frac{19}{7}; \quad x_2 = \frac{11}{7}.$$

现在我们来看一个含有三个未知量三个方程的线性方程

组

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \qquad (6)$$
$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.$$

此线性方程组的系数可排成下表：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \qquad (7)$$

与解方程组(2)同样我们假定方程组(6)有解，为了求方程组(6)的解，我们分别用 $a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$，$a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}$，$a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$乘第一、第二、第三个方程，然后相加。经过计算，得出 x_2 与 x_3 的系数等于零，把 x_2 与 x_3 这两个未知量同时消去。我们得出方程：

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+$$
$$+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}. \qquad (8)$$

在(8)式中，x_1的系数是$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$.

我们把这个代数和叫做一个三阶行列式，并用下面符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示.

一般地，我们把数体 P 上的元素 a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33} 所构成的代数和：

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

叫做元素在数体 P 上的三阶行列式，并且用记号

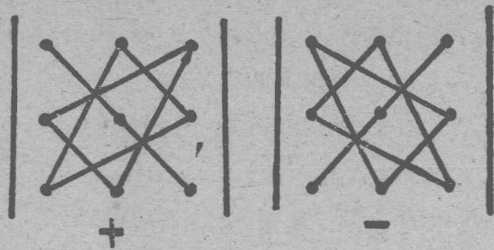
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (10)$$

来表示。

这里的 a_{ij} 并不一定必须是方程组的系数．与二阶行列式类似，我们把(10)中的横排叫做行，纵排叫做列．a_{11}, a_{12}, …, a_{33} 等叫做三阶行列式的元素．

从形式上看，三阶行列式是很繁杂的，但是通过表(7)上的元素，再利用所谓对角线规则来表述它时，将变得很简单．为此，先介绍两个术语．

在行列式的记号中，从左上角到右下角的对角线称为**第一对角线**（或称为主对角线）．从右上角到左下角的对角线叫做**第二对角线**．在表示式(9)中，有三项符号是正的．其中的一项是位在主对角线上三个元素的乘积；其它两项中的每一项都是位在主对角线的一条平行线上的两个元素与对角上元素的乘积．利用第二对角线可以类似的得出(9)式中有负号的三项的构成规律．这样我们就得到了计算三阶行列式的一个方法．这个方法通常被叫做对角线规则．我们把计算规则用下面两个图来表示：



左图指出计算三阶行列式的正项的规则，右图指出计算负项的规则。

例2.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot5+1\cdot1\cdot2+2\cdot(-4)\cdot3-2\cdot3\cdot2- -1\cdot(-4)\cdot5-2\cdot1\cdot3=30+2-24-12+20-6=10.$$

例3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot3\cdot0+0\cdot2\cdot1+(-5)(-2)(-2)- -(-5)\cdot3\cdot1-0\cdot(-2)\cdot0-1\cdot2\cdot(-2) =-20+15+4=-1.$$

例4.

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot5+(-4)\cdot3\cdot2+1\cdot1\cdot2-2\cdot3\cdot2-2\cdot3\cdot1 -1\cdot(-4)\cdot5=30-24+2-12-6+20= =-10+20=10.$$

现在我们再来看(8)式，它的右端刚好就是把左端 x_1 的系数中的 a_{11}, a_{21}, a_{31} 分别换成(6)的常数项 b_1，b_2, b_3，