海文考研

万学·海文 全国硕士研究生入学考试用书

最新版

2013

全国硕士研究生入学统一考试

高等数学辅导讲义

赵达夫 主编

紧扣《考试大纲》的要求及动向
紧密结合高数特点和学生的需求
帮助考生迅速掌握考试内容
在最短的时间内提高应试技能

海文考研
内部教案
公开出版

中国书籍出版社
China Book Press

海文考研
万学·海文

高等数学辅导讲义

赵达夫　主编

中国书籍出版社
China Book Press

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导讲义 / 赵达夫主编. — 北京：中国书籍出版社, 2012.6

ISBN 978-7-5068-2847-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①赵… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第101299号

责任编辑 / 宋　然 任燕萍

责任印制 / 孙马飞 张智勇

封面设计 / 王晓毛

出版发行 / 中国书籍出版社

地址：北京市丰台区三路居路97号 (邮编：100073)

电话：(010)52257143(总编室) (010)52257153(发行部)

电子邮箱：chinabp@vip.sina.com

经　　销 / 全国新华书店

印　　刷 / 北京飞达印刷有限责任公司

开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16

印　　张 / 17

字　　数 / 403千字

版　　次 / 2012年6月第1版　2012年6月第1次印刷

书　　号 / ISBN 978-7-5068-2847-5

定　　价 / 32.00元

内容简介

本书是工学类、经济类和管理学类硕士研究生入学考试科目“高等数学(微积分)”的复习指导书。本书作者多年来一直参加有关考研数学试卷的阅卷和考研辅导班的教学工作，具有丰富的教学经验，深知考生的疑难与困惑。作者把自己的教学经验结合考生与考试的实际加以细化、归纳和总结，整理成书奉献给广大读者，旨在提高考研者的数学水平与考试成绩。

本书紧扣数学考试大纲，贴近考试实际，内容丰富。全书共分十章。内容包括：函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，向量代数和空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数，微分方程，微积分在经济中的应用，差分方程及附录(综合练习题)。本书结构新颖，每一章按照本章的重点内容与常见的典型题型，基本概念、性质、公式和定理，习题，习题的解答与分析四部分编写。概念叙述简捷，解题思路清晰，对典型题从多侧面、不同角度、用多种解法进行讲解，注意对考生基本概念的理解、多种类型基础题目的训练和综合解题能力的培养，是考研者较好的复习指导书和良师益友。

本书可作为全国硕士研究生入学统一考试数学一、数学二、数学三的“高等数学(微积分)”的复习指导书，对于在校的大学生、大专生及自学考试者，本书也是一本较好的学习参考用书。

编　者

2012 年 4 月

前　言

为了帮助有志攻读硕士研究生的广大考生在较短的时间内全面、系统地复习有关的数学内容，我们根据教育部制定的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的有关要求，结合我们多年参加数学考研及有关考试的命题、阅卷和辅导所积累的经验，编写了这本《高等数学辅导讲义》。

《高等数学辅导讲义》一书是作者多年来在全国各地考研辅导班讲课的基础上整理而成的。本书自出版、修订八年多来，深受全国广大考生的好评和厚爱，受到专家同行的肯定，认为本书在编写体例上有"特色"，在内容讲解、试题分析与解答上详尽、透彻、易懂，较适合考生的需要。本书每一章由以下四部分构成：

一、本章的重点内容与常见的典型题型。编写这部分的目的是使广大考生明确每一章重点考的内容是什么，掌握到什么程度。在编写过程中，根据我们多年来参加有关命题的经验把考试大纲所要求的内容加以细化、归纳和总结，便于广大考生能够正确地把握考试要求。

