

现代物理基础丛书

52

高等量子力学

汪克林 著



科学出版社

013031596

0413.1
86

现代物理基础丛书 52

高等量子力学

汪克林 著



科学出版社
北京

0413.1
86



013031298

内 容 简 介

本书共分八章,介绍了二次量子化、相对论量子理论方程、角动量、动力学的路径积分形式、散射理论以及粒子的电磁作用等内容,此外还增加了在目前前沿研究中有广泛应用价值的含时问题和相干态,高等量子力学与大学阶段的量子力学之间的关系颇似理论物理之于普通物理.高等量子力学课程的讲解应着重于从原理出发进行演绎的推理,因此本书力求做到全书内容相互呼应.本书还增加了一些新内容及新的讲解方法,例如角动量一章就是用角动量的玻色化理论进行讲解.

本书可用作物理类研究生的教科书或参考书,对从事物理学研究的科研人员亦有一定的参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

高等量子力学/汪克林著. —北京:科学出版社,2013
(现代物理基础丛书)
ISBN 978-7-03-036677-1

I. ①高… II. ①汪… III. ①量子力学 IV. ①O413.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 026799 号

责任编辑:钱俊周涵 / 责任校对:彭涛

责任印制:钱玉芬 / 封面设计:陈敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

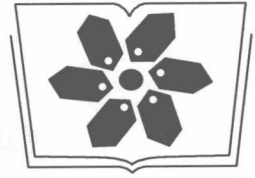
2013 年 3 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2013 年 3 月第一次印刷 印张:15 3/4

字数:300 000

定价:69.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)



中国科学院科学出版基金资助出版

《现代物理基础丛书》编委会

主 编 杨国桢

副主编 阎守胜 聂玉昕

编 委 (按姓氏笔画排序)

王 牧 王鼎盛 朱邦芬 刘寄星

邹振隆 宋菲君 张元仲 张守著

张海澜 张焕乔 张维岩 侯建国

侯晓远 夏建白 黄 涛 解思深

前 言

二十世纪八九十年代中国科技大学物理系的夏上达教授给高能物理专业以外的物理类研究生讲授量子力学课程. 在这段时间里当他不在学校时我代为讲授. 在几次讲授过程中我深切地感到他对这一课程的选材很适合这些研究生的学习要求和今后科研工作的需要, 但同时也感到在此基础上撰写一本相应教材的迫切性.

高等量子力学是物理类研究生的必修专业基础理论课程. 它既是基础理论知识的扩展和提升, 又是从基础理论到研究前沿的中间桥梁. 因此, 这一课程既要対固有的基础理论作更深入的讨论和讲解, 又需要注意培养学生提出问题和解决问题的能力. 这就要求在高等量子力学的教科书中一方面要有固有的理论体系, 另一方面又要包含量子理论的最新进展, 让学生们认识到量子理论远非完备, 还有继续发展的空间. 本书将努力把这两部分内容有机地融合在一起, 明确强调量子理论继续发展的前景.

按照以上的撰写目的, 作者在书中力求把所有的内容组织成一个系统的并具有一定特点的理论体系——这本来就是高等量子力学这门课程应该追求的一个目标. 一般地, 高能物理和粒子理论专业以外的研究生在学习了高等量子力学课程后, 若再掌握一些本研究领域的相关知识, 便可直接着手他们的研究课题了. 本书中作者尽量以探讨的方式来进行讲解, 希望能帮助读者从高等量子力学的学习中领悟出可以借鉴的思路用于他们各自的研究工作.

实际上, 其他领域里的研究工作中也有不少成果及结论可以为高等量子力学课程增添新的内容. 另一方面, 前沿研究的发展也要求在高等量子力学教程中增加一些全新的内容. 作者努力在本书中体现这样的精神.

在本书的准备过程中, 西南科技大学的任学藻教授提供了许多有力的帮助; 作者和西南科技大学理学院的老师们作过不少交流和讨论, 从中得到许多有益的建议, 在此向他们表示衷心的感谢. 本书成稿后, 承中国科学院物理研究所的曹则贤研究员作了全面系统的校订; 中国科技大学出版社的肖向兵编辑和科学出版社的钱俊编辑在本书的编辑过程中付出了很多劳动, 在此一并致谢.

