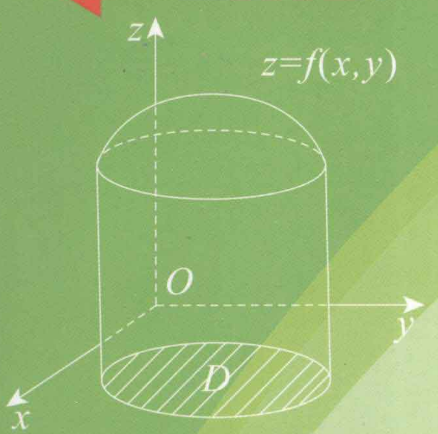
文都教育

2013

无师自通

考研数学复习大全

数学二



策划◎文都考研命题研究中心

编著◎汤家凤

基础乃解题之本，本书揭示其核心本质

题型为高分之石，书中归纳其专题技巧

数学满分学子曾经使用的内部资料最新面世！

中国时代经济出版社

2013

无师自通
考研数学复习大全

数学二

策划◎文都考研命题研究中心

编著◎汤家凤

图书在版编目(CIP)数据

考研数学复习大全·数学二/汤家凤编著. —北京:
中国时代经济出版社,2012.3
ISBN 978-7-5119-1066-0

Ⅰ.①考… Ⅱ.①汤… Ⅲ.①高等数学—研究生—
入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 028938 号

书　　名:考研数学复习大全·数学二
编　　著:汤家凤

出版发行:中国时代经济出版社
社　　址:北京市丰台区右安门外玉林里 25 号
邮政编码:100069
发行热线:(010)83910203
传　　真:(010)83910203
网　　址:www.cmepub.com.cn
电子邮箱:zgsdjj@hotmail.com
经　　销:各地新华书店
印　　刷:北京银祥福利印刷厂
开　　本:787×1092　1/16
字　　数:480 千字
印　　张:21.5
版　　次:2012 年 3 月第 1 版
印　　次:2012 年 3 月第 1 次印刷
书　　号:ISBN 978-7-5119-1066
定　　价:48.00 元

前　言

从1987年开始，工程类和经济类全国硕士研究生入学考试数学课程进行全国统一命题。从2008年开始，原来的数学一至数学四合并成数学一至数学三，经过若干年的调整，现在考试大纲基本稳定。为了帮助广大考生熟悉考试大纲和考试要求，在较短时间内全面、系统、扎实地掌握高等数学（微积分）、线性代数、概率统计的理论体系、方法体系，提高数学运算、逻辑推理、实际应用及应试能力，作者根据自己十多年从事研究生入学考试指导的经验，凭借多年担任研究生入学考试阅卷组长的心得，精心组织材料、系统归纳整理而成本书。

本书的特点体现在如下几个方面：

1. 以独特的视角建立完善的理论体系和方法体系，让数学变得不再可怕和晦涩难懂，使理论和方法通俗易懂、浑然一体。考研数学涉及的三个科目均有其自身的理论体系，如果孤立地看每一个考点，若干个概念、性质、定理堆砌，那么考生很难真正掌握这些知识点；而本书对知识从发展的角度来分析其背景，挖掘其来源，使结论的得出显得水到渠成，更容易接受。同时，数学学习与考试离不开解题，这就必然离不开解题方法的探索。作者将考研数学会用到的基本方法进行总结分类，也归纳整理出自己独创的处理某一类问题的方法体系，可以帮助考生轻松解决相应问题。

2. 对重点的理论和方法增加了拓展延伸的内容，这部分内容可以更好地帮助考生理解考试的重点，便于考生掌握学习数学的独特方法。理论拓展内容将基础知识拓宽加深，或将边缘的易于混淆的结论整合讲解以正视听；方法拓展内容是作者多年一线教学中发现的行之有效且巧妙的方法的汇总。之所以说作者的方法行之有效，不仅仅是因为它能快速准确解答题目，更重要的是使用过的考生觉得这样的方法易接受、易掌握。

3. 本书内容具有前瞻性和权威性。作者一直在教学和科研第一线，十多年的数学考试指导经验和阅卷经验使得其对研究生入学统一考试重点与命题趋势熟稔于心，同时又充分了解考生之复习瓶颈所在，二者的结合决定了本书既能够体现未来考试方向，又足够专业到位。