二、基本概念、性质、公式和定理。根据考试大纲的要求，将概念、性质、公式和定理进行简明扼要的叙述、归纳、总结和解析。同时指出了考生在运用基本概念、性质、公式和定理等知识点应注意的事项，以加深考生对概念、性质、公式和定理等重要内容的理解和正确应用。通过对历年试题的归类分析，总结本章的常见典型题型，使考生能够在较短时间内对重点、难点、热点问题有个清楚的了解，在考试时能够拿得出、用得上，这也是本书区别于其他考研辅导书的一大特点。

三、习题。分为填空题，选择题，解答题。每题在内容设计上均是全优化设计，涉及两个以上知识点，题型新颖、重点类型突出。几乎涵盖新大纲所有考查知识点。我们相信通过这些试题的训练，考生分析问题和解决问题的能力一定会迅速提高。

四、习题的解答与分析。几乎每道题都有：分析——该题的解题思路和解题步骤、方法；解答——该题的详细、规范解题过程；评注——该题所考查的知识点(或命题意图)，解题思路归纳总结和延伸，常见错误和注意事项。同时，在解题过程中，力求一题多解，拓展考生视野和思路，比较各种解题方法的特点和适用范围，从而提高考生的应试水平。

本书最后给出四套综合练习题，每套题都有详尽的分析、解答。建议考生根据各卷种数学考试大纲要求，有选择地做题，来考查自己复习的效果。

本套书可作为参加全国硕士研究生入学考试数学一至数学三考生的复习指导书，对于在校的大学生、大专生及自学考试者，本套书也是较好的学习参考书。

北京交通大学的阿荣老师、刘晓老师、龚漫奇老师为本书的编写和校对付出了辛勤劳动，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

2012 年 4 月

目　录

第一章　函数、极限与连续

一、本章的重点内容与常见的典型题型

本章的重点内容是极限，既要准确理解极限的概念和极限存在的充要条件，又要能正确求出各种极限.

1. 求极限的方法很多，在考试中常用的主要方法有：

(1) 利用极限的四则运算法则及函数的连续性；

(2) 利用两个重要极限，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1;$$

(3) 利用洛必达法则及泰勒公式求未定式的极限；

(4) 利用等价无穷小代替(常会使运算简化)；

(5) 利用夹逼定理；

(6) 先证明数列的极限存在(通常会用到“单调有界数列必有极限”的准则)，再利用关系式求出极限；

(7) 利用定积分求某些和式的极限；

(8) 利用导数的定义；

(9) 利用级数的收敛性证明数列的极限为零.

这里需要指出的是：题型与方法并不具有确定的关系，一种题型可以有几种计算的方法，一种方法也可能用于几种题型，有时在一个题目中要用到几种方法，所以还要具体问题具体分析，方法要灵活运用.

2. 由于函数的连续性是通过极限定义的，所以判断函数是否连续、判断函数的间断点类型等问题本质上仍是求极限，因此这部分也是重点.

3. 函数这一部分，重点是复合函数和分段函数以及函数记号的运算.

通过历年试题归类分析，本章常见的典型题型有：

1. 直接计算函数的极限值或给定函数极限值求函数表示式中的常数；
2. 讨论函数的连续性、判断间断点的类型；
3. 无穷小的比较；
4. 讨论连续函数在给定区间的零点，或讨论方程在给定区间有无实根；
5. 求分段函数的复合函数.

二、基本概念、性质、公式和定理

(一) 函数

1. **定义**　设 x 与 y 是两个变量，D 是实数集的某个子集，若对于 D 中的每个值 x，变量 y 按照一定的法则有一个确定的值 y 与之对应，称变量 y 为变量 x 的函数，记作

$$y=f(x).$$

学习札记：

数集 D 称为函数的定义域，由函数对应法则或实际问题的要求来确定. 相应的函数值的全体称为函数的值域. 对应法则和定义域是函数的两个要素.

2. 几种特性

(1) 有界性　设函数 $y=f(x)$ 在数集 X 上有定义，若存在正数 M，使得对于每一个 $x\in X$，都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，称 $f(x)$ 在 X 上有界，否则，即这样的 M 不存在，称 $f(x)$ 在 X 上无界. 所以函数在 X 上无界，是对任何 $M>0$，总存在 $x_0\in X$，使 $|f(x_0)|>M$.