汪克林

2011年于合肥

目 录

前言

第 1 章 二次量子化	1
1.1 量子力学简短回顾	1
1.1.1 态叠加原理	1
1.1.2 物理观测量和算符	1
1.1.3 测量原理及物理量之间的相容性	2
1.1.4 动力学	3
1.2 多粒子体系	4
1.2.1 多粒子体系的态矢	4
1.2.2 多粒子体系态矢的归一化	6
1.3 产生和湮灭算符	6
1.4 多体算符	10
1.4.1 单体算符	10
1.4.2 双体算符	11
1.5 谐振子和声子	13
1.5.1 一维谐振子	13
1.5.2 用产生、湮灭算符讨论谐振子	14
1.5.3 海森堡图像中的讨论	16
1.5.4 声子	16
1.6 哈密顿量为二次形式的对角化	19
1.6.1 Bogoliubov-Hopfield 变换	20
1.6.2 双线性哈密顿量的一种新解法	22
附录	26
第 2 章 相对论量子理论方程	28
2.1 K-G 方程	28
2.1.1 K-G 方程的平面波解	29
2.1.2 非相对论极限	30
2.2 Dirac 方程	32
2.2.1 Dirac 方程的建立	32
2.2.2 粒子的内部自由度——自旋	34

2.2.3	Dirac 方程的平面波解	35
2.3	包含电磁场的 Dirac 方程及其非相对论极限	38
2.3.1	包含电磁场的 Dirac 方程	38
2.3.2	非相对论极限	40
2.4	Dirac 自由电子的 Zitterbewegung	41
2.4.1	问题的提出	41
2.4.2	Dirac 的解答与 Zitterbewegung	42
2.4.3	Dirac 方程的玻色算符表示	43
2.4.4	宇称与宇称-能量共同本征态	44
2.4.5	Zitterbewegung 的讨论	49
第 3 章	角动量	54
3.1	角动量的基本性质	54
3.1.1	基本对易关系	54
3.1.2	λ, m 的取值	55
3.2	角动量算符的玻色化	58
3.2.1	Holstein-Primakov 变换	58
3.2.2	Schwinger 的振子理论	59
3.3	角动量的耦合	62
3.3.1	两个角动量的耦合	62
3.3.2	三个角动量的耦合	67
3.4	高角动量算符的矩阵表示	70
3.4.1	角动量算符的矩阵表示	71
3.4.2	案例 $j = \frac{5}{2}$	73
第 4 章	动力学的路径积分形式	75
4.1	传播子	75
4.1.1	基本概念	75
4.1.2	传播子的路径积分表示	76
4.1.3	频率空间表示	78
4.2	非自由粒子的传播子	80
4.2.1	非自由粒子传播子的近似解法	80
4.2.2	两点推论	82
4.2.3	非自由粒子传播子的路径积分推导	84
4.3	传播子是薛定谔方程的格林函数	86
4.3.1	传播子是格林函数的证明	86

4.3.2	小结	89
4.4	大 t 极限情形的虚时延拓和生成泛函	89
4.4.1	虚时延拓	89
4.4.2	生成泛函	90
4.5	谐振子系统	91
4.5.1	谐振子内容回顾	91
4.5.2	谐振子系统的传播子	93
4.5.3	用传播子方法解谐振子问题	96
第 5 章	散射理论	99
5.1	基本问题	99
5.1.1	两粒子的散射	99
5.1.2	S 矩阵	102
5.1.3	$ \phi^{(+)}\rangle$ 的求解	102
5.2	散射的波包机制	105
5.2.1	问题的提出	105
5.2.2	波包散射	105
5.3	散射截面	107
5.4	跃迁几率幅的微扰展开	108
5.4.1	微扰展开	108
5.4.2	光学定理	111
5.5	散射的传播子近似	114
5.5.1	有势作用的传播子	114
5.5.2	势散射中的传播子	114
5.5.3	两种散射处理方式的比较	117
5.6	两体的散射	118
5.6.1	两体势散射	119
5.6.2	两体散射几率幅	120
5.6.3	两体散射截面	123
5.6.4	全同粒子的散射	125
第 6 章	粒子的电磁作用	130
6.1	带电粒子的拉格朗日量	130
6.1.1	最小作用量原理	130
6.1.2	相对论性粒子的哈密顿量	131
6.1.3	电磁场中运动粒子的拉格朗日量	132
6.1.4	哈密顿量	134

