21世纪独立学院应用型创新人才培养系列规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

（下册）

主 编 杨 宏 祁忠斌

副主编 李冬娜 李建生 吕 陇 姚小娟

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

学院应用型创新人才培养系列规划教材

高等数学

（下册）

主　编　杨　宏　祁忠斌
副主编　李冬娜　李建生　吕　陇　姚小娟

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书是在高等教育大众化和办学层次多样化的新形势下，结合工科本科“高等数学”课程的教学基本要求，并在独立学院多年教学经验的基础上编写而成的.

全书分为上、下两册. 上册内容包括函数，极限与连续，一元函数微分学及应用，一元函数积分学及应用；下册内容包括向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，重积分，无穷级数，微分方程，曲线曲面积分及应用. 每节之后配有习题，每章后配有总习题. 全书尽量从工程实例引入概念，削枝强干、分散难点，力求逻辑清晰、通俗易懂.

本书可供独立学院工科各专业用作教材，也可供广大教师、工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/杨宏，祁忠斌主编. --上海：同济大学出版社，2011.10

ISBN 978-7-5608-4675-0

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①杨…②祁… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 185374 号

---

21 世纪独立学院应用型创新人才培养系列规划教材

高等数学(下册)

主　编　杨　宏　祁忠斌

副主编　李冬娜　李建生　吕　陇　姚小娟

责任编辑　姚烨铭　**策划编辑**　张崇豪　**责任校对**　徐春莲　**封面设计**　陈益平

出版发行　同济大学出版社　www.tongjipress.com.cn

（上海市四平路 1239 号　邮编 200092　电话 021-65985622）

经　　销　全国各地新华书店

印　　刷　同济大学印刷厂

开　　本　787 mm×1 092 mm　1/16

印　　张　15.5

印　　数　1—3 050

字　　数　386 000

版　　次　2011 年 10 月第 1 版　2011 年 10 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 978-7-5608-4675-0

定　　价　28.00 元

前　　言

数学科学不仅是自然科学的基础，也是一切重要工程技术发展的基础. 数学素质是培养高层次创新人才的重要基础. 高等数学的学习是大学生数学素质培养的重要基础，对不同层次的人才培养起着举足轻重的作用.

随着我国高等教育大众化和办学层次的形式多样化，因材施教是当前教学改革和课程建设的重要内容之一. 本套教材就是在这样的形势下，根据国家质量工程全面提高本科生素质教育的指导思想，结合工科本科"高等数学"课程的教学基本要求，在作者们独立学院多年教学经验的基础上编写而成的. 近年来的教学实践与研究表明，独立学院的数学教学必须与独立学院的人才培养层次及模式紧密联系，因而，本套教材的编写不仅强调有益于学生掌握高等数学的基本概念、基本方法与基本技巧，而且强调培养学生利用数学工具分析和解决工程实际问题的能力.

本套教材分为上、下两册. 上册内容包括函数，极限与连续，一元函数微分学及其应用，一元函数积分学及其应用；下册内容包括向量代数与空间解析几何，多元函数微分学及其应用，重积分及其应用，无穷级数，微分方程与曲线曲面积分. 每节之后配有习题，每章后配有总习题.

本套教材在编写上尽量体现以下几个特点：

1. 从独立学院工科类专业学生的基础出发，适度弱化一些纯数学理论及一些有难度的定理的证明，而代之以直观和形象的例子说明.

2. 结合独立学院工科类专业学生的实际需要，在编写过程中尽量削枝强干、分散难点，力求结构合理、逻辑清晰、通俗易懂.

3. 侧重于培养学生的应用意识与应用能力，介绍了一些工程背景和应用性实例，期望能够提高学生学习数学的兴趣，在例题与习题选编上则侧重于应用.

本书第 1,4,11 章由杨宏编写，第 5,8 章由李冬娜编写，第 7,12,13 章由李建生编写，第 3,6,9 章由吕陇编写，第 2,10 章由姚小娟编写. 全书由祁忠斌、杨宏统稿.

由于编者水平所限，书中尚有不妥及错误之处，恳请同行和读者批评指正.