(2) 单调性　设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对于 I 上任意两点 x_1 与 x_2，且 $x_1<x_2$ 时，均有 $f(x_1)<f(x_2)$　[或 $f(x_1)>f(x_2)$]，称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加(或单调减少). 如果其中的“$<$”(或“$>$”) 改为“$\leqslant$”(或“$\geqslant$”)，称函数 $f(x)$ 在 I 上单调不减(或单调不增).

(3) 奇偶性　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-a,a)(a>0)$，若对于任一 $x\in(-a,a)$，都有 $f(-x)=f(x)$，称 $f(x)$ 为偶函数，如常数 $C,x^2,\cos x$ 等，其图像关于 y 轴对称；若对于任一 $x\in(-a,a)$ 都有 $f(-x)=-f(x)$，称 $f(x)$ 为奇函数，如 $x,x^3,\sin x$ 等，其图像关于坐标原点对称.

(4) 周期性　对函数 $y=f(x)$，若存在常数 $T>0$，使得对于定义域内的每一个 x，$x+T$ 仍在定义域内，且有 $f(x+T)=f(x)$，称函数 $y=f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期.

3. 复合函数、反函数、隐函数与分段函数

(1) 复合函数　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 Z_φ，若集合 D_f 与 Z_φ 的交集非空，称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，u 为中间变量. 对复合函数，重要的是会把它分解，即知道它是由哪些“简单”函数复合而成的.

(2) 反函数　设函数 $y=f(x)$ 的值域为 Z_f，定义域为 D_f，则对于每一个 $y\in Z_f$，必存在 $x\in D_f$ 使 $y=f(x)$. 若把 y 作为自变量，x 作为因变量，便得一个函数 $x=\varphi(y)$，且 $f[\varphi(y)]=y$，称 $x=\varphi(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数. 但习惯上把 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=\varphi(x)$. $y=f(x)$ 与其反函数 $y=\varphi(x)$ 的图像是关于直线 $y=x$ 对称的.

(3) 隐函数　设有方程 $F(x,y)=0$，若当 x 在某区间内取任一值，便总有满足该方程唯一的值 y 存在时，称由方程 $F(x,y)=0$ 在上述区间内确定了一个隐函数 $y=y(x)$.

(4) 分段函数　若一个函数在其定义域的不同部分要用不同的式子表示其对应规律，如 $f(x)=\begin{cases}\varphi(x),a<x<b,\\ \psi(x),c<x<d,\end{cases}$ 称为分段函数.

(二) 极限

1. 概念

(1) **定义 1**　设 $y=f(x)$ 在 x_0 的一个去心邻域 $(x_0-\delta_1,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta_1)$ 内有定义，若对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\varepsilon>0$，使得当上述去心邻域内任意 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，不等式 $|f(x)-a|<\varepsilon$ 恒成立，则称常数 a 为函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ 或 $f(x)\to a$　(当 $x\to x_0$). 直观地说，即当 x 无限趋近 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限趋近常数 a.

定义 2　设 $f(x)$ 在区域 $|x|>E>0$ 内有定义，若对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $M>0$，使得当 $|x|>M\geqslant E$ 时，不等式 $|f(x)-a|<\varepsilon$ 恒成立，则称 a 为当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$.

直观地说，即当 $|x|$ 无限增大时，函数无限趋近常数 a.

(2) 左极限与右极限　在定义 1 中，若把“$0<|x-x_0|<\delta$”改为“$x_0-\delta<x<x_0$”，即自变量 x 从 x_0 的左侧趋近于 x_0，则称 a 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=a$ 或 $f(x_0-0)=a$；相应把定义 1 中的“$0<|x-x_0|<\delta$”改为“$x_0<x<x_0+\delta$”，a 便是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=a$ 或 $f(x_0+0)=a$.