6.2	规范不变性	134
6.2.1	麦克斯韦方程	134
6.2.2	麦克斯韦方程的矢量势形式	136
6.2.3	规范不变性	136
6.2.4	量子理论的规范不变性	137
6.3	Aharonov-Bohm 效应	139
6.3.1	双缝实验	139
6.3.2	A-B 效应	140
6.4	电磁场	142
6.4.1	拉格朗日量密度	143
6.4.2	电磁场的拉格朗日量密度	143
6.4.3	电磁场的哈密顿量密度	144
6.4.4	库仑规范下的哈密顿量	145
6.5	磁单极	148
6.5.1	麦克斯韦理论的电磁不对称	148
6.5.2	Dirac 磁单极假想	149
6.6	电磁场的量子化	151
6.6.1	准备工作	152
6.6.2	电磁场的量子化	153
6.7	真空能量	154
6.7.1	真空能量的讨论	154
6.7.2	Casimir 效应	155
6.8	原子物理中的应用之一	157
6.8.1	原子中的电子与电磁场	157
6.8.2	偶极近似	160
6.8.3	Wigner-Eckart 定理及其选择定则	161
6.8.4	跃迁几率的进一步计算	162
6.9	原子物理中的应用之二——谱线形状	165
6.9.1	谱线形状分析	165
6.9.2	近似解法	167
6.10	用费曼图讨论谱线	171
6.10.1	康普顿散射	171
6.10.2	共振散射	174
6.10.3	谱线形状	178
6.11	能移	180

6.11.1	谱线宽度的计算	180
6.11.2	发散困难的解决方案	182
第 7 章	含时哈密顿量问题及绝热近似	187
7.1	绝热近似	187
7.1.1	绝热近似的含义	187
7.1.2	绝热近似下的传播子	189
7.1.3	随时间改变磁场中的自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子	192
7.2	含时哈密顿量系统的不变算符方法	196
7.2.1	Lewis 的不变算符	196
7.2.2	小结	199
7.2.3	含时谐振子	199
7.3	Paul 阱中的粒子	205
7.3.1	阱中粒子的动力学	205
7.3.2	函数级数方法的应用	207
7.4	Berry 相	208
7.4.1	不含时哈密顿量系统的动力学回顾	208
7.4.2	拓扑相因子	209
7.4.3	相因子 $\rho_n(t)$ 是如何确定的	210
第 8 章	相干态	213
8.1	玻色系统的相干态	214
8.1.1	相干态的定义	214
8.1.2	玻色系统相干态的表示	214
8.1.3	相干态的性质	215
8.1.4	封闭关系	216
8.1.5	封闭关系的应用	218
8.1.6	相干态与 Fock 态的比较	222
8.1.7	相干态的优点	223
8.2	费米系统的相干态	225
8.2.1	Grassmann 代数	225
8.2.2	费米相干态	230
	参考书目	235

第 1 章 二次量子化

1.1 量子力学简短回顾

1.1.1 态叠加原理

一个宏观粒子在某一时刻的运动状态由它的位置和动量所确定. 它的瞬时运动状态对应于相空间(动量及位置组成的多维空间)中的一个确定的点. 不同的运动状态对应于相空间中不同的点, 相互间没有任何关联. 但微观粒子的运动状态却不同, 其每一个确定的状态可以分解成若干别的运动状态; 或者反过来说, 任何若干个运动状态的某种线性叠加一定还是微观粒子的一个确定的状态——这就是微观粒子运动状态之叠加原理的含义.

如果我们用 Dirac 引进的右矢 $|A\rangle$ 来表示微观粒子的某一确定的运动状态, 其中的 A 用以标志不同的参数, 那么态叠加原理可以表示为

$$|A\rangle = \sum_i C_i |i\rangle \quad (1.1.1)$$

其中 $|i\rangle$ 表示某些与 $|A\rangle$ 不同的运动状态. 与经典情形不同, 微观状态和几何空间中的矢量相似. 在几何空间中每一矢量总可以看做若干个线性无关的矢量的合成. 因此, 在量子力学中我们也把运动状态称作态矢.

描述状态的态矢除了用右矢表示外, 一般的量子力学书中常用看起来更为具体的波函数 $\psi(\mathbf{r})$ 来描写状态. 波函数的复共轭记作 $\psi^*(\mathbf{r})$, 它在 Dirac 的表述形式中记为左矢 $\langle|$. 用波函数表示的两状态间的内积是 $\int \psi_A^*(\mathbf{r})\psi_B(\mathbf{r})d\mathbf{r}$, 而用 Dirac 符号表示则为 $\langle A | B \rangle$. 一般地, 内积是一个复数.