4. 本书颠覆了传统数学复习理念，倡导理清知识本源，建立方法体系，从源头上解决解题瓶颈。

本书的体系结构包括：

1. 大纲点击。介绍各章的考试要求，考生通过此板块了解考试范围与重点。

2. 基础复习模块。搭建各部分的理论体系，将考试中要求的基本概念、原理、考点逐一讲解，并突出重点内容，难以理解或容易混淆的结论作者特别给出了理解与记忆的方法。

3. 知识延拓模块。对重要理论和方法以及考试的重点给出了知识体系的进一步深化延展。

4. 重点题型分析。建立知识点的方法体系，对常考点、难点及重要方法进行全面总结和梳理。

5. 测试题。巩固所学的理论和方法，检测各部分的学习效果，更好地适应考试。

广大学子的殷切期盼和文都教育集团领导的大力鼓励是作者写作本书的动力，在写作过程中广大同仁给予了巨大和无私的帮助，尤其非常感激师潭老师的辛勤劳动。由于本书写作时间紧，加之作者水平所限，不足和错误在所难免，欢迎广大学子和同仁指教。

编　者

2012年3月

目　　录

第一章 函数、极限、连续

大纲点击

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，并会建立应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限的关系.

6. 掌握极限的性质及四则运算法则.

7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限.

9. 理解函数连续性的概念(含左连续和右连续)，会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

基础复习模块——基本概念、原理、考点

一、函数的概念及函数的初等特性

(一) 基本概念

1. 邻域与去心邻域——设 $\delta > 0$，称集合 $\{x \mid |x-a| < \delta\}$ 为 a 的邻域，记为 $U(a,\delta)$；称集合 $\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$ 为 a 的去心 δ 邻域，记为 $\overset{0}{U}(a,\delta)$，如图 1-1-1.

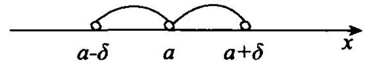


图 1-1-1

2. 函数——设 D 为一个数集，x,y 为两个变量，若对任意的 $x \in D$，按照某种对应关系，总有唯一确定的 y 与之对应，称 y 为 x 的函数，记为 $y = f(x)$.

3. 函数关系的常用表示法

(1) 显函数法——称 $y = f(x)(x \in D)$ 为显函数.

(2) 隐函数法——若函数 $y = f(x)$ 由方程 $F(x,y) = 0$ 确定(即对任意的 $x \in D$，通过 $F(x,y) = 0$ 有唯一的 y 与之对应)，则称此函数为隐函数.

(3) 参数方程——若 x,y 的函数关系由 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 确定(即对任意的 $x \in D$，由 $x = \varphi(t)$ 确定唯一的 t，再由 t 确定唯一的 y)，则称 x,y 由参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 确定函数.

【注解】

几个特殊的函数：

(1) 取整函数 $y=[x]=\begin{cases}m, & x=m,\\ m, & m<x<m+1.\end{cases}\quad (m\in\mathbf{Z})$

(2) Dirichlet 函数 $y=D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}.\end{cases}$

(3) 符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$

4. 反函数 —— 设 $y=f(x)(x\in D)$，其值域为 R_0，若对任意的 $y\in\mathbf{R}_0$，按照 $y=f(x)$ 确定唯一的一个 $x\in D$，于是确定了 x 为 y 的函数，称此函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=\varphi(y)$.

【例】 判断 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性，并求其反函数.

【解】 显然 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，因为

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

所以 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 为奇函数.

由 $\begin{cases}y=\ln(x+\sqrt{1+x^2}),\\ -y=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x+\sqrt{1+x^2}=e^y,\\ -x+\sqrt{1+x^2}=e^{-y}.\end{cases}$ 两式相减得 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的反函数为 $x=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$，即 $x=\operatorname{sh}y$.

5. 基本初等函数 —— 幂函数 x^a，指数函数 $a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$，对数函数 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$，三角函数 $\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sec x,\csc x$，反三角函数 $\arcsin x,\arccos x,\arctan x,\operatorname{arccot}x$ 统称为基本初等函数.

6. 初等函数 —— 由常数与基本初等函数经过有限次的四则运算或函数的复合运算而成的一个表达式称为初等函数.

(二) 函数的初等特性

1. 单调性 —— 设 $f(x)$ 为定义于 D 上的函数，若对任意的 $x_1,x_2\in D$ 且 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)<f(x_2)$，称函数 $f(x)$ 在 D 上为单调增函数，若有 $f(x_1)>f(x_2)$，称函数 $f(x)$ 在 D 上为减函数.