极限存在的充分必要条件：当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限存在的充分必要条件为其左、右极限存在并相等，即 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$.

在定义 2 中，把 $|x|>M$ 改为 $x>M$，便得到 $x\to+\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限的定义，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$，以及把“$|x|>M$”改为 $x<-M$，便得到 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a$ 的定义.

学习札记：

注 把数列$\{x_n\}$看作整标函数即$x_n=f(n)\quad(n=1,2,\cdots)$，则数列极限的概念$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$便是$f(x)$在$x\to+\infty$的极限的特殊情况：自变量$x$取正整数．即对于任意给定的$\varepsilon>0$，总存在正整数$N$，使当$n>N$时，不等式$|x_n-a|<\varepsilon$恒成立，则称常数$a$为数列$\{x_n\}$的极限，也称此数列收敛于$a$．

2．性质

(1) 唯一性　在自变量的一个变化过程中($x\to x_0$或$x\to\infty$)，或函数的极限存在，则此极限唯一．

(2) 有界性　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$[或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$]，则存在$x_0$的某去心邻域(或$|x|>M>0$)，$f(x)$在此邻域(或$|x|>M>0$)内有界．

(3) 保序性　设$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=a$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=b$，若$a<b$，则存在$x_0$的某去心邻域(或$|x|>M>0$)，在此邻域(或$|x|>M>0$)，恒有$f(x)<g(x)$；若在$x_0$的某去心邻域(或$|x|>M>0$)内恒有$f(x)\leqslant g(x)$，则$a\leqslant b$．

3．极限存在准则

夹逼准则：若在x_0的某去心邻域(或$|x|>M>0$)内，恒有

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$$

且$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=a$，则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=a$．

单调有界准则：单调有界数列必收敛．

4．两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$．

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$或$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$．

5．极限的四则运算

设在自变量的同一变化过程中($x\to x_0$或$x\to\infty$)，$\lim f(x)=a$，$\lim g(x)=b$，则有

(1) 和差：$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=a\pm b$．

(2) 积：$\lim[f(x)g(x)]=[\lim f(x)]\cdot[\lim g(x)]=a\cdot b$，特别地$\lim cf(x)=c\lim f(x)=ca$(其中$c$为常数)，$\lim[f(x)]^k=[\lim f(x)]^k=a^k$(其中$k$为正整数)．

(3) 商：若$\lim g(x)=b\neq 0$，则$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{a}{b}$．

6．无穷小与无穷大

(1) 无穷小的概念　若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\alpha(x)=0$，称$\alpha(x)$为$x\to x_0(x\to\infty)$时的无穷小，即极限为0的变量为无穷小．常数0也是无穷小．

(2) 无穷小性质　$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=a$的充分必要条件为$f(x)=a\pm\alpha(x)$，其中$\alpha(x)$为$x\to x_0(x\to\infty)$的无穷小．

(3) 无穷小的运算

1° 加法：有限多个无穷小的和仍为无穷小；

2° 乘法：有限多个无穷小的积仍为无穷小；

3° 有界变量与无穷小的乘积亦为无穷小．

(4) 无穷小的比较

设$\alpha(x)$与$\beta(x)$都是在同一个自变量变化过程中的无穷小，且$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$也是在此变化过程中的极限：

若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，称$\alpha(x)$是比$\beta(x)$高阶的无穷小．记作$\alpha(x)=o(\beta(x))$；

若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，称$\alpha(x)$是比$\beta(x)$低阶的无穷小；

学习札记：

若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$（其中 c 为常数），称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶的无穷小；

特别，若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$，称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小，记作 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

在求极限过程中，有时利用等价无穷小代换可以化简计算，所以应掌握几个常见的等价无穷小：当 $x \to 0$ 时，

$$\sin x \sim x \sim \tan x,$$
$$\ln(1+x) \sim x,$$
$$e^x - 1 \sim x,$$
$$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x,$$
$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \text{ 等等.}$$

(5) 无穷大的概念　若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x) = \infty$，称 $f(x)$ 为 $x \to x_0 (x \to \infty)$ 时的无穷大，即绝对值无限增大的变量为无穷大.