1.1.2 物理观测量和算符

和经典力学相比, 量子力学另一个显著的不同点是: 在经典力学中当粒子的状态确定后, 所有的可观测的物理量就相应地确定了, 而在量子力学中单独由态矢是无法确定系统的可观测物理量的. 它的理论体系中还需要另一要素, 即代表某一物理量的相应算符 \hat{a} , 该物理量的期待值由系统的状态 $|A\rangle$ ($\psi_A(\mathbf{r})$) 及算符 \hat{a} 按下式给出

$$\alpha = \langle A | \hat{a} | A \rangle \text{ 或 } \alpha = \int \psi^*(\mathbf{r})\hat{a}\psi(\mathbf{r})d\mathbf{r} \quad (1.1.2)$$

物理量的算符应具有以下的性质:第一,系统的态矢在它的作用下一定转变成态矢空间(Hilbert 空间)中的另一态矢;第二,由于态叠加原理,它一定是线性算符.即

$$\begin{aligned}\hat{a}\{|A\rangle + |B\rangle\} &= \hat{a}|A\rangle + \hat{a}|B\rangle \\ \hat{a}\{c|A\rangle\} &= c\hat{a}|A\rangle\end{aligned}\quad (1.1.3)$$

在谈论第三个特点之前,需先引入算符 \hat{a} 的共轭算符 \hat{a}^+ , 其定义是对任意的两态矢 $|A\rangle, |B\rangle$, 任一算符 \hat{a} 的共轭算符 \hat{a}^+ 与 \hat{a} 之间有以下的关系

$$\langle B | \hat{a}^+ | A \rangle = (\langle A | \hat{a} | B \rangle)^* \quad (1.1.4)$$

其中星号表示取复共轭. 有了共轭算符的定义后, 我们就可以讨论物理量算符 \hat{a} 的另一重要性质, 即它必须是厄米的

$$\hat{a}^+ = \hat{a} \quad (1.1.5)$$

因为只有这样才会有

$$\langle A | \hat{a} | A \rangle = \langle A | \hat{a} | A \rangle^* \quad (1.1.6)$$

即算符的本征值, 或者相应的物理观测量, 是实数.

1.1.3 测量原理及物理量之间的相容性

由于物理量的算符是厄米算符, 易证它的本征态矢对应的本征值为实数, 即如果

$$\hat{a} | \eta_i \rangle = \eta_i | \eta_i \rangle \quad (1.1.7)$$

则它的本征值 η_i 一定是实的, 且对应于不同本征值的本征态矢之间一定是正交的

$$\langle \eta_i | \eta_j \rangle = 0 \quad (\eta_i \neq \eta_j) \quad (1.1.8)$$

量子力学的测量原理告诉我们: (a) 如果系统处于物理量对应的算符 \hat{a} 的某一本征态矢 $|\eta_i\rangle$ 中, 则对该物理量的测量一定给出确定值 η_i ; (b) 如果系统处于一个一般的态矢 $|A\rangle$ 中, 则根据态叠加原理及厄米算符本征态矢集的完备性, 可知 $|A\rangle$ 总可以由本征态矢集合 $\{|\eta_i\rangle\}$ 展开

$$|A\rangle = \sum_i c_i |\eta_i\rangle \quad (1.1.9)$$

这时对 $|A\rangle$ 态作对物理量 \hat{a} 的测量, 每一次测量将给出某一个本征值 η_i , 但每次的测量都无法预期出现的是哪一个 η_i 值. 在多次测量后, 统计出现 η_i 的几率将正比于 $|c_i|^2$. 于是对 $|A\rangle$ 而言, 物理量 \hat{a} 的期待值就是多次测量后的平均值

$$\bar{a} = \sum_i |c_i|^2 \eta_i / \sum_i |c_i|^2 \quad (1.1.10)$$

(1.1.9)式表示的任意状态可用某一物理算符 \hat{a} 的本征态矢量展开的这一性质同样也适用于将 $|A\rangle$ 用另一物理量算符的本征态矢集展开. 将一个状态用不同物理量算符的本征态矢集展开, 叫做取不同的表象. 这和几何中选择不同的线性无关的基矢来描写矢量的情形可相类比.