2. 有界性 —— 设 $f(x)$ 为定义于 D 上的函数，若存在 $M>0$，对一切的 $x\in D$，有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，称 $f(x)$ 在 D 上为有界函数.

如：$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ -1, & x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q},\end{cases}$ 显然函数 $D(x)$ 在 R 上有界.

3. 奇偶性 —— 设 $f(x)$ 为定义于 D 上的函数，且 D 关于原点对称，若对任意的 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，称 $f(x)$ 在 D 上为偶函数，若 $f(-x)=-f(x)$，称 $f(x)$ 在 D 上为奇函数. 奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

4. 周期性 —— 设 $f(x)$ 为定义于 D 上的函数，$T>0$ 且对任意的 $x\in D$，$x+T\in D$，若对任意 $x\in D$，有 $f(x+T)=f(x)$，称 $f(x)$ 为周期函数.

【例 1】 证明：任一个定义域关于原点对称的函数总可以表示成一个奇函数与一个偶函数之和.

【证明】　设 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

令 $G(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$，$H(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$，显然 $G(x)$ 为偶函数，$H(x)$ 为奇函数，且 $f(x)=G(x)+H(x)$.

【例 2】　研究 $f(x)=x-[x]$ 的周期性.

【解】　对取整函数$[x]$来说，当 $m\leqslant x<m+1$ 时，$[x]=m(m=\cdots,-1,0,1,2,\cdots)$，$[x+1]=m+1=[x]+1$. 对函数 $f(x)=x-[x]$，显然 $f(x+1)=f(x)$，故 $f(x)$ 为以 1 为周期的函数.

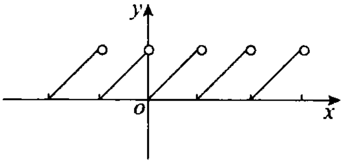


图 1-1-2

如图 1-1-2，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & x=1.\end{cases}$

【例 3】　设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x\leqslant 0,\\ 1-x^2, & x>0,\end{cases}$　$g(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x^2, & x\geqslant 0,\end{cases}$　求 $g[f(x)]$.

【解】　$g[f(x)]=\begin{cases}f^2(x), & f(x)<0,\\ -f^2(x), & f(x)\geqslant 0.\end{cases}$

$f(x)<0$ 等价于$\begin{cases}1+x<0,\\ x\leqslant 0\end{cases}$ 或$\begin{cases}1-x^2<0,\\ x>0,\end{cases}$ 解得 $x<-1$ 或 $x>1$；

$f(x)\geqslant 0$ 等价于$\begin{cases}1+x\geqslant 0,\\ x\leqslant 0\end{cases}$ 或$\begin{cases}1-x^2\geqslant 0,\\ x>0,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 或 $0<x\leqslant 1$.

所以 $g[f(x)]=\begin{cases}(1+x)^2, & x<-1,\\ (1-x^2)^2, & x>1,\\ -(1+x)^2, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ -(1-x^2)^2, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$

二、极限

(一) 极限的基本概念

1. 数列极限的定义($\varepsilon-N$ 定义)—— 若对任意的 $\varepsilon>0$，总存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-A|<\varepsilon$，称 A 为数列$\{a_n\}$的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 或 $a_n\to A(n\to\infty)$.

2. 函数在自变量趋于有穷值时的极限定义($\varepsilon-\delta$ 定义)—— 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的去心邻域内有定义，若对任意的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to a$ 时的极限，记为$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to a)$.

3. 函数在自变量趋于无穷时的极限定义($\varepsilon-X$ 定义)—— 设函数 $f(x)$ 在 $|x|>M$ 的邻域内有定义，若对任意的 $\varepsilon>0$，总存在 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$.

4. 左右极限的定义 —— 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的去心邻域内有定义，若对任意的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，当 $0<a-x<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，称 A 为函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的左极限，记为$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=A$ 或 $f(a-0)=A$；若对任意的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，当 $0<x-a<\delta$ 时，有 $|f(x)-B|<\varepsilon$，称 B 为函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的右极限，记为$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=B$ 或 $f(a+0)=B$.

【注解】

(1) 函数在一点的极限与函数在该点是否有定义无关，如 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，显然 $f(x)$ 在 $x=1$ 处无定义，但 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$.