(6) 无穷小与无穷大之间的关系

在自变量的同一变化过程中，若 $f(x)$ 为无穷大，则其倒数 $\frac{1}{f(x)}$ 必为无穷小；反之，若 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x) \neq 0$，则其倒数 $\frac{1}{f(x)}$ 必为无穷大.

(三) 连续

1. 函数的连续性

(1) 连续性的概念　设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 某邻域内有定义，若当自变量增量 $\Delta x = x - x_0 \to 0$ 时，对应的函数值增量 $\Delta y = f(x_0 + x) - f(x_0) \to 0$，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，称函数 $f(x)$ 在 x_0 处左连续，$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，称函数 $f(x)$ 在 x_0 处右连续.

显然，函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 处既左连续又右连续.

若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一处都连续，称 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，也称 $f(x)$ 是 (a,b) 内的连续函数；若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，又在 a 点处右连续，b 点处左连续，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

(2) 运算

1° 加法　有限多个在同一点处连续的函数之和，仍在该点处连续；

2° 乘法　有限多个在同一点处连续的函数之积，仍在该点处连续；

3° 除法　若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在点 x_0 处连续，且 $g(x_0) \neq 0$，则 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在点 x_0 处连续.

(3) 复合函数与初等函数的连续性

设函数 $u = \varphi(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续，且 $\varphi(x_0) = u_0$，若函数 $y = f(u)$ 在点 $u = u_0$ 处连续，则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 $x = x_0$ 处连续.

一切初等函数在其定义区间上都是连续的.

2. 函数的间断点

(1) 函数间断点的概念　若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点. 因此，若函数 $f(x)$ 在 x_0 处无定义；或 $f(x)$ 在 x_0 处虽有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在；或虽然 $f(x)$ 在 x_0 处有定义，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 也存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$，此时 x_0 便为函数 $y = f(x)$ 的一个间断点.

(2) 函数间断点的类型　设 $x = x_0$ 为函数 $y = f(x)$ 的间断点，若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在，称 x_0 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点，其他均称为第二类间断点.

在每一类间断点中，左、右极限相等的称为可去间断点，不相等的称为跳跃间断点；无穷间断点

学习札记：

与振荡间断点都是第二类间断点.

3. 闭区间上连续函数的性质

1° 最大值和最小值定义 闭区间上的连续函数一定有最大值与最小值.

2° 有界性定理 闭区间上的连续函数在该闭区间上一定有界.

3° 介值定理 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，则对于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任一常数 C，必在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

推论 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

4° 零点定理 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则在开区间 (a,b) 内至少存在函数 $f(x)$ 的一个零点，即至少有一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$.

三、习 题

(一) 选择题

1. 设 $f(x)=x\tan x e^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是（ ）.

(A) 偶函数. (B) 无界函数. (C) 周期函数. (D) 单调函数.

2. 当 $x\to1$ 时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限是（ ）.

(A) 2. (B) 0.

(C) ∞. (D) 不存在但不为 ∞.

3. 设函数 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin(t^2)\mathrm{d}t$，$g(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}$，则当 $x\to0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的（ ）.

(A) 低阶无穷小. (B) 高阶无穷小.

(C) 等价无穷小. (D) 同阶但不等价的无穷小.

4. $x\to0$ 时，$e^x-(ax^2+bx+1)$ 是比 x^2 高阶无穷小，则（ ）.

(A) $a=\dfrac{1}{2},b=1$. (B) $a=1,b=1$.

(C) $a=-\dfrac{1}{2},b=1$. (D) $a=-1,b=1$.

5. 当 $x\to0$ 时，下列 4 个无穷小阶数最高的是（ ）.

