文登教育集团课堂用书
聚骄公司全心专业设计

FOCUS 聚焦图书

传承辉煌的历史 **2009版** 开启成功的未来

考研数学 模拟考场15套

（数学一）

主编 陈文灯
编审 潘正义

本书为复习中后期与考场接轨的标准化演练材料

世界图书出版公司

文登教育集团课堂用书
聚骄公司全心专业设计

FOCUS 聚焦图书

传承辉煌的历史 2009版 开启成功的未来

考研数学模拟考场15套

（数学一）

主编 陈文灯
编审 潘正义

本书为复习中后期与考场接轨的标准化演练材料

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

考研数学模拟考场15套.1/陈文灯等编著.—北京:世界图书出版公司北京公司,2005.7 (2008.8修订)

ISBN 978-7-5062-5453-3

Ⅰ.考… Ⅱ.陈… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.01

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第055393号

考研数学模拟考场15套(数学一)

主　　编:陈文灯
责任编辑:世　华
装帧设计:余曙敏

出　　版:世界图书出版公司北京公司
发　　行:世界图书出版公司北京公司
（北京朝内大街137号　邮编:100010　电话:010—88861708）
销　　售:各地新华书店
印　　刷:北京忠信诚胶印厂

开　　本:787×1092毫米　1/16
印　　张:15.25
字　　数:244千字
版　　次:2008年8月第5版　2008年8月第1次印刷

ISBN 978-7-5062-5453-3/H·498　　定价:23.50元

服务热线:010—88861708

致读者

众所周知，数学是当今所有学科中最基础，也是最重要的一门学科，任何人想在学业中有所发现、有所发明、有所创造就必须以数学为工具、为武器。“遥望考研通天道，欲向谁家借舟桥。历数月宫折桂者，全凭数学逞英豪”。数学分值150分，弄通弄透了，全拿；弄不明白，可能全瞎！但是现今有不少同学谈“数”色变，放弃原本钟爱的专业，改报不考数学的陌生专业，真是太可惜、太遗憾了。

数学果真那么难考吗？许多文科专业报考理工类、经济管理类专业的考研数学高分者告诉我们：只要有毅力、有恒心，夯实数学基础，通过题型掌握解题方法和技巧，数学是完全可以考好的。

数学没有考好的考生，**失分的原因主要有以下四个方面：**

✻ 对概念没有彻底搞清楚，一知半解，似是而非。这种做题就把握不准，容易犯“南辕北辙”的错误。

✻ 定理公式只记“形式”，不记“本质”，尤其是“前提条件”。这样似乎题也做完了，但是“劳而无功”。因为是在错误条件下得出的错误结论，是不会被认可的。

✻ 基本运算能力不强。现在的考研数学试卷有两大特点：一是大题量，二是大计算量。如果平时不多做练习，不多记一些解题方法和技巧，做题速度自然快不了，成绩当然是不可能上去的。

✻ 格式不规范，推理不严谨。数学推理非常严谨，环环相扣，来不得半点的“错位”和“突兀”，尤其是综合题（这类题的比重有逐年增加趋势）。有如一堆乱丝，如果理不出头绪，那就会越做越无头绪，越做越乱。