本书的编写得到了兰州理工大学技术工程学院的支持与多方的帮助，在此表示衷心的感谢.

编　者

2011 年 9 月

目　录

前言

第 8 章　向量代数与空间解析几何 …… 1

8.1　向量及运算 …… 2

习题 8.1 …… 8

8.2　向量的乘积运算 …… 9

习题 8.2 …… 14

8.3　平面的方程 …… 15

习题 8.3 …… 19

8.4　直线的方程 …… 20

习题 8.4 …… 26

8.5　曲面与曲线 …… 27

习题 8.5 …… 35

8.6　综合应用实训 …… 36

第 8 章总习题 …… 37

第 9 章　多元函数微分学 …… 40

9.1　多元函数的极限与连续性 …… 40

习题 9.1 …… 45

9.2　偏导数 …… 45

习题 9.2 …… 50

9.3　全微分及其应用 …… 50

习题 9.3 …… 53

9.4　复合函数的微分法 …… 53

习题 9.4 …… 57

9.5　隐函数的求导公式 …… 58

习题 9.5 …… 60

9.6　多元函数的极值问题 …… 61

习题 9.6 …… 68

9.7　综合应用实训 …… 68

第 9 章总习题 …… 76

第 10 章　重积分 …… 80

10.1　二重积分的概念及性质 …… 80

习题 10.1 …… 85

10.2　二重积分的计算 …… 85

习题 10.2 …… 93

10.3　三重积分 …… 95

习题 10.3 …… 103

10.4　重积分的应用 …… 104

习题 10.4 …… 109

10.5　综合应用实训 …… 110

第 10 章总习题 …… 111

第 11 章　无穷级数 …… 113

11.1　数项级数的概念及性质 …… 113

习题 11.1 …… 118

11.2　数项级数的审敛法 …… 118

习题 11.2 …… 123

11.3　幂级数 …… 123

习题 11.3 …… 131

11.4　函数展开成幂级数 …… 132

习题 11.4 …… 137

11.5　幂级数展开式的应用 …… 137

习题 11.5 …………………… 141
11.6 傅里叶级数…………… 141
习题 11.6 …………………… 149
11.7 综合应用实训………… 149
第 11 章总习题 ……………… 152

第 12 章 常微分方程 ………… 156

12.1 微分方程的基本概念 …………………………… 156
习题 12.1 …………………… 159
12.2 一阶微分方程………… 160
习题 12.2 …………………… 168
12.3 一阶微分方程应用实训 …………………………… 169
习题 12.3 …………………… 173
12.4 可降阶的高阶微分方程 …………………………… 173
习题 12.4 …………………… 176
12.5 二阶常系数线性微分方程 …………………………… 176
习题 12.5 …………………… 184
12.6 二阶微分方程应用实训 …………………………… 185
习题 12.6 …………………… 187
第 12 章总习题 ……………… 187

第 13 章 曲线积分与曲面积分 …………………………… 190

13.1 第一类曲线积分……… 190
习题 13.1 …………………… 194
13.2 第二类曲线积分……… 195
习题 13.2 …………………… 201
13.3 格林公式 曲线积分与路径的无关性…… 202
习题 13.3 …………………… 209
13.4 第一类曲面积分……… 210
习题 13.4 …………………… 212
13.5 第二类曲面积分……… 213
习题 13.5 …………………… 220
13.6 高斯公式与斯托克斯公式 …………………………… 221
习题 13.6 …………………… 225
13.7 综合应用实训………… 225
第 13 章总习题 ……………… 236

参考文献…………………… 240

第 8 章　向量代数与空间解析几何

本章的核心内容是空间解析几何，即用代数的方法研究空间的几何图形，它是平面解析几何的推广，是为学习多元函数微积分学奠定基础. 而向量代数作为研究空间解析几何的工具，在物理学、力学及工程技术上具有广泛的应用.

坐标系的由来

坐标系是现代数学中的重要内容，它在数学发展的历史上，起过划时代的作用.

