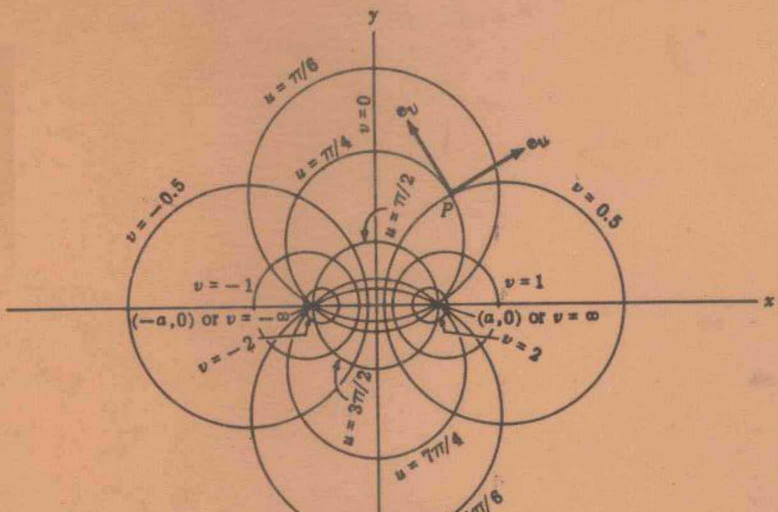
科技用書

張量分析

曹建國教授 編著

國立成功大學數學系



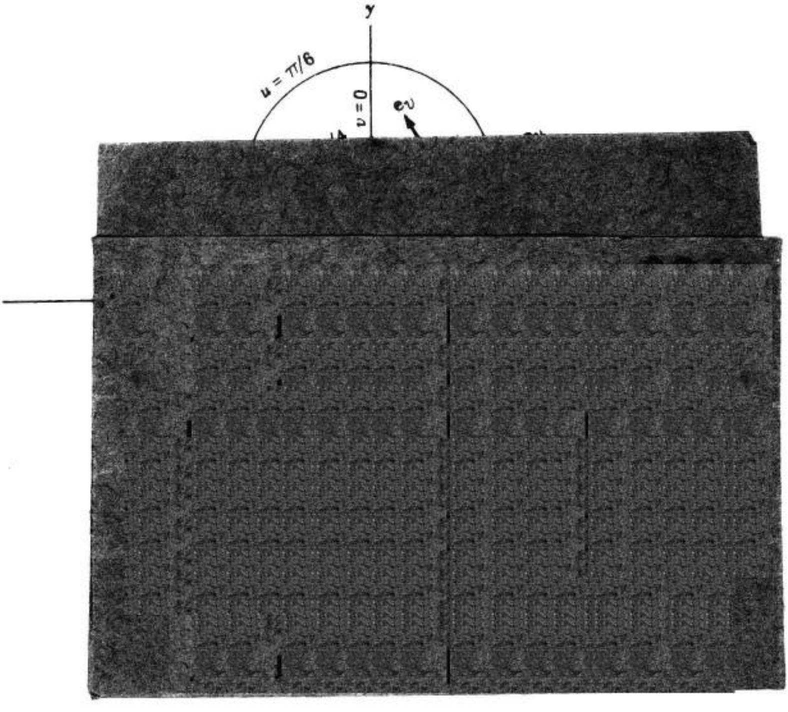
大行出版社印行

用書

張量分析

曹建國教授 編著

國立成功大學數學系



林主任宜禧序

在六十學年度春季學期的系務會議上，本校數學系全體同仁有一致的願望：希望各位教授先生們能將大家最感興趣的學科，最有心得的講義，勿存「敝帚自珍」的心理，加以整理，訂正之後付梓，此項計劃如能逐一實現，則若干年後一整套的成功大學數學叢書終可問世。去年秋季，叢書之一微積分學已告出版，我深知同仁中孜孜於此項遠程計劃之著述者頗有人在。春假之前，曹教授建國兄以他整理好的張量分析一書稿示我，希望我能爲這本書寫下幾句紀念的話，我以自己在這一部門的知識涉獵不深，故於內容方面未取輕予置評，但曹君在本系及物理系曾爲三，四年級同學開此選課有年，其講義奉數學大師 Sokolnikoff 之名著：Tensor Analysis – Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Conjnua 爲圭臬，並有旁參他種名著數册，斟酌取捨，編成這一册足供一學期用，每週 2 – 3 小時教學的張量分析課本。由於張量的理論及應用已成近代應用數學和工程數學不可或缺之一環，可是在今天的臺灣，稍涉高深的數學著述（包括課本）仍不多見，數學之所需端賴歐美原著，而歐美學制與我國現行者不盡相同，故欲尋求一適宜之教本殊非易事，以曹君豐富之教學經驗及其用力之勤，相信此書的內容應能適合我國學子的程度與需要。用者如將之與俄人 Borisenko, Tarapor 二氏之名著：Vector and Tensor Analysis with Applications 互相參讀，更能收牡丹綠葉之功效也。

林 宜 禧

六十三年清明節

自　序

張量分析爲研究相對論、微分幾何、彈性力學、空氣動力學以及其他工程科學之主要而有力之工具，編者於本校數學系及物理系講授該項課程有年深感學者對語文之推敲，符號辨識倍極辛勞爲使學者進一步作理論之探討乃有編撰本書之動機。

本書係參照Sokolnikoff所著張量分析及其他有關張量之名著合編而成，書中之數學名詞係採用六十年六月教育部公布之數學名詞務使讀者獲得充分瞭解。