为了帮助考研同学多得分、少失分、考高分，我们编写了这15套难度与真题相当、强调基础、题型新颖丰富多样和技巧性较高的模拟训练试题。

如何使用，效率才能最高？高分学员的经验是：

(1)“复习指南”至少看完两遍之后，再做试卷可收“事半功倍”的效果；

(2)做完至少8套试卷后要归纳总结；

(3)根据自己做题的情况，查漏补缺，有针对性地找些题做做，发扬优势，弥补不足。

汗水脸上流，
胜券手中握。

祝同学们成功！

陈文灯

2008年8月

目录

模拟考场（一） ………………………………………………………… （1）

●分析·详解·评注 ………………………………………………… （99）

模拟考场（二） ………………………………………………………… （7）

●分析·详解·评注 ………………………………………………… （107）

模拟考场（三） ………………………………………………………… （14）

●分析·详解·评注 ………………………………………………… （115）

模拟考场（四） ………………………………………………………… （20）

●分析·详解·评注 ………………………………………………… （124）

模拟考场（五） ………………………………………………………… （26）

●分析·详解·评注 ………………………………………………… （133）

模拟考场（六） ………………………………………………………… （32）

●分析·详解·评注 ………………………………………………… （141）

模拟考场（七） ………………………………………………………… （38）

●分析·详解·评注 ………………………………………………… （151）

模拟考场（八） ………………………………………………………… （44）

●分析·详解·评注 ………………………………………………… （161）

模拟考场（九） ………………………………………………………… （51）

●分析·详解·评注 ………………………………………………… （171）

模拟考场（十） ………………………………………………………… （58）

●分析·详解·评注 ………………………………………………… （181）

模拟考场（十一） ……………………………………………………… （65）

●分析·详解·评注 ………………………………………………… （191）

模拟考场（十二） ……………………………………………………… （72）

●分析·详解·评注 ………………………………………………… （201）

模拟考场（十三） ………………………………………………………… (79)
● 分析·详解·评注 ………………………………………………… (211)
模拟考场（十四） ………………………………………………………… (86)
● 分析·详解·评注 ………………………………………………… (221)
模拟考场（十五） ………………………………………………………… (92)
● 分析·详解·评注 ………………………………………………… (230)

模拟考场(一)

考生注意:(1) 本试卷共 23 大题,满分 150 分.

(2) 根据国家标准,试卷中的正切函数、余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 $\tan x$、$\cot x$、$\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 表示.

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设函数 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续的单调增加的奇函数,$F(x)=\int_0^x(2t-x)f(x-t)dt$,则 $F(x)$ 是

(A) 单调增加的非奇非偶函数. (B) 单调减少的非奇非偶函数.

(C) 单调增加的奇函数. (D) 单调减少的奇函数. 【D】

(2) 设在全平面上有 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}<0$,$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}>0$,则在下列条件中使 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的是

(A) $x_1<x_2,\ y_1<y_2$. (B) $x_1<x_2,\ y_1>y_2$.

(C) $x_1>x_2,\ y_1<y_2$. (D) $x_1>x_2,\ y_1>y_2$. 【C】

(3) 设 $f(x,y)$ 为连续函数,则使 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)dxdy=4\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 成立的充分条件是

(A) $f(-x,-y)=f(x,y)$.

(B) $f(-x,-y)=-f(x,y)$.

(C) $f(-x,y)=f(x,-y)=-f(x,y)$.

(D) $f(-x,y)=f(x,-y)=f(x,y)$. 【A】

(4) 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 与反常积分 $\int_0^{+\infty}e^{(p-2)x}\mathrm{d}x$ 均收敛,则 p 的取值范围是

(A) $p>2$. (B) $p<2$.

(C) $p>0$. (D) $0<p<2$. 【 】

(5) 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$,$\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)$,记向量组 Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$,Ⅲ:$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$. 如果向量组 Ⅲ 线性相关,则

(A) 向量组 Ⅰ 线性相关.

(B) 向量组 Ⅱ 线性相关.

(C) 向量组 Ⅰ 与 Ⅱ 都线性相关.

(D) 向量组 Ⅰ 与 Ⅱ 至少有一个线性相关. 【D】

(6) 设 A 与 B 是 n 阶方阵，齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有相同的基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$，则在下列方程组中以 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 为基础解系的是

(A) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$.　(B) $\boldsymbol{AB}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$.　(C) $\boldsymbol{BA}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$.　(D) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$.　【 D 】

(7) 设两事件 A，B，已知 $AB=\overline{A}\,\overline{B}$，则必有

(A) A 与 B 独立.　(B) $A\supset B$.　(C) $A=B$.　(D) A 与 B 对立.　【 D 】

(8) 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$，且 $f(-x)=f(x)$，$F(x)$ 是 X 的分布函数，则对任意实数 a，有

(A) $F(-a)=1-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.　(B) $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

(C) $F(-a)=F(a)$.　(D) $F(-a)=2F(a)-1$.　【　】

C

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上）

(9) 设 $a>0$，则 $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\ln\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{3}\mathrm{d}x=$ ________.

(10) 设曲线 $x=\int_1^t\frac{\cos u}{u}du$，$y=\int_1^t\frac{\sin u}{u}du$，则自原点到此曲线右边第一条垂直于 x 轴的切线之间的弧长为 $\ln(\pi/2)$.

(11) 设 $y_1=e^x-e^{-x}\sin 2x$，$y_2=e^{-x}\cos 2x+e^x$ 是某二阶常系数非齐次线性方程的两个解，则该方程是________.

(12) 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{ax}=\int_{-\infty}^{a}te^t\mathrm{d}t$，则 $a=$ 1.

(13) 设三阶实对称矩阵 A 有三个不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$. λ_1,λ_2 所对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,a,1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(a,a+1,1)^T$，则 λ_3 所对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=$ $(-1,-2,-1)^T$

(14) 设随机变量 $X\sim N(0,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 是取自总体 X 的简单随机样本，已知统计量 $F=a\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{X_5+X_6+\cdots+X_{10}}$ 服从分布 $F(4,b)$，则 $a=$ ________，$b=$ ________.