关于坐标系的创立，传说有这么一个故事：有一天，笛卡尔（1596—1650，法国哲学家、数学家、物理学家）生病卧床，但他头脑一直没有休息，在反复思考一个问题. 几何图形是直观的，而代数方程则比较抽象，能不能用几何图形来表示方程呢？这里，关键是如何把组成几何图形的点和满足方程的每一组"数"挂上钩. 他就拼命琢磨，通过什么样的办法才能把"点"和"数"联系起来. 突然，他看见屋顶角上有一只蜘蛛拉着丝垂了下来. 一会儿，蜘蛛又顺着丝爬上去，在上边左右拉丝. 蜘蛛的"表演"使笛卡尔思路豁然开朗. 他想，可以把蜘蛛看作一个在屋子里可以上下、前后、左右运动的点，能不能把蜘蛛的每个位置用一组数确定下来呢？他又想，屋子里相邻的两面墙与地面交出了三条线，如果把地面上的墙角作为起点，把交出来的三条线作为三根数轴，那么，空间中蜘蛛的位置不是可以用这三根数轴上找到的有顺序的三个数来表示吗？于是，在蜘蛛的启示下，笛卡尔创建了直角坐标系.

直角坐标系的创建，在代数与几何之间架起了一座桥梁. 它使几何概念得以用代数的方法来描述，几何图形可以通过代数形式来表达，这样便可将先进的代数方法应用于几何学的研究. 笛卡尔在创建直角坐标系的基础上，创造了用代数方法来研究几何图形的数学分支——解析几何. 在解析几何中，动点的坐标就成了变数，这也是数学中第一次引进变数. 恩格斯高度评价笛卡尔的工作，他说："有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学."

对于坐标系，法国著名的业余数学家费马也曾研究过，并独立于笛卡尔发明了斜坐标系. 他与笛卡尔一样，对解析几何学的诞生作过贡献，从费马的著作《平面与立体轨迹引论》中可以看到他对解析几何研究的成果. 但因费马不承认负数，所以，费马研究的方程的曲线局限于第一象限. 在笛卡尔和费马之后，数学家们继承和发展了他们的解析几何思想，使之逐步成熟和完善. 1655 年，英国数学家沃利斯引进了负的纵、横坐标，使解析几何中的曲线范围扩展到了整个平面. 后来，德国数学家赫尔曼明确提出了极坐标的概念，创立了极坐标. 到 1748 年，由欧拉给出了极坐标的现代形式.

8.1 向量及运算

8.1.1 空间直角坐标系

问题 圆是平面图形,在平面直角坐标系中,其方程可表示为$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2$,而球面是空间图形,那么,怎样用代数的方法表达其方程呢?首先需要建立空间直角坐标系,进而建立空间点与有序数组之间的对应关系.

过空间一个定点O,作三条互相垂直的数轴,它们都以O点为原点,且具有相同的单位长度,这三条数轴分别称为x轴(横轴)、y轴(纵轴)和z轴(竖轴),统称为坐标轴.坐标轴的正向要符合右手法则:即伸开右手,让并拢的四指与大拇指垂直,并使四指先指向x轴的正向,然后让四指沿握拳的方向旋转$90°$指向y轴的正向,此时,大拇指的指向即为z轴的正向(图 8.1.1).这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系(一般将x轴和y轴放置在水平面上),点O叫做坐标原点或原点.

在空间直角坐标系中,每两条坐标轴可以确定一个平面,称为坐标面.其中,x轴与y轴确定的平面叫做xOy坐标面,类似地有yOz坐标面、zOx坐标面.三个坐标面把空间分成八个部分,每一部分称为一个卦限,含有x轴、y轴与z轴正半轴的那个卦限称为第Ⅰ卦限.在xOy面的上方按逆时针方向依次为第Ⅱ、第Ⅲ、第Ⅳ卦限.在xOy面的下方,与第一卦限对应的是第Ⅴ卦限,其余第Ⅵ至第Ⅷ卦限仍按逆时针方向顺次确定(图 8.1.2).