(A) $\ln(1+x)-x+\dfrac{1}{2}x^2$. (B) $\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}$.

(C) $x-\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{3}\cos x\right)\sin x$. (D) $e^{x^4-x}-1$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0,\\ x^2g(x), & x\leqslant0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（ ）.

(A) 极限不存在. (B) 极限存在，但不连续.

(C) 连续，但不可导. (D) 可导.

7. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x^3)\sin\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}\int_0^x\sin(t^2)\mathrm{d}t, & x>0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（ ）.

(A) 极限不存在. (B) 极限存在，但不连续.

(C) 连续，但不可导. (D) 可导.

8. 设 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{|x|}, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（ ）.

(A) 不连续. (B) 连续但不可导.

学习札记：

(C) 可导但$f'(x)$在$x=0$不连续.　　(D) 可导且$f'(x)$在$x=0$连续.

9. 设常数$a_i>0\ (i=1,2,3)$，$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$. 则方程$\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}=0$(　　).

(A) 没有根.　　(B) 正好有1个根.

(C) 正好有2个根.　　(D) 正好有3个根.

10. 设$g(x)$在$x=0$二阶可导，且$g(0)=g'(0)=0$. 并设

$$f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则$f(x)$在$x=0$处(　　).

(A) 不连续.　　(B) 连续但不可导.

(C) 可导，但导函数不一定连续.　　(D) 导函数连续.

(二) 填空题

1. 设$f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$，$g(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x<0,\\ x^2, & x\geq 0,\end{cases}$ 则$f[g(x)]=$______，$g[f(x)]=$______.

2. 已知$f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$且$\varphi(x)\geq 0$，则$\varphi(x)=$______的定义域为______.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\sin\frac{2}{x}=$______.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，则$a=$______.

5. 设$f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{x^{-2}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$在$x=0$连续，则$a=$______.

6. 当$x\to 0$时，下列无穷小：$\ln(1+x)$，$x-\sin x$，$x\tan x$，$\frac{x^6}{1-\sqrt{\cos x^2}}$，$\frac{1}{\ln|x|}$中：______是$x$的低阶无穷小；______是$x$的一阶无穷小；______是$x$的二阶无穷小；______是$x^2$的高阶无穷小.

7. 设$\alpha>0$，$\beta\neq 0$且$\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^{2\alpha}+x^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}-x^2]=\beta$，则$(\alpha,\beta)=$______.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)=$______.

9. 在区间$[0,1]$上函数$f(x)=nx(1-x)^n$的最大值记为$M(n)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}M(n)=$______.

10. 设$f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{x}{2}, & x>0,\\ a, & x=0,\\ \frac{\sin bx}{x}+cx, & x<0,\end{cases}$ 在$x=0$处可导，则常数a,b,c分别等于______，______，______.

(三) 解答题

1. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$；

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

2. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$；

学习札记：

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\left(\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right)-\sin\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\right]$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a(\sin x-x)}{x^3}, & x>0,\\ \dfrac{1}{x}\left(2\sin x-\int_0^x \sin t^2\mathrm{d}t\right), & x<0,\end{cases}$ 问 a 为何值时 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在.

4. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\int_0^{x^2}\cos(t^2)\mathrm{d}t}{\sin^{10}x}$.

5. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x(1+t^2)\mathrm{e}^{t^2-x^2}\mathrm{d}t$.

6. 确定 a,b,c 的值，使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=C\ (C\neq 0)$.

7. 设 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，求常数 a 之值.

8. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，$x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}-1\right)$.

9. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

10. 设 $a>0$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $\begin{cases}a_0>0,\\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{a}{a_n}\right),\end{cases}$ $n=0,1,2,\cdots$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

11. 设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数，$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$，$(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

12. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ 1-x, & x>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 2,\\ 2(x-1), & 2<x\leqslant 5,\\ x+3, & x>5.\end{cases}$ 讨论 $y=f(g(x))$ 的连续性，若有间断点并指出类型.