三、解答题（本题共 9 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明、证明过程演算步骤）.

(15)（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 是可导的偶函数，它在 $x=0$ 的某邻域内满足关系式 $f(e^{x^2})-3f(1+\sin x^2)=2x^2+o(x^2)$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程.

$y=x+1$

$2xe^{x^2}f'(e^{x^2})-3f'(1+\sin x^2)\cdot\cos x^2\cdot 2x=4x$

$2f'(1)-6f'(1)=4\Rightarrow f'(1)=-1\Rightarrow f'(-1)=1$

$f(1)-3f(1)=0\Rightarrow f(1)=0$

偶函数

$\Rightarrow f(-1)=0$

$\Rightarrow f(x)=x+1$

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 满足条件:(1)$a \leqslant f(x) \leqslant b$,(2) $|f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y|$, $x, y \in [a,b]$, $0<k<1$. 取 $x_0 \in [a,b]$,构造序列:$\{f_n(x_0)\}$: $f_1(x_0)=f(x_0)$, $f_{n+1}(x_0)=f[f_n(x_0)]$, $n=1,2,\cdots$.

证明:(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f_{n+1}(x_0)-f_n(x_0)]$ 绝对收敛;

(2) $\lim f_n(x_0)$ 存在.

(17)(本题满分 10 分)

质量为 1g(克)的质点受外力作直线运动,这外力和时间成正比,和运动速度成反比.在 $t=10$ s(秒)时,速度为 50cm/s,外力为 4g · cm/s^2,问从运动开始多长时间后速度为 100 cm/s.

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数，在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上，曲线积分 $\oint_L \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4}$ 的值恒为同一常数.

(Ⅰ) 证明：对右半平面 $x > 0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C，有 $\oint_C \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} = 0$；

(Ⅱ) 求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

(19)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$，$g(x)$ 可微，且 $f'(x) = g(x)$，$g'(x) = -f(x)$，$f(0) = 0$，$f'(0) = 1$，证明：$f^2(x) + g^2(x) = 1$.

(20)(本题满分 11 分)

已知 2 维非零向量 $\boldsymbol{x}$ 不是 2 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的特征向量.

(1) 证明:$\boldsymbol{x},\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ 线性无关;

(2) 若 $\mathbf{A}^2\boldsymbol{x}+\mathbf{A}\boldsymbol{x}-6\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$,求 $\mathbf{A}$ 的特征值并讨论 $\mathbf{A}$ 可否相似对角化.

(21)(本题满分 11 分)

设二维随机变量(X,Y)服从区域:$-1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2$ 上的均匀分布,求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+Yx_3^2+2x_1x_2+2Xx_1x_3$ 为正定二次型的概率.

(22)（本题满分 11 分）

一条自动生产线连续生产 n 件产品不出故障的概率为$\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}(n=0,1,2,\cdots)$，假设产品为优质品的概率为 $p(0<p<1)$，如果各件产品是否为优质品相互独立.

(1) 求生产线在两次故障间生产 k 件优质品的概率.

(2) 若已知在某两次故障间该生产线生产了 k 件优质品，求它共生产 m 件产品的概率.

(23)（本题满分 11 分）

设 Y_1,Y_2,Y_3 独立，且都服从参数为 p 的 0－1 分布. 令 $X_k=\begin{cases}1, Y_1+Y_2+Y_3=k\\-1, Y_1+Y_2+Y_3\neq k\end{cases}$，$k=1,2$.

求：(1)(X_1,X_2) 的联合分布律；

(2)p 为何值时，$E(X_1X_2)$ 最小.

模拟考场（二）

考生注意：(1) 本试卷共 23 大题，满分 150 分.

(2) 根据国家标准，试卷中的正切函数、余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 $\tan x$、$\cot x$、$\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 表示.

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

(1) 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，且 $f(x)$ 是偶函数，则

(A) $F(x)$ 一定是奇函数.

(B) $F(x)$ 一定是偶函数.

(C) $F(x)$ 一定是既非奇函数，又非偶函数.

(D) 只有当 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 时，$F(x)$ 是奇函数. 【 D 】

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有定义，在 $x=0$ 处可导，则 $f'(0)=0$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 收敛的

(A) 充分条件而非必要条件. (B) 必要条件而非充分条件.

(C) 充分必要条件. (D) 既非充分又非必要条件. 【 】

(3) 由 $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases} \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的图形在 $(0,1)$ 内

(A) 单调下降且向下凹. (B) 单调下降且向上凹.