本書共分五章，第一章線型向量空間係介紹向量分析，矩陣線型變換爲研究張量分析之基本概念，第二章曲線坐標乃介紹曲線坐標內之向量表示法且導出一秩張量爲張量分析之根源，第三章張量論係介紹張量之特性，各種張量之變換律及e-系之應用，第四章微分幾何乃介紹張量應用於空間曲線及空間曲面之導出，第五章解析力學係由張量導出力及功能之關係。

本書按大學課程標準編定，藉使適合大學及獨立學院理工各系一學期之採用。

本書曾蒙本校校長倪超博士封面題字，本校數學系系主任林宜禧先生及工學院院長史惠順先生之多方指正鼓勵特此申謝，本書雖已費盡心血但仍錯誤百出，尤以第四、五章更感惶恐，當希國內外專家不吝指正。

編者識于國立成功大學

六十三年四月

張量分析

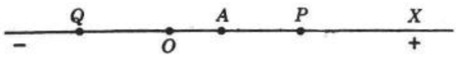
目　　次

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一章　線型向量空間
(Linear vector spaces)

§1　坐標系 (Co-ordinate System)

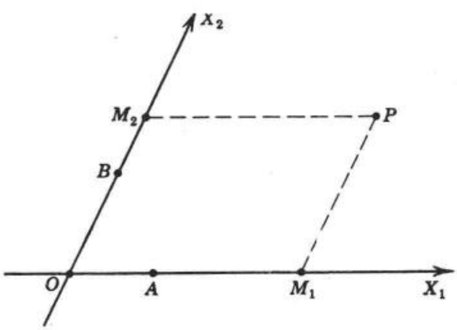
確定一物體之位置，首先應建立一坐標系，通常先論及一維空間 (One-dimensional space) 由下圖所示，今取一直線X，以O爲原點分作兩個射線，且取OA爲一單位長度，以原點爲介，右方爲正，左方爲負，該線各點之分佈，亦可作爲實數系之集合



設P爲正方射線上一點，則 $x=\dfrac{\overline{OP}}{\overline{OA}}$

設Q爲負方射線上一點，則 $x=\dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OA}}$

若將實數系集合，以點之集合分佈於一平面上，即組成二維空間坐標系 (Coordinate system of two dimensional space) 如下圖



取二射線X_1及X_2相交於O點，其二射線上之單位長度可以不等，則平面上任一點P即表示一有序實數對（ ordered pair of real numbers ）（x_1,x_2）。

因此，若設不在一平面之三射線X_1，X_2，X_3 相交於一點O，且任一點P（x_1，x_2，x_3） 爲三個有序實數組成，此即三維空間坐標系（ Coordinate system of three dimensional space)其中X_1X_2，X_2X_3 及X_1X_3 爲坐標面（ Coordinate plane ）。