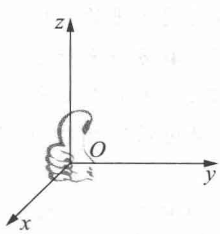

图 8.1.1

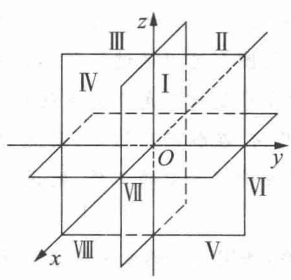

图 8.1.2

通过空间角坐标系,我们可以建立空间点与有序数组之间的对应关系.

设M为空间一点,过点M分别作垂直于x轴、y轴与z轴的平面,它们与x轴、y轴和z轴分别交于P,Q和R(图 8.1.3).设这三个点在三个坐标轴上的坐标分别为x,y和z,于是,点M就确定了唯一的一个有序数组(x,y,z);反过来,

对于给定的有序数组(x,y,z)，可分别在 x 轴、y 轴与 z 轴上找到点 P,Q 和 R，使其坐标分别为 x,y 和 z；过 P,Q 和 R 分别作垂直于 x 轴、y 轴与 z 轴的平面，这三个平面必相交于空间唯一一点 M. 这样就建立了空间点 M 和有序数组(x,y,z)之间的一一对应关系. 将有序数组(x,y,z)称为点 M 的坐标，记作 $M(x,y,z)$. x,y 和 z 依次称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标.

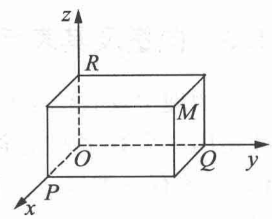

图 8.1.3

按照点的坐标的规定，位于坐标轴和坐标面上的点，其坐标各有一定的特征. 在 x 轴、y 轴及 z 轴上的点的坐标分别是$(x,0,0)$，$(0,y,0)$，$(0,0,z)$；在 xOy 面、yOz 面及 zOx 面上的点的坐标分别是$(x,y,0)$，$(0,y,z)$，$(x,0,z)$，原点 O 的坐标是$(0,0,0)$.

8.1.2　空间两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点，则这两点之间的距离为

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

证明　过 M_1,M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，则这六个平面围成一个以 M_1,M_2 为对角线的长方体(图 8.1.4). 由于 ΔM_1NM_2 和 ΔM_1PN 均为直角三角形，所以

$$\begin{aligned}d^2&=|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2\\&=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2.\end{aligned}$$

由于 $|M_1P|=|x_2-x_1|$，$PN=|y_2-y_1|$，$NM_2=|z_2-z_1|$，所以

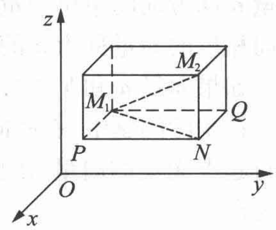

图 8.1.4

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

特殊地，点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 8.1.1　已知点 $M(a,b,b)$，$P(9,0,0)$，$Q(-1,0,0)$，且三点满足 $|MP|^2=|MQ|^2=33$，试确定 a,b 的值.

解　由题意有 $|MP|^2=|MQ|^2$，即$(9-a)^2+2b^2=(-1-a)^2+2b^2$，解得 $a=4$.

又因为 $|MP|^2=33$，即$(9-4)^2+2b^2=33$，解得 $b=\pm 2$.

8.1.3 向量及其表示

在物理学及其他学科领域,我们常见到两类量:一类量只有大小没有方向,因此是用一个数字就完全可以表示的量,如温度、长度、质量等,这类量称为数量或标量;还有一类量,它们既有大小又有方向,如力、速度、加速度等,这类量称为向量或矢量.

在印刷体中,一般用粗体字母表示向量,如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{i},\boldsymbol{F}$ 等. 有时,为了书写方便,也用字母上方加箭头的方法表示向量,如 $\vec{a},\vec{b},\vec{i},\vec{F}$ 等. 几何上,常用有向线段来表示向量,有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的指向表示向量的方向,如起点为 A,终点为 B 的向量记为 $\overrightarrow{AB}$,如图 8.1.5 所示.