(2) 函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处极限存在的充分必要条件是 $f(a-0)$ 与 $f(a+0)$ 都存在且相等.

(3) 以下三类函数研究极限需要考虑左右极限：

分段函数在分界点处的极限；

含有 $a^{\frac{k}{x-b}}(a>0)$ 的函数当 $x\to b$ 时的极限；

含绝对值的函数的极限.

【例 1】 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x>0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}, & x<0,\end{cases}$ 研究 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 是否存在.

【解】
$$f(0-0)=\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to0-}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2,$$
$$f(0+0)=\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$
因为 $f(0-0)\neq f(0+0)$，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在.

【例 2】 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}, & x\neq0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 研究 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 是否存在.

【解】 当 $x\to0-$ 时 $\dfrac{1}{x}\to-\infty$，从而 $2^{\frac{1}{x}}\to0$，所以 $f(0-0)=1$；

当 $x\to0+$ 时 $\dfrac{1}{x}\to+\infty$，从而 $2^{\frac{1}{x}}\to+\infty$，所以 $f(0+0)=-1$.

因为 $f(0-0)\neq f(0+0)$，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在.

【例 3】 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & x\neq0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 研究 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 是否存在.

【解】 $f(0-0)=\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{-x}{x}=-1$，$f(0+0)=\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{x}{x}=1$，

因为 $f(0-0)\neq f(0+0)$，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在.

(二) 无穷小

1. 无穷小的定义 —— 以零为极限的函数称为无穷小.

【注解】

(1) 无穷小是一种函数，且只有在自变量的某种趋向下函数以零为极限，才称此函数为无穷小. 如 $3(x-1)^2$ 当 $x\to1$ 时是无穷小，当 $x\to2$ 时不是无穷小. 一般情况下一个函数是否为无穷小与自变量的趋向有关.

(2) 无穷小与0是不同的，0是无穷小，但无穷小不一定是0，0是唯一一个与自变量趋向无关的无穷小.

2. 无穷小之间的层次关系 —— 设 α,β 都是自变量相同趋向下的无穷小.

(1) 若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，称 β 是 α 的高阶无穷小，记为 $\beta=o(\alpha)$.

(2) 若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=k\neq 0$，称 α 与 β 为同阶无穷小，记为 $\beta=O(\alpha)$. 特别地，若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，称 α 与 β 为等价无穷小，记为 $\alpha\sim\beta$.

3. 无穷小的基本性质

(1) 有限个无穷小的和、差、积还是无穷小.

(2) 有界函数与无穷小之积还是无穷小.

(3) 常数与无穷小之积还是无穷小.

(4)(重要性质) $\lim f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$，其中 α 是相同趋势下的无穷小.

4. 等价无穷小的性质

(1) $\alpha\sim\alpha$.

(2) 若 $\alpha\sim\beta$，则 $\beta\sim\alpha$.

(3) 若 $\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma$，则 $\alpha\sim\gamma$.

(4)(重要性质) 若 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$，且 $\lim\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}=A$，则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=A$.

(5) $\alpha\sim\beta$ 的充分必要条件是 $\beta=\alpha+o(\alpha)$.

5. 当 $x\to 0$ 时常用的等价无穷小

(1) $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$.

(2) $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$.　　(3) $(1+x)^a-1\sim ax$.　　(4) $a^x-1\sim x\ln a$.

【例1】 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x^2}-e}{x\ln x}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x^2}-e}{x\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x^2}-e}{\ln x}=e\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x^2-1}-1}{\ln[1+(x-1)]}=e\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2e$.

【例2】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\ln(1+2x)\arcsin x}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\ln(1+2x)\arcsin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$.

【例3】 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x\arcsin x}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x\arcsin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{x^2}-1)+(1-\cos x)}{x^2}$，

因为 $e^{x^2}-1\sim x^2,1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x\arcsin x}=\dfrac{3}{2}$.

【例4】 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2\ln(1+x)}$.

【解】 错误解法：因为 $x\sim\tan x,x\sim\sin x$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$.