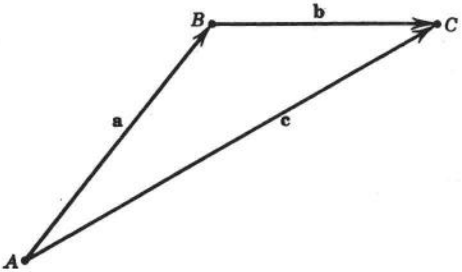
以上所述之三個坐標系稱爲斜坐標系（ oblique cartesian coordinate system ）顯然，三維空間內之X_1，X_2，X_3相交若爲直角時即爲直角坐標系（ Orthogonal cartesian, or rectangular cartesian coordinate system ）在此坐標系內，若$A(a_1a_2a_3)$及$B(b_1b_2b_3)$則$d=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$
若在斜坐標系內，距離d之公式較爲繁複即斜坐標系內二點，若爲（$x_1x_2x_3$）及（ $y_1y_2y_3$ ）則

$$d=\sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}(y_i-x_i)(y_j-x_j)}$$

此處g_{ij} 表常數隨其坐標之變換而定，以後當再詳論。

§2 向量之幾何概念（ The geometric concept of a vector ）

空間任意一點A移動至B點可視爲有向線段（ Line segment ）$\overrightarrow{AB}$，若B再移動至C，其二位移之和可以$\overrightarrow{AC}$表之即



$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

在初等向量分析內，有向線段，即視爲向量（ vectors ）通常以小寫字母記之，上式重寫爲

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$$

此處　$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$ ，　$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$ ，　$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$

基於向量之概念，則認空間之兩點所組成之位移，且二向量相等必其大小相等，方向平行，今以 $|\boldsymbol{a}|$ 表一向量之大小，$-\boldsymbol{a}$ 爲 $\boldsymbol{a}$ 之負向量，其大小與 $\boldsymbol{a}$ 相同，方向相反，今將向量之加法律分述於下：

（Ⅰ）$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0$

（Ⅱ）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

（Ⅲ）若 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 爲二向量，則必有 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}$ 存在

（Ⅳ）若 α 爲實數，則 $\alpha\boldsymbol{a}\equiv\boldsymbol{a}\alpha$ ，且其大小爲 $|\alpha|\,|\boldsymbol{a}|$

（Ⅴ）$(\alpha_1+\alpha_2)\boldsymbol{a}=\alpha_1\boldsymbol{a}+\alpha_2\boldsymbol{a}$

（Ⅵ）$\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$

（Ⅶ）$\alpha_1(\alpha_2\boldsymbol{a})=(\alpha_1\alpha_2)\boldsymbol{a}$

定義：二向量 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 之純量乘積爲 $|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ ，記爲 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$。

上述之純量乘積亦可等於 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上之射影乘其 $\boldsymbol{b}$ 之大小，且向量 $\boldsymbol{a}$ 之大小可以 $\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$ 表之，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 時，則 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 必相互垂直。

由純量乘積之定義，則可推出以下諸定理

（Ⅷ）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2\geq 0$

（Ⅸ）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

（Ⅹ）$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$

（Ⅺ）$\alpha(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\alpha\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ ，α 爲實數

§3　線型向量空間（ Linear vector space ）

線型相依（ Linear dependence ）設一組向量 $\boldsymbol{a}_1$ ，$\boldsymbol{a}_2\cdots\cdots\boldsymbol{a}_n$，

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

若 α_1， α_2，…… α_n ，不均為零則

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots\cdots + \alpha_n\boldsymbol{a}_n = 0$$

若 α_1， α_2，…… α_n 不存在，即謂線型獨立(Linearly independent)。

今設二向量 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ ，同向或異向， $k \neq 0$ 時，則

$$\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a} \qquad (3.1)$$

若命 $k = -\dfrac{\alpha}{\beta}$ ，則得方程式 $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} = 0$