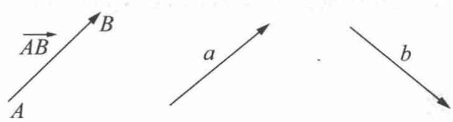

图 8.1.5

向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的模,记作 $|\boldsymbol{a}|$. 特别地,模为零的向量称为零向量,记作 $\mathbf{0}$. 规定零向量的方向为任意方向. 模为 1 的向量称为单位向量. 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量,记作 $\boldsymbol{a}^{\circ}$. 与向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量,记作 $-\boldsymbol{a}$.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等,且方向相同,则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

在实际问题中,有些向量与其起点有关,有些向量与其起点无关,我们只研究与起点无关的向量. 由向量相等定义可知,向量在空间平移前后相等,从而也称为自由向量.

8.1.4 向量的线性运算

1. 向量的加减法

定义 8.1.1 将向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合,以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形,则从起点到平行四边形的对角顶点的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图8.1.6).

这就是向量加法的平行四边形法则,由此还可推出两向量加法的三角形法则以及有限个向量加法的多边形法则.

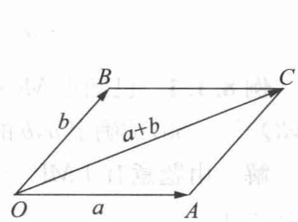

图 8.1.6

向量加法的三角形法则:平移向量 $\boldsymbol{b}$,将向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点移到向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点上,则从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量就是向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和向量(图 8.1.7).

向量加法的多边形法则：将向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 依次首尾相接，则由第一个向量的起点到最后一个向量的终点的向量就是向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的和向量，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$(图8.1.8).

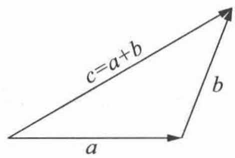

图 8.1.7

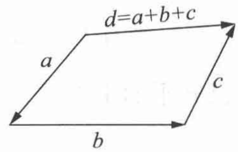

图 8.1.8

向量的加法满足下列性质：

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$；

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

定义 8.1.2 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，规定为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的负向量 $-\boldsymbol{b}$ 之和(图 8.1.9). 即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

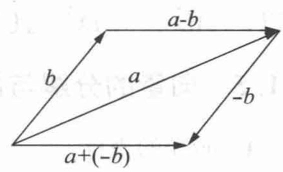

图 8.1.9

2. 向量的数乘

定义 8.1.3 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，且规定

(1) 它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；

(2) 其方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 同向，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 反向.

显然，向量 $\boldsymbol{a}$ 的负向量 $-\boldsymbol{a}$ 可看作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 -1 的乘积，即 $-\boldsymbol{a}=(-1)\boldsymbol{a}$.

向量的数乘满足下列性质(λ,μ 为实数)：

(1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$；

(2) 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$；

(3) 当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，规定 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

一般地，向量的加法运算与数乘运算统称为向量的线性运算.

另外，若 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量，则由向量数乘定义可将向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量表示为

$$\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

由此，$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ}$，即任何非零向量都可以表示为它的模与其单位向量的乘积.

例 8.1.2 证明两非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件为 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}(\lambda\neq0)$.

证明 充分性：因 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}(\lambda\neq0)$，则由定义 1.3 知，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向($\lambda>0$)或者

反向($\lambda < 0$),因此必有 $\boldsymbol{b} \parallel \boldsymbol{a}$.

必要性:因 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$,则必有 $\boldsymbol{b}^{\circ} = \pm \boldsymbol{a}^{\circ}$. 又

$$\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\boldsymbol{b}^{\circ} = |\boldsymbol{b}|(\pm \boldsymbol{a}^{\circ}) = \pm \frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a},$$

若取 $\lambda = \pm \dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|} \neq 0$,则有 $\boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{a}$.

例 8.1.3 已知平面上四边形的对角线互相平分,证明该四边形为平行四边形.