(C) 单调上升且向下凹. (D) 单调上升且向上凹. 【 】

(4) 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域是 $(-8,8]$，则 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n(n-1)}$ 的收敛半径及 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{3n}$ 的收敛域分别是

(A) $8,(-2,2]$； (B) $8,[-2,2]$；

(C) 不定，$(-2,2]$； (D) $8,[-2,2)$. 【 】

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是四维非零列向量组，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，已知方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $(1,0,2,0)^T$，则方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$. 【 C 】

(6) 设 $M_i(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 为 xoy 面上 n 个不同的点，令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix}$，则点 M_1，$M_2,\cdots,M_n(n\geqslant 3)$ 在同一条直线上的充要条件是

(A) 秩($\mathbf{A}$) = 1.　　(B) 秩($\mathbf{A}$) = 2.

(C) 秩($\mathbf{A}$) = 3.　　(D) 秩($\mathbf{A}$) < 3.　　【 A 】

(7) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,其分布函数为 $F(x)$,随机变量 $Y = F(X)$,则 $P\{Y \leqslant \frac{1}{2}\}$ 的值

(A) 与参数 μ 和 σ 有关.　　(B) 与参数 μ 有关,但与 σ 无关.

(C) 与参数 σ 有关,但与 μ 无关.　　(D) 与参数 μ 和 σ 均无关.　　【 C 】

(8) 设随机变量 $X_1,\cdots,X_9$ 相互独立分布,$E(X_i) = 1, D(X_i) = 1, i = 1,\cdots,9$. 令 $S_9 = \sum_{i=1}^{9} X_i$,则对任意 $\varepsilon > 0$,从契比雪夫不等式直接可得

(A) $P\left\{\left|\frac{1}{9}S_9 - 1\right| < \varepsilon\right\} \geqslant 1 - \frac{9}{\varepsilon^2}$.

(B) $P\{|S_9 - 9| < \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{9}{\varepsilon^2}$.

(C) $P\left\{\left|\frac{1}{9}S_9 - 1\right| < \varepsilon\right\} \geqslant 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}$.

(D) $P\{|S_9 - 9| < \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}$.　　【　】

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上)

(9) 函数 $y = f(x)$ 在点(1,0)处有 $\Delta y = \Delta x + o(\Delta x)$,则极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\int_1^{e^x} f(t)dt}{\ln(1+x^2)} =$ 1/2.

(10) 设 $f(x,y)$ 为连续函数,且 $f(x,y) = x\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + y^2$,则 $f(x,y) =$

(11) 设 $u = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$,则向量场 grad u 通过球面 $\Sigma: x^2 + y^2 + (z - \frac{R}{2})^2 = R^2$ 向外的通量为________.

(12) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,且 $\int_0^{2x+3y+1} f(t)\mathrm{d}t = F(x,y)$,$L$ 为从原点到点(1,1)的任意简单光滑曲线,则积分 $\int_L f(2x+3y+1)(2dx+3dy) =$ 2F(0,0)

(13) 设向量 $\boldsymbol{\alpha} = (1,0,-1)$,矩阵 $\mathbf{A} = \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}$,且有 $\mathbf{A}^3 + p\mathbf{A} + q\mathbf{E} = 0$,其中 $\mathbf{E}$ 为单位矩阵,则微分方程 $y''' + py' + qy = 0$ 的通解为 $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} + C_3$

(14) 设某仪器有 3 只独立工作的同型号电子元件,其使用寿命X(单位:小时)均服从同一指数分布 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{600}e^{-\frac{x}{600}}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$ 则该仪器在使用的最初 200 小时内,至少有 1 只电子元件损坏的概率为 $1 - e^{-1}$.

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分,解答应写出文字说明、证明过程演算步骤).

(15) **(本题满分 10 分)**

设函数 $f(x,y)$ 可微,且 $\frac{\partial f}{\partial x}=-f$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f(0,y+\frac{1}{n})}{f(0,y)}\right)^n=e^{\cot y}$, $f(0,\frac{\pi}{2})=1$,求 $f(x,y)$.

(16) **(本题满分 10 分)**

试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}\right)$,其中 $a>1$.

(17)（本题满分 10 分）

在密度为 1 的半球体 $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的底面接上一个相同材料的柱体 $-h \leqslant z \leqslant 0$，$x^2 + y^2 \leqslant R^2 (h > 0)$，为使整个立体 Ω 的重心恰好落在球心上.

问 h 为多少?并求该立体关于 z 轴的转动惯量.

(18)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有连续导数，且 $f(0)=1, g(0)=0$，L 为平面上任意简单光滑闭曲线，L 围成的平面区域为 D. 已知 $\oint_L y[x - f(x)]dx + [yf(x) + g(x)]dy = \iint_D yg(x)d\sigma$，求函数 $f(x)$ 和 $g(x)$.