因此，α ，β 不為零時，二向量共線(或平行)為線型相依

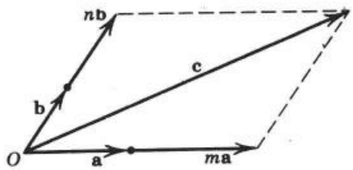
此即組成一維線型向量空間(One dimensional real linear vector space)，且該線上任一點可視為位置向量(Position vector) $k\boldsymbol{a}$， 若 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 為二不共線之向量，由有向線段表示，且相交於 O 點，則 $\boldsymbol{c}$ 與 $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ 之關係可由下式表出

$$\boldsymbol{c} = m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b} \qquad (3.2)$$

方程式(3.2) 可寫作

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} = 0$$

此為三個向量為一組的線型相依條件，$m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b}$ 中，$\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ 為二線型獨立向量，m 及 n 為二不定實數，即可組成二維線型向量空間(Two dimensional linear vector space) 顯然，在二維線型向量空間內，一組之三個向量恒為線型相依如下圖所示

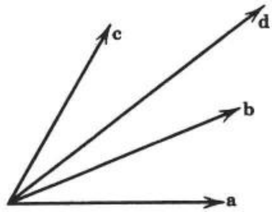


若不在一平面上之三向量 $\boldsymbol{a}$ ， $\boldsymbol{b}$ ， $\boldsymbol{c}$ ，且以 O 爲原點，則可得

$$\boldsymbol{d} = m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b} + p\boldsymbol{c} \tag{3.3}$$

顯然，由 $\boldsymbol{a}$ ， $\boldsymbol{b}$ ， $\boldsymbol{c}$ ， $\boldsymbol{d}$ 四個向量，即可得下列關係式，即

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} + \delta\boldsymbol{d} = 0$$



公式(3.3)實數 m ， n ， p 選定後即可定爲三維線型向量空間(Three dimensional real linear vector space)，在三維線型向量空間內每一組之四個向量爲線型相依，由此線型向量空間之概念，當可推出 n 維線型向量空間。

在(3.3)中， $\boldsymbol{a}$ ， $\boldsymbol{b}$ ， $\boldsymbol{c}$ 可作爲基本向量(Base vector)，或視爲 $\boldsymbol{d}$ 之分向量(Components of vectors)。

三維空間內，三個爲一組之向量，若相互垂直時，顯然爲線型獨立，但若選相互垂直之三向量 $\boldsymbol{a}_1$， $\boldsymbol{a}_2$， $\boldsymbol{a}_3$ 其長度爲 1 ，顯然任一向量 $\boldsymbol{x}$ 可以下式表之

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3$$

則 $\boldsymbol{a}_i$ ($i = 1$, 2 , 3) 坐標分別如下

$$\boldsymbol{a}_1\ (\ 1\ ,\ 0\ ,\ 0\ )$$
$$\boldsymbol{a}_2\ (\ 0\ ,\ 1\ ,\ 0\ )$$
$$\boldsymbol{a}_3\ (\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1\ )$$

若二向量$\boldsymbol{x}$及$\boldsymbol{y}$其分向量分別爲($x_1\ x_2\ x_3$)及($y_1\ y_2\ y_3$)則 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ 具有分向量(x_1+y_1 , x_2+y_2 , x_3+y_3), $\alpha\boldsymbol{x}$，爲($\alpha\boldsymbol{x}_1$, $\alpha\boldsymbol{x}_2$, $\alpha\boldsymbol{x}_3$)。

由純量乘積分配律即得

$$\boldsymbol{x} = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3$$
$$\boldsymbol{y} = y_1 a_1 + y_2 a_2 + y_3 a_3$$
$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

因 $\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j=\delta_{ij}$ ，當 $i=j$ 時， $\delta_{ij}=1$ ，當 $i\neq j$ 時， $\delta_{ij}=0$

顯然，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}=x_1^2+x_2^2+x_3^2=|\boldsymbol{x}|^2$

因此，$|\boldsymbol{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$

§4 N－維空間(N-dimensional space)

在錯綜複雜之環境裏，往往遭遇到超過三個不同相對應之物理量，例如，在研究氣體之狀態時，當可考慮其壓力(p)，體積(v)溫度(T)及時間(t)，吾人希望將此四個物理量作四個有序實數(x_1, x_2, x_3, x_4) ，顯然，在三維物理空間內，不能將此氣體之狀態以點來圖示出來，但可以一一對應之情況來處理之。