证明 设四边形为 $ABCD$,如图 8.1.10 所示,令 $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BD} = \boldsymbol{b}$,则

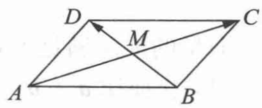

图 8.1.10

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a},$$

$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\boldsymbol{b},$$

从而,$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD} = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,

所以,$|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$ 且 $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$,即四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

8.1.5 向量的分解与向量的坐标

1. 向径的坐标

在空间直角坐标系中,以 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x 轴、y 轴、z 轴正向的单位向量,并称它们为基本单位向量. 起点在坐标原点 O,终点为空间点 M 的向量 $\overrightarrow{OM}$,称为点 M 的向径,记为 $\boldsymbol{r}$,即 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$. 下面讨论如何用基本单位向量表示向径.

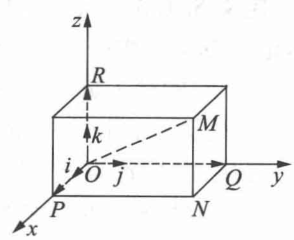

图 8.1.11

设 $M(x,y,z)$ 为空间点,N 为 M 在 xOy 面上的投影. 过点 M 分别作三条坐标轴的垂面,交 x 轴、y 轴、z 轴于 P,Q,R(图 8.1.11). 显然,向量 $\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}$,$\overrightarrow{OQ} = y\boldsymbol{j}$,$\overrightarrow{OR} = z\boldsymbol{k}$. 从而有

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

称上式为向径 $\boldsymbol{r}$ 的分解式.

由此可知,向径 $\boldsymbol{r}$ 可以唯一确定出有序数组 (x,y,z);反之,有序数组 (x,y,z) 也可以唯一确定出向径 $\boldsymbol{r}$. 因此,向径 $\boldsymbol{r}$ 与有序数组 (x,y,z) 一一对应. 我们把有序数组 (x,y,z) 称为向径 $\boldsymbol{r}$ 的坐标,并将 $\boldsymbol{r}$ 简记为 $\boldsymbol{r} = \{x,y,z\}$,并称上式为向径 $\boldsymbol{r}$ 的坐标表示式.

2. 向量的坐标

设空间一般向量 $\boldsymbol{a}$ 以 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为起点，以 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为终点(图 8.1.12)，连接 OM_1，OM_2，则有

$$\overrightarrow{OM_2}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}=\{x_2,y_2,z_2\},$$

$$\overrightarrow{OM_1}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}=\{x_1,y_1,z_1\},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}&=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\\&=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}.\end{aligned}$$

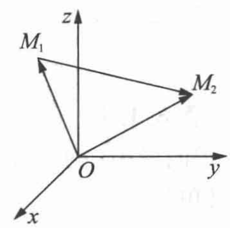

图 8.1.12

若记 $a_x=x_2-x_1$，$a_y=y_2-y_1$，$a_z=z_2-z_1$，则有

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\{a_x,a_y,a_z\},$$

其中，a_x，a_y，a_z 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，$a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的分解式，$\{a_x,a_y,a_z\}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标式. 由此可知，向量的坐标等于它的终点与起点的对应坐标之差.

8.1.6　向量的模与方向余弦的坐标表示

设向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，它可以看作是以原点为起点、以 $M(a_x,a_y,a_z)$ 为终点的向量，由两点间的距离公式得

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

上式称为向量的模的坐标表示式. 若 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量，即 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则有

$$\boldsymbol{a}^\circ=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left\{\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\right\}.$$

为了用坐标表示向量的方向，我们引入向量的方向角与方向余弦的概念.

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴正向的夹角 $\alpha,\beta,\gamma\,(0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi)$，称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角；它们的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦. 当一个非零向量的三个方向角确定时，则其方向也就确定了.

设非零向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，方向角为 α,β,γ. 由于 $\boldsymbol{a}$ 与以点 $M(a_x,a_y,a_z)$ 为终点的向径 $\overrightarrow{OM}$ 相等，所以，$\overrightarrow{OM}$ 的方向角也为 α,β,γ. 由图 8.1.13 可知：

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

以上三式称为向量a的方向余弦的坐标表示式.