测量原理的另一个推论是讨论两个确定的物理量 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ 是否具有共同本征态的问题. 如果有, 其含义就是说存在一组本征态矢 $\{|i\rangle\}$, 它有如下的性质

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}|i\rangle &= \lambda_i |i\rangle \\ \hat{\beta}|i\rangle &= \gamma_i |i\rangle\end{aligned}\quad (1.1.11)$$

如果没有, 则分别存在两组不同的 $\{|\eta_i\rangle\}$ 及 $\{|\chi_i\rangle\}$, 使

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}|\eta_i\rangle &= \eta_i |\eta_i\rangle \\ \hat{\beta}|\chi_i\rangle &= \chi_i |\chi_i\rangle\end{aligned}\quad (1.1.12)$$

如为前者则称物理量算符 $\hat{\alpha}$ 及 $\hat{\beta}$ 相容, 如为后者则称此两个算符不相容. 更仔细一点说, 如 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ 相容, 则它们有共同的本征态矢集. 对这些态进行物理量 $\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\beta}$ 的测量会同时给出确定值. 如两者不相容, 存在两组不同的本征态矢集, 则对一个物理量能给出确定值的状态, 对另一物理量就不能, 而只能得出各种本征值按一定几率的分布.

物理量算符间的相容性本征地体现在相应算符的对易关系上: 即如两算符对易则它们是相容的. 不相容的两物理量算符之间的对易子决定了在任意物理态矢中对两物理量进行测量时的不确定性关系. 这就是所谓的海森堡测不准关系.

1.1.4 动力学

经典力学中决定系统随时间演化的方程是牛顿方程, 而在量子力学中决定系统态矢随时间演化的方程是薛定谔方程

$$i\hbar\partial_t |t\rangle = \hat{H} |t\rangle \quad (1.1.13)$$

其中 \hat{H} 是系统的哈密顿算符. 如 \hat{H} 不显含 t , 则它就是保守体系的能量算符; 如 \hat{H} 显含 t , 则物理系统是非保守体系, 算符 \hat{H} 便不是守恒的能量算符.

描述系统随时间的演化规律除了用算符不随 t 改变而系统的态矢随 t 变化的薛定谔图像之外, 也可用态矢不随 t 改变而算符随 t 变化的海森堡图像.

对于(1.1.13)式的薛定谔方程, 除了有限的若干个特殊系统能求出严格的解析解外, 一般系统的求解是困难的. 因此在量子力学的理论发展中, 近似求解的方法也是它的一个主要内容, 如微扰论、变分法及 W. K. B 方法等. 随着计算机技术的进展, 纯数值的解法也得到了普遍的应用.

在量子理论中描述微观粒子的动力学行为和经典力学中对宏观物体的动力学行为的描述存在一个根本性的区别. 对于宏观的物体, 由于在演化过程的任一时刻它都有确定的位置及确定的动量, 而后者决定了它在下一时刻的运动速率和方向, 因此宏观物体的动力学行为是沿着一根确定的轨道在运动. 然而在量子理论中, 微观粒子的位置及动量恰巧是一对不相容的、共轭的物理量, 在演化过程中的每一时

刻它的位置及动量都不能同时确定. 所以微观粒子的动力学行为是谈不上具有轨道的概念的.

宏观物体的运动具有确切的轨道, 而微观粒子的演化不具有确定轨道, 这样的一个宏观力学规律及微观量子理论间截然不同的特点启发我们必须讨论一下这样的情形和所谓的对应原理是否矛盾. 对应原理认为宏观力学规律应当被看做是在一定条件下量子理论的近似. 如果考虑到宏观物体的运动是沿确定轨道进行, 而微观粒子的演化毫无轨道可言, 也许会问这截然不同的两种情况如何能在一定条件下发生从量子到经典的过渡, 这个问题在后面讨论路径积分时会得到详细的解答, 这里先粗略地谈一下. 在路径积分中微观粒子从初始状态演化到末态毫无轨道可言, 不过这也可换成另一个说法, 即可以看做是经过无数多个不同的路径从初态发展到末态, 而这无穷多个不同的路径的出现具有不同的几率. 当粒子的质量越来越大时, 不同路径具有的几率差异越大; 当粒子接近于宏观物体的尺寸时在无穷多个路径中只有围绕经典轨道邻域的那些路径才有显著的几率, 而远离经典轨道的路径的几率都趋于零. 这样, 关于宏观物体体系的量子理论就会过渡到具有确定轨道的经典理论.