13. 求函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内的间断点，并判断其类型.

14. 求极限 $\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，记此极限为 $f(x)$，求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

15. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A>0$，求证：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=+\infty$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)\mathrm{d}x=A$.

16. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)=f(b)$，证明：至少存在 $x_0\in[a,b]$，使

$$f(x_0)=f\left(x_0+\frac{b-a}{2}\right).$$

17. 以 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，试确定常数 a 的值，使 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right]$ 存在，并求出此极限.

18. 设 $G'(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)=0$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x t^2G(t)\mathrm{d}t$.

学习札记：

19.(1) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$；

(2) 证明 $f(x)=xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

四、习题的解答与分析

(一) 选择题

1.应选(B)

【分析】 (排除法) 由于 $f(-x)=x\tan xe^{-\sin x}\neq f(x)$，当 $\sin x\neq 0$ 时，$f(x)$ 不是偶函数.由于 $f(0)=f(\pi)=0$ 知 $f(x)$ 不是单调函数，又 $f(x)$ 也不是周期函数，因此选(B).

(直接法) 由于 $e^{\sin x}\geqslant e^{-1}$ 及 $x\tan x$ 无界可以推出 $f(x)$ 无界.因为 $x\tan x$ 无界，则 $\forall M>0$，$\exists x_0\in$ 定义域，$|x_0\tan x_0|>Me$，进而 $|f(x_0)|=|x_0\tan x_0e^{\sin x_0}|\geqslant Me\cdot e^{-1}=M$.

【评注】 研究生入学考试数学试卷中的选择题是单项选择题.所谓单项选择题也就是四个选项中有且仅有一个选项是正确的.因此，常用的解题方法是两大类：一种是直接验证某个选项正确，则其余选项必定不正确(不必验证).这种方法叫直接法；另一种方法是验证其中三个选项不正确，则剩下的一个选项必定正确(也不必验证)，这种方法通常称作排除法.

直接法就是直接验证某个选项正确，通常有两种途径，一种是通过直接计算或推演得出某个选项正确，这种方法通常称为推演法；另一种方法是借助几何分析得出正确选项，这种方法叫几何法.而排除法在使用时通常是举反例.

2.应选(D)

【分析】 对这一类题目，一般是考查函数在该点的左、右极限.因为左、右极限都存在且相等，是函数极限存在的充要条件.

由于

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^+}2e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^-}2e^{\frac{1}{x-1}}=0.$$

所以只有(D)是正确的.

【评注】 本题主要考查函数在一点的左、右极限.这里应特别注意的是 $\lim\limits_{x\to1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$，而 $\lim\limits_{x\to1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$.本题的函数由两个因式相乘而得，其中 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$，故因式 $e^{\frac{1}{x-1}}$ 是关键部分.所以解题中要善于抓住关键部分，才能提高效率.

3.应选(B)

【分析】 多次利用洛必达法则，并利用 $\sin x\sim x\ (x\to0)$，求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}$.

由于

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}&=\lim_{x\to0}\frac{(\sin x)\cdot\sin(1-\cos x)^2}{x^4+x^5}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(1-\cos x)^2}{x^3+x^4}\\&=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)^2}{x^3+x^4}=\lim_{x\to0}\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{x^3+x^4}\\&=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{x}{1+x}=0,\end{aligned}$$

因此选(B).

学习札记：

【评注】 以上运算中，考查了求积分上限函数的导数，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right] = (f[\varphi(x)])\varphi'(x).$$

4. 应选(A)

【分析】 将 e^x 的麦克劳林展开式代入(因原式的 x^2 高阶无穷小，所以展开到二阶即可).

$$e^x-(ax^2+bx+1)=1+x+\frac{1}{2!}x^2+o(x^2)-ax^2-bx-1$$

$$=(1-b)x+\left(\frac{1}{2}-a\right)x^2+o(x^2),\quad x\to 0,$$

由于原式是比 x^2 高阶的无穷小，所以 $a=\frac{1}{2}, b=1$.