由此可得 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$;

$$\boldsymbol{a}^\circ = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}.$$

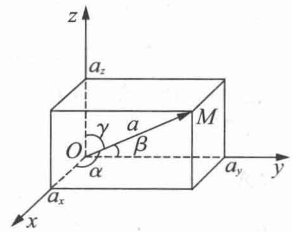

图 8.1.13

例 8.1.4 已知空间两点$A(2,2,\sqrt{2})$和$B(1,3,0)$. 求向量$\overrightarrow{AB}$的坐标表示式、模、方向余弦、方向角及其单位向量.

解 由题意知$\overrightarrow{AB} = \{1-2, 3-2, 0-\sqrt{2}\} = \{-1, 1, -\sqrt{2}\}$,故

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2,$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \cos\beta = \frac{1}{2}, \cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{3}, \gamma = \frac{3\pi}{4},$$

$$\overrightarrow{AB}^\circ = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

8.1.7 向量线性运算的坐标表示

引入向量的坐标表示式以后,便能用坐标来进行向量的线性运算. 设向量$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$, λ为实数,则有

(1) $\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (a_x \pm b_x)\boldsymbol{i} + (a_y \pm b_y)\boldsymbol{j} + (a_z \pm b_z)\boldsymbol{k} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\}$;

(2) $\lambda\boldsymbol{a} = \lambda(a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) = \lambda a_x\boldsymbol{i} + \lambda a_y\boldsymbol{j} + \lambda a_z\boldsymbol{k} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$.

例 8.1.5 力$\boldsymbol{F}_1 = \{1,2,3\}$,$\boldsymbol{F}_2 = \{-2,3,-4\}$,$\boldsymbol{F}_3 = \{3,-4,5\}$同时作用于一点,求合力$\boldsymbol{R}$的大小.

解 由题意知

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = \{1+(-2)+3, 2+3+(-4), 3+(-4)+5\} = \{2,1,4\},$$

故合力$\boldsymbol{R}$的大小为$|\boldsymbol{R}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{21}$.

习题 8.1

1. 指出下列各点位置的特殊性质.

(1) $(4,0,0)$; (2) $(0,-7,0)$;

(3) $(0,-7,2)$; (4) $(4,0,3)$.

2. 当 P 点处于以下位置时，指出它的坐标所具有的特点.

(1) P 点在 zOx 面上；

(2) P 点在 x 轴上；

(3) P 点在与 yOz 面平行且相互距离为 2 的平面上；

(4) P 点在与 z 轴垂直且与原点相距为 5 的平面上.

3. 在平面直角坐标系和空间直角坐标系中，$x=a$(常数)的点构成的图形分别是什么?

4. 一立方体放置在 xOy 面上，其底面中心与原点重合，底面的顶点在 x 轴与 y 轴上，已知立方体的边长为 a，求它各顶点的坐标.

5. 求点 $M(1,-2,3)$ 到坐标原点和各坐标轴之间的距离.

6. 证明以 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

7. 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

8. 证明三角形两边中点的连线平行于第三边且等于第三边的一半.

9. 已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 的终点 $B(2,-1,7)$，$\overrightarrow{AB}=4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$，求起点 A 的坐标.

10. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\{3,5,-1\}$，$\boldsymbol{b}=\{2,2,3\}$，$\boldsymbol{c}=\{2,-1,-3\}$，求向量 $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

11. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 的模 $|\boldsymbol{a}|=3$，$\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\cos\beta=\dfrac{2}{3}$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式.

12. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ 及 $\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，试用对应的单位向量 $\boldsymbol{a}^\circ$，$\boldsymbol{b}^\circ$，$\boldsymbol{c}^\circ$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$.

13. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=\{6,7,-6\}$ 的单位向量.

14. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角为 α,β,γ，已知其中两角，求第三角.

(1) $\alpha=60^\circ,\beta=120^\circ$；(2) $\alpha=135^\circ,\beta=60^\circ$.

15. 已知点 P 到点 $A(0,0,12)$ 的距离是 7，$\overrightarrow{PA}$ 的方向余弦是 $\dfrac{2}{7}$，$\dfrac{3}{7}$，$\dfrac{6}{7}$，求点 P 的坐标.