1.2 多粒子体系

1.2.1 多粒子体系的态矢

在第一节中我们简短回顾了量子力学中有关的单粒子系统的内容. 量子理论中也讨论全同的多粒子体系. 在单粒子体系中为了描述态矢, 需先确定一个表象, 即选择某一个物理量算符的本征态矢集 $\{|\alpha\rangle\}$ 作为基态矢, 然后将任一态矢用这一组基态矢来展开. 因此对于 N 个全同粒子体系一开始自然会选择如下的归一正交基矢集来作多粒子体系的基态矢集.

$$|\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle \equiv |\alpha_1\rangle \otimes |\alpha_2\rangle \otimes \dots \otimes |\alpha_N\rangle \quad (1.2.1)$$

这种归一正交基态矢对应的波函数就是这种基态矢在位置表象中的展开表示

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) &= \langle \mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_N | \alpha_1 \dots \alpha_N \rangle \\ &= (\langle \mathbf{r}_1 | \otimes \langle \mathbf{r}_2 | \otimes \dots \otimes \langle \mathbf{r}_N |) (|\alpha_1\rangle \otimes |\alpha_2\rangle \otimes \dots \otimes |\alpha_N\rangle) \\ &= \varphi_{\alpha_1}(\mathbf{r}_1) \varphi_{\alpha_2}(\mathbf{r}_2) \dots \varphi_{\alpha_N}(\mathbf{r}_N) \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

这种基的内积可表述为

$$\langle \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N | \alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_N \rangle = \langle \alpha_1 | \alpha'_1 \rangle \langle \alpha_2 | \alpha'_2 \rangle \dots \langle \alpha_N | \alpha'_N \rangle \quad (1.2.3)$$

不过这样做还没有考虑到全同粒子系应当遵守的全同性原理. 为了满足该原理, 对于整数自旋的玻色子体系, 要求波函数是全对称的, 对于非整数自旋的费米子体系, 要求波函数是全反称的. 为此, 需要对(1.2.1)式中引入的基矢集作适当的改

造,如将 P 标记为如下的置换

$$(1, 2, \dots, N) \xrightarrow{P} (P_1, P_2, \dots, P_N)$$

则满足全同性原理的波函数应有如下的性质

$$\psi(r_{P_1}, r_{P_2}, \dots, r_{P_N}) = \zeta^P \psi(r_1, r_2, \dots, r_N) \quad (1.2.4)$$

其中的因子 ζ^P , 对玻色子体系来讲

$$\zeta^P = 1 \quad (1.2.5)$$

对费米子体系

$$\zeta^P = \begin{cases} +1 & \text{偶置换} \\ -1 & \text{奇置换} \end{cases} \quad (1.2.6)$$

显然前面引入的 N 粒子体系的波函数, 即由单粒子系的 Hilbert 空间直乘生成的 N 粒子体系的 H_N 空间的态矢并不满足全同性原理的要求, 为了使物理的态矢成为全对称子空间(玻色子体系)或全反对称子空间(费米子体系)中的态矢. 应将(1.2.2)式引入的多粒子体系波函数投影到这两个子空间中去表示为

$$P_{\begin{Bmatrix} B \\ F \end{Bmatrix}} \psi_{a_1 \dots a_N}(r_1, r_2, \dots, r_N) = \frac{1}{N!} \sum_P \zeta^P \psi_{a_1 \dots a_N}(r_{P_1}, r_{P_2}, \dots, r_{P_N}) \quad (1.2.7)$$

可以证明上式中引入的 P_B 及 P_F 确实是投影算符, 因为它们满足以下关系

$$P_{\begin{Bmatrix} B \\ F \end{Bmatrix}}^2 = P_{\begin{Bmatrix} B \\ F \end{Bmatrix}}$$

对于上面的等式只需对 P_F 的情形证明即可, 因为对 P_B 类似可得.