因此，處理物理上問題，往往以一一對應之情況以數之集合及物件來表明之，但該“物件”可表壓力、體積、溫度，但有時亦可表電量，及由電子之移動而產生之勢能等等。

今定一N空間(或簇)，即如定任一組物件可置於一一對應之N個有序集合之數x_1, x_2 …… x_N (實數或複數)可使

$$|x_i - A_i| < k_i \qquad (\ i=1\ ,\ 2\ ,\cdots\cdots N\ )$$

此處 $A_1 \cdots\cdots A_N$ 表常數，k_1, $k_2 \cdots\cdots k_N$ 表實數。

上式之不等式指定數字 x_i 之變化範圍，若 x_i 爲實數，N維空間爲實，且可將不等式寫爲下列之型式，即

$$a_1 \leq x_1 \leq a_2 \qquad b_1 \leq x_2 \leq b_2 \cdots\cdots \qquad t_1 \leq x_N \leq t_2$$

任何以有序數字（x_1, $x_2 \cdots\cdots x_N$）表明特定之一對一點之組合，即稱坐標系，且 x_1 , $x_2 \cdots\cdots x_N$ 爲坐標系中點之坐標。

今設一組方程式具有下列型式

$$x_i = x_i\,(\,y_1\,,\,y_2 \cdots\cdots y_N\,) \qquad (\,i = 1\,,2 \cdots N\,) \qquad (4.1)$$

函數 x_i 爲在某區域內爲單值函數

則可產生N一個單值函數解答，即

$$y_i = y_i\,(\,x_1\,,\,x_2 \cdots\cdots x_N\,)$$

此即所謂坐標之變換（Transformation of coordinates）。

§5　n維線型向量空間（Linear vector spaces of n Dimensions）

(A) n 維空間，任二點亦可連接爲一向量 $\boldsymbol{a}$ 。

(B)任二向量之加法律，仍符合§ 2 所述。

(C)設 α 爲一實數，則有向量 $\alpha\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\alpha$ 存在，且符合§ 2 所述之(Ⅴ)(Ⅵ)(Ⅶ)。

(D)在 n 維空間內，存在著 n 個線型獨立向量，但有 $n+1$ 個一組向量爲線型相依。

基於此種原理，則任一向量 $\boldsymbol{x}$ 可以下列型式表之

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \alpha_3\boldsymbol{a}_3 + \cdots\cdots + \alpha_n\boldsymbol{a}_n \qquad (5.1)$$

此處 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2 \cdots\cdots \boldsymbol{a}_n$，表示任一 n 個爲一組之線型獨立向量。

公式(5.1)所表之整體向量，即組成一 n 維線型空間，其中 α_i 爲不定實數。

(E)在 n 維空間內，任二向量 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ ，亦可作純量乘積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ ，此亦符合 § 2之定理(Ⅷ)，(Ⅸ)，(Ⅹ)，(Ⅺ)。

此時由於選定坐標系之關係無法將 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 之性質作一具體的表出，因此一向量必在 n 維歐氏空間（ n dimensional Euclidean space ） E_n 內，方可適合由(A)至(E)之定理。

因此，就歐氏幾何學之觀點，定出 n 維空間一向量 $\boldsymbol{a}$ 之大小爲 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$，若 $|\boldsymbol{a}|=1$ ，即爲單位向量，二向量彼此垂直則必 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 。

今將論證在 E_n 內，m 個爲一組線型獨立向量相互正交，但 $m\leq n$，此即由 m 個爲一組之線型向量 $\boldsymbol{x}_1$ ，$\boldsymbol{x}_2\cdots\cdots\boldsymbol{x}_m$ ，構成一組向量 $\boldsymbol{a}_1\cdots\cdots\boldsymbol{a}_m$ ，使 $\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j=0$，（ $i\neq j$ ），進而選定向量 $\boldsymbol{a}_i$ ，此即單位向量，今加以證明之。