5. 应选(C)

【分析】 由于

$$\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{3}x^3+o(x^3),$$

$$\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}=1+x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(2x)^2+o_1(x^2)$$

$$-\left[1+x+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}(3x)^2+o_2(x^2)\right]$$

$$=\frac{1}{2}x^2+o(x^2),$$

$$x-\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\cos x\right)\sin x$$

$$=x-\left[\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2!}x^2+o_1(x^2)\right)\right]\cdot\left[x-\frac{1}{6}x^3+o_2(x^3)\right]$$

$=o(x^3)$，$e^{x^4-x}-1\sim x^4-x\sim -x$.

可见应选(C).

6. 应选(D)

【分析】 由一元函数性质，若能首先判定 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则(A)，(B)，(C) 均被排除.

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x^{3/2}}=0,$$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2g(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}xg(x)=0,$$

所以 $f'(0)=0$. 选(D).

【评注】 本题考查了函数极限、连续、可导性等重要知识点.

7. 应选(C)

【分析】 由

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}\ln(1+x^3)\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3}{x^2}\sin\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}x\sin\frac{1}{x}=0, \qquad (*)$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x^2}{1}=0.$$

因此 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

又因为

学习札记：

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\sin\frac{1}{x}$$

不存在，由此得出 $f(x)$ 在 $x=0$ 不可导，选(C).

【评注】 1° 本题考查了分段函数在分段点处极限及导数的求法；函数的可导与连续的关系，即函数在一点连续未必在该点可导；无穷小之间的等价：当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$ 等；无穷小量与有界量的乘积是无穷小量.

2° 注意(*)式计算时，容易犯的错误是：$\lim\limits_{x\to 0^-}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}x\cdot\lim\limits_{x\to 0^-}\sin\frac{1}{x}=0$，上式运算不符合极限运算法则.

8. 应选(D)

【分析】 先考察 $f(x)$ 在 $x=0$ 是否可导. 若不可导，再考察在 $x=0$ 处是否连续. 若可导，则进一步求 $f'(x)$，考察 $f'(x)$ 在 $x=0$ 是否连续.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\arctan\frac{1}{|x|}=\frac{\pi}{2}.$$

$x>0$ 时，

$$f'(x)=\arctan\frac{1}{x}+x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\arctan\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}.$$

$x<0$ 时，

$$f'(x)=-\arctan\frac{1}{x}+\frac{x}{1+x^2}.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\frac{\pi}{2}=f'(0)$，

即 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续，选(D).

9. 应选(C)

【分析】 记

$$f(x)=\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3},$$

易知 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为 $f(x)$ 的三个无穷间断点. 除这三个点外均有 $f'(x)<0$. 又当 $x<\lambda_1$ 时 $f(x)<0$，故区间 $(-\infty,\lambda_1)$ 内 $f(x)=0$ 没有根.

又因为

$$f(\lambda_1^+)=\lim_{x\to\lambda_1^+}f(x)=+\infty,\quad f(\lambda_2^-)=\lim_{x\to\lambda_2^-}f(x)=-\infty,$$

所以在 (λ_1,λ_2) 内 $f(x)=0$ 有且仅有一个根. 类似可知在 (λ_2,λ_3) 内 $f(x)=0$ 也有且仅有一个根，$(\lambda_3,+\infty)$ 内没有根，故选(C).

10. 应选(D)

【分析】 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)=0$，

因为 $f(0)=0$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(二) 填空题

1. 应填：$f[g(x)]=\begin{cases}e^{-x}, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$ $g[f(x)]=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

【分析】 由 $g(x)\geqslant 0$，

$$f[g(x)]=\frac{1}{2}[g(x)+|g(x)|]=g(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

由 $f(x)\geqslant 0$，

$$g[f(x)]=f^2(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$