8.2　向量的乘积运算

8.2.1　向量的数量积

1. 数量积的定义

实例 1　恒力做功问题

设一物体在恒力 $\boldsymbol{F}$ 作用下沿直线从 A 点移动到 B 点，位移 $s=\overrightarrow{AB}$，θ 为 s 与 $\boldsymbol{F}$ 的夹角(图 8.2.1)，由物理学知道，力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta.$$

两向量的这种运算结果是个数量,在数学上定义成一种乘法——数量积.

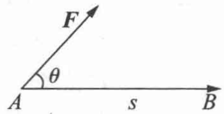

图 8.2.1

定义 8.2.1 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积等于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模与它们之间夹角 θ 的余弦的乘积,记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta. \tag{8.2.1}$$

上述定义中两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 是指将它们移到同一起点所形成的不大于 π 的角,也记作 $(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$.

式(8.2.1)中的因子 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 称为向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影,记作 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$,即 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos\theta$. 当 θ 是锐角时,$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 所在直线上投影线段的长度,当 θ 是钝角时,$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ 是投影线段的长度的相反数. 同样因子 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影,记作 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$,即 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$. 因此,有投影公式

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cdot\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}.$$

根据数量积的定义,恒力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功是力 $\boldsymbol{F}$ 和位移 $\boldsymbol{s}$ 的数量积,即 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$.

由向量数量积的定义可以推得

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2$;$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=0$;

(2) 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

证明 (2) 由于 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta=0$(而 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$, $|\boldsymbol{b}|\neq 0$) $\Leftrightarrow\cos\theta=0$(又 $\theta\in[0,\pi]$)$\Leftrightarrow\theta=\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

注意 两向量的数量积用记号"·"表示乘积,因此,数量积也称为点积或内积.

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2) 分配律 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$;

(3) 结合律 $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$($\lambda$ 为常数).

证明 (2) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|\cdot\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|\cdot(\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}+\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c})$

$=|\boldsymbol{a}|\cdot\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{a}|\cdot\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

(3) 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角为 θ,

若 $\lambda>0$,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向,故 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角仍为 θ,于是

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=|\lambda\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta=\lambda\cdot(|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta)=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$$

若 $\lambda<0$,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向,故 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角仍为 $\pi-\theta$,于是

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=|\lambda\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos(\pi-\theta)=\lambda\cdot(|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta)=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$$

若 $\lambda=0$,$(0\cdot\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=0\cdot\boldsymbol{b}=0\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta=0=0\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

综上,有$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$成立.

类似可证$\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

2. 数量积的基本性质

例 8.2.1　证明向量$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$与向量$\boldsymbol{c}$垂直.

证明　因为

$$[(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}]\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=0,$$

所以原命题成立.

3. 数量积的坐标表示式

当向量以坐标形式给出时,两向量的数量积如何进行运算呢?

设向量$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=&(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}\\&+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

由于$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$互相垂直且均为单位向量,所以

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0,\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,$$

因而得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{8.2.2}$$

式(8.2.2)就是两向量数量积的坐标表示式,即两个向量的数量积等于它们对应坐标的乘积之和.

由于$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$,所以,当$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为非零向量时,有

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \tag{8.2.3}$$

式(8.2.3)就是两向量夹角余弦的坐标表示式.由此可得两个非零向量垂直的充分必要条件的坐标表示式为

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0. \tag{8.2.4}$$

例 8.2.2　已知$\triangle ABC$的三个顶点为$A(1,-1,0)$,$B(-1,0,-1)$,$C(3,4,1)$,证明$\triangle ABC$为直角三角形.

证明　三角形各边所在的向量为

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB}=\{(-1)-1,0-(-1),-1-0\}=\{-2,1,-1\},\\&\overrightarrow{BC}=\{3-(-1),4-0,1-(-1)\}=\{4,4,2\},\\&\overrightarrow{CA}=\{1-3,-1-4,0-1\}=\{-2,-5,-1\}.\end{aligned}$$