证明如下:

$$P_F^2 \psi(r_1, r_2, \dots, r_N) = \frac{1}{N!} \frac{1}{N!} \sum_P \sum_{P'} \zeta^{P'} \zeta^P \psi(r_{P'_1 P_1}, r_{P'_2 P_2}, \dots, r_{P'_N P_N}) \quad (1.2.8)$$

由于两次置换仍是一次置换, 故可将 $P'P$ 改写为另一置换 Q . 另一方面知

P 为偶置换, P' 为偶置换 $\rightarrow Q$ 为偶置换

P 为偶置换, P' 为奇置换 $\rightarrow Q$ 为奇置换

P 为奇置换, P' 为偶置换 $\rightarrow Q$ 为奇置换

P 为奇置换, P' 为奇置换 $\rightarrow Q$ 为偶置换

故有

$$\zeta^P \zeta^{P'} = \zeta^Q$$

因此(1.2.7)式可改写成

$$\begin{aligned} P_F^2 \psi(r_1, r_2, \dots, r_N) &= \frac{1}{N!} \sum_P \left(\frac{1}{N!} \sum_Q \zeta^Q \psi(r_{Q_1}, r_{Q_2}, \dots, r_{Q_N}) \right) \\ &= \frac{1}{N!} \sum_P P_F \psi(r_1, r_2, \dots, r_N) \\ &= P_F \psi(r_1, r_2, \dots, r_N) \frac{1}{N!} \sum_P \\ &= P_F \psi(r_1, r_2, \dots, r_N) \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

至此投影算符的性质就得以证明.

1.2.2 多粒子体系态矢的归一化

现在把 N 粒子体系中的位置波函数的对称化及反对称化的办法推广到任意表象中去,使得 N 粒子体系在任何表象中的态矢都满足全同性原理的要求

$$\begin{aligned} |\alpha_1 \cdots \alpha_N\rangle &= \frac{1}{N!} \sum_P \zeta^P |\alpha_{P_1}\rangle \otimes |\alpha_{P_2}\rangle \otimes \cdots \otimes |\alpha_{P_N}\rangle \\ &= P_F^B (|\alpha_1\rangle \otimes \cdots \otimes |\alpha_N\rangle) \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

尽管(1.2.8)式已成为符合全同性原理的多粒子体系的态矢,但它并不是归一的

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1 \cdots \alpha_N | \alpha_1 \cdots \alpha_N \rangle &= \frac{1}{(N!)^2} \sum_{PP'} \zeta^P \zeta^{P'} \langle \alpha_{P_N} | \otimes \cdots \otimes \langle \alpha_{P_1} | (| \alpha_{P'_1} \rangle \cdots | \alpha_{P'_N} \rangle) \\ &= \frac{1}{(N!)^2} \sum_P (\prod_i n_{\alpha_i}!) \\ &= \prod_i (n_{\alpha_i}!) \frac{1}{(N!)^2} \sum_P \\ &= \frac{1}{N!} \prod_a (n_a!) \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

在上式的推导中,第二等式后面出现因子 $(\prod_a (n_a!))$ 的理由如下:对于玻色子体系而言,在某一单粒子态矢中允许有多于一个粒子的存在.因此,一般来讲在 $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ 的这 N 个单粒子态矢中并不都是不同的,而是只有 m 个不同的 α_i ($m \leq N$),其中 α_i 单粒子态上如有 n_{α_i} 个,则在作内积时会出现 $n_{\alpha_i}!$ 种内积的贡献.对于费米多粒子体系,由于有泡利不相容限制, n_a 只能取为 1. 根据(1.2.11)式的结果,我们将重新定义既满足全同性原理又是归一的多粒子体系的态矢为

$$|\alpha_1 \cdots \alpha_N\rangle = \sqrt{\frac{N!}{\prod_i n_{\alpha_i}!}} P_F^B (|\alpha_1\rangle \otimes \cdots \otimes |\alpha_N\rangle) \quad (1.2.12)$$

这样做了以后和单粒子态矢的情况一样,由于(1.2.12)式中的态矢是正交归一的,故其也有如下的封闭性

$$\sum_{\alpha_1 \cdots \alpha_N} |\alpha_1 \cdots \alpha_N\rangle \langle \alpha_1 \cdots \alpha_N| = 1$$

1.3 产生和湮灭算符

多粒子体系中的一个重要问题就是粒子间的相互作用.相互作用中的两粒子,不论其相互作用的机制如何,在能量、动量产生跃迁以后,两粒子总是从初始时的量子数为 α 及 β 的状态转变成量子数为 γ 及 δ 的状态.这样一个作用的过程可以