證明：

設一組向量 $\{\boldsymbol{x}_i\}$（ $i=1\cdots\cdots\cdots m$ ）爲線型獨立，則得

$$c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2+\cdots\cdots+c_m\boldsymbol{x}_m=0 \tag{5.2}$$

若使 $c_1=c_2=\cdots\cdots=c_m=0$ ，則上式成立

若 $\boldsymbol{x}_1\neq 0$ ，$c_1=1$ ，$c_2=c_3=\cdots\cdots=c_m=0$ 則上式爲線型相依與假設不符

今以 $\boldsymbol{a}_1=\dfrac{\boldsymbol{x}_1}{|\boldsymbol{x}_1|}$ ，顯然，$\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_1=1$ ，則 $\boldsymbol{a}_1$ 爲單位向量

則向量組 $\boldsymbol{a}_1$ ，$\boldsymbol{x}_2\cdots\cdots\boldsymbol{x}_m$ ，顯係線型獨立向量

今論次一向量 $\boldsymbol{a}_2{}'=\boldsymbol{x}_2-(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1$

則 $\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{a}_1-(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_1=0$

所以，$\boldsymbol{a}_2{}'$ 與 $\boldsymbol{a}_1$ 正交，且 $\dfrac{\boldsymbol{a}_2{}^1}{|\boldsymbol{a}_2{}^1|}=\boldsymbol{a}_2$ 爲一單位向量

因此，向量組 $\boldsymbol{a}_1$ ，$\boldsymbol{a}_2$ ，$\boldsymbol{x}_3\cdots\cdots\boldsymbol{x}_m$ 顯爲線型獨立向量

再使 $\boldsymbol{a}_3{}'=\boldsymbol{x}_3-(\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1-(\boldsymbol{x}_8\cdot\boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{a}_2$，此則與 $\boldsymbol{a}_1$ ，$\boldsymbol{a}_2$ 正交

而 $\boldsymbol{a}_3 = \dfrac{\boldsymbol{a}_3{}'}{|\boldsymbol{a}_3{}'|}$ 即一單位向量

如是向量組 $\boldsymbol{a}_1$ ，$\boldsymbol{a}_2$ ，$\boldsymbol{a}_3$ ，$\boldsymbol{x}_4$ ，……$\boldsymbol{x}_m$爲線型獨立向量組以此步驟，即可得證出一組爲$\boldsymbol{m}$個線型獨立單位向量

$$\boldsymbol{a}_1 , \boldsymbol{a}_2 , \cdots\cdots \boldsymbol{a}_m \tag{5.3}$$

若$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}$，則正交向量組 $\boldsymbol{a}_1$ ，$\boldsymbol{a}_2 \cdots\cdots \boldsymbol{a}_n$ 爲完整的，此因在 E_m中任一$\boldsymbol{x}$ 可具有下列型式

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots\cdots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n \tag{5.4}$$

因此，可以三維空間單位向量情形，而推出 $\boldsymbol{n}$ 維空間之單位向量之坐標分別爲

$$\begin{array}{l}
1 , 0 , \cdots\cdots 0 \cdots\cdots 0 \\
0 , 1 , \cdots\cdots 0 \cdots\cdots 0 \\
0 , 0 , 1 \cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 , 0 , 0 , \cdots\cdots\cdots 1
\end{array}$$

常數 α_1 ，$\alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n$ ，爲$\boldsymbol{x}$ 之分量

(5.4) 兩端分別以 $\boldsymbol{a}_1$ ，$\boldsymbol{a}_2$ ，……$\boldsymbol{a}_n$ ，作純量乘積，且記 $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \delta_{ij}$ ，則得

$$\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{x} = \alpha_1 \qquad \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{x} = \alpha_2 \cdots\cdots \qquad \boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{x} = \alpha_m$$

因此向量$\boldsymbol{x}$ 具有下列之型式

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{a}_1 + (\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{a}_2 + \cdots\cdots + (\boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{a}_n \tag{5.5}$$

若以$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{x} = x_i$ ，則 (5.5) 可寫爲

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{a}_1 + x_2 \boldsymbol{a}_2^2 + \cdots\cdots + x_n \boldsymbol{a}_n$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com