正确解法：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

【例 5】 计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2+x)^x-2^x}{x\ln(1+x)}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2+x)^x-2^x}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}2^x\cdot\dfrac{\left(\dfrac{2+x}{2}\right)^x-1}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^x-1}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{2}}{x}=\frac{1}{2}.$$

【例 6】 当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=\int_0^{\sin^2 x}\dfrac{e^t-1}{t}dt$，$\beta(x)=e^x-e^{\tan x}$，$\gamma(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}$ 按无穷小阶数由低到高的次序为 ( )

(A)α,β,γ (B)β,α,γ (C)α,γ,β (D)γ,α,β

【解】 因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot\dfrac{e^{\sin^2 x}-1}{\sin^2 x}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{nx^{n-1}}$，取 $n-1=1$，即 $n=2$，由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=1$ 得 $\alpha(x)\sim x^2$；

因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\beta(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\tan x}\dfrac{e^{x-\tan x}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sec^2 x}{3x^2}=-\dfrac{1}{3}$，所以 $\beta(x)\sim-\dfrac{1}{3}x^3$；

再由 $\gamma(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}=[(1+x)^{\frac{1}{2}}-1]-[(1+x)^{\frac{1}{3}}-1]\sim\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{3}=\dfrac{x}{6}$，于是无穷小由低到高的次序为 γ,α,β，应选(D).

【注解】

等价无穷小在求不定型极限中是非常重要的，但在使用过程中如果使用不当就会导致错误的结果. 不定型极限中使用等价无穷小注意以下几个原则：

(1) 若表达式中分子或分母是几项相乘或相除，其中某项极限存在且不为零可以先计算出来(加减法不适用).

(2) 若表达式中分子或分母是几项相乘，计算极限时可使用等价无穷小代替.

(3) 若表达式的分子或分母是加减法，达到精确度时，可以使用等价无穷小；精确度不够时不可使用等价无穷小，如$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)+1-\cos x}{x^2}$，因为分母是2阶无穷小，所以可以用 $\ln(1+x^2)\sim x^2$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，从而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)+1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\dfrac{x^2}{2}}{x^2}=\dfrac{3}{2}$；

又如$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$，因为分母为三阶无穷小，若用 $\sin x\sim x$，则会导致错误的结果，事实上

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

(三)极限的基本性质

1.(唯一性)若数列或函数极限存在,则极限必唯一.

函数极限大于零,则去心邻域大于零;函数极限小于零,则去心邻域小于零

2.(保号性)

定理1(极限第一保号性(重要性质)) 若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A>0(<0)$,则存在$\delta>0$,当$0<|x-a|<\delta$时,有$f(x)>0(<0)$.

定理2(极限第二保号性) 若$f(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$,且$\lim f(x)=A$,则$A\geqslant 0(\leqslant 0)$.

函数不负,则极限不负;函数不正,则极限不正

【注解】

若$f(x)>0(<0)$,且$\lim f(x)=A$,不一定能推出$A>0(<0)$,如

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}>0,\text{但}\lim_{x\to\infty}f(x)=0.$$

定理3(极限第三保号性) 若$f(x)\geqslant g(x)$,且$\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$,则$A\geqslant B$.

3.(有界性)

定理4(数列的有界性) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在,则数列$\{a_n\}$有界.

定理5(函数的局部有界性) 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$,则存在$M>0$及$\delta>0$,当$0<|x-a|<\delta$时,$|f(x)|\leqslant M$.

4.(列与子列极限的关系)若列极限存在,则其任意子列极限也存在且相等,反之不对.

【例1】 设$a_n=(-1)^n$,研究$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$是否存在.

【解】 因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}=-1$,而$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=1$,即数列两个子列的极限不相等,所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$不存在.

【例2】 研究$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$的存在性.

【解】 取$x_n=\frac{1}{2n\pi}\to 0(n\to\infty)$,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\cos\frac{1}{x_n}=\infty$;取$y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\to 0(n\to\infty)$,而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}\cos\frac{1}{y_n}=0$.所以$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$不存在,且不是无穷大.

【例3】 求$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}\right]$.

【解】 因为

$$\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-\mathrm{e}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-\mathrm{e}}{\frac{1}{x}}\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-\mathrm{e}}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+t)}{t}}-\mathrm{e}}{t}=\mathrm{e}\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+t)}{t}-1}-1}{t}=\mathrm{e}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\ln(1+t)}{t}-1}{t}$$

$$=\mathrm{e}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}=\mathrm{e}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=-\frac{\mathrm{e}}{2},$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}\right]=-\frac{\mathrm{e}}{2}$.