国家自然科学基金资助项目

# 一般格论基础

YIBANGELUN JICHU

李海洋 编著

西北工业大学出版社

国家自然科学基金资助项目

# 一般格论基础

李海洋　编著



西北工業大學出版社

**【内容简介】** 本书系统地论述了一般格论的基本内容.全书共分7章.第1章介绍偏序集的基本知识;第2章阐述了半格与格,主要包括格的类型,格的理想、滤子、同余,Galois联络等;第3章论述了分配格的基本内容,着重讨论了分配格的表示定理,分配格中的理想和同余,Boole代数以及Heyting代数等;第4章讨论了Frame与Locale,着重介绍了Frame,Locale和闭集格的代数性质以及Frame范畴和闭集格范畴的乘积和余积结构;第5章阐述了完全分配格的性质和基本结构定理,以及完全分配格范畴的乘积和余积结构;第6章主要论述了模格和半模格的基本性质;第7章介绍了正交模格的性质以及正交模格的p-理想和同余.

本书既可作为高等学校数学专业本科生选修课程或研究生课程的教材或教学参考书,也可供高等学校理工科专业的师生和研究工作者学习和阅读.

**图书在版编目(CIP)数据**

一般格论基础/李海洋编著.—西安:西北工业大学出版社,2012.8
ISBN 978-7-5612-3420-4

Ⅰ.①一… Ⅱ.①李… Ⅲ.①格—理论—高等学校—教材 Ⅳ.①O153.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第195403号

**出版发行**:西北工业大学出版社
**通信地址**:西安市友谊西路127号 **邮编**:710072
**电　　话**:(029)88493844 88491757
**网　　址**:www.nwpup.com
**印 刷 者**:陕西兴平报社印刷厂
**开　　本**:727 mm×960 mm 1/16
**印　　张**:10.125
**字　　数**:174千字
**版　　次**:2012年11月第1版 2012年11月第1次印刷
**定　　价**:28.00元

# 前　　言

格论来源于数论、逻辑、几何等领域. G. Birkhoff 在 1935 年前后的工作开创了近代格论的系统研究. 在他的一系列令人瞩目的论文中,既论证了格论的重要性,又指出格论为未来的许多数学学科的发展提供了统一的框架. 他的巨著 *Lattice Theory*(第 1 版(1940 年))极大地促进了格论的推广和发展. 格论的发展历程可通过比较以下著作而得到很好的了解:*Lattice Theory* 第 1 版(1940 年),第 2 版(1948 年),第 3 版(1967 年),以及 G. Grätzer 的巨著 *General Lattice Theory* 第 1 版(1978 年)和第 2 版(1998 年).

近年来,由于格论在代数学、组合学、拓扑学、模糊数学、泛函分析、概率论、测度论以及理论计算机等领域的广泛应用,使得格论有了长足的发展. 它已成为数学的一个重要分支,是许多数学领域研究工作的重要工具. 我国数学工作者在格论的研究中,尤其在格论的范畴性质等方面有许多突出的贡献(见参考文献[12],[18],[21],[33],[76]等). 本书将系统地论述一般格论的基本内容,其中包含了我国学者近年来在该领域的一些工作.

全书共分 7 章. 第 1 章为偏序集,主要介绍偏序集的基本性质,序同态,极小条件以及与选择公理等价的几个定理等. 第 2 章为半格与格,包括格的类型,格的理想、滤子、同余,Galois 联络,格中的特殊元等. 第 3 章为分配格,主要论述了分配格的表示定理,分配格中的理想和同余,Boole 代数以及 Heyting 代数. 其中,Heyting 代数作为直觉主义命题逻辑的代数模型,在一般的有关格论的书中都较少涉及. 第 4 章为 Frame 与 Locale,首先介绍了 Frame,Locale 和闭集格的代数性质(鉴于本书的篇幅有限,没有介绍 Frame,Locale 的拓扑结构)以及 Frame 范畴的乘积和余积结构,其次利用我们首次给出的并半格的闭集格化方法,给出了闭集格范畴的乘积和余积结构. 第 5 章为完全分配格,以 B. Hutton 和王国俊等发展的极小集方法为主要工具,给出了完全分配格的性质和基本结构定理,最后给出了完全分配格范畴的乘积和余积结构. 第 6 章为模格和半模格,主要论述了模格和半模格的基本性质. 第 7 章为正交模格,正交模格作为量子逻辑的主要研究对象之一,从 20 世纪 60 年代之后得到了迅速发展. 该章主要论述正交模格的性质以及正交模格的 p-

理想和同余.最后,在附录中给出了集合论的基本内容以及范畴论中的基本概念和基本性质.

在编著过程中,笔者得到了河北科技大学姚卫博士,西安工程大学贺兴时教授、薛红教授、郑唯唯教授等的大力支持和帮助,在此一并致以诚挚的谢意.

本书的编著和出版得到了国家自然科学基金(11271297)和西安工程大学博士科研启动经费的资助.

由于水平所限,书中不妥之处在所难免,恳请读者批评指正.

**编著者**

2012年5月18日

# 目　　录

# 第1章 偏序集

偏序关系是一类重要的二元关系，带有偏序关系的集合叫做偏序集. 本章主要介绍偏序集与 Hasse 图、序同态、极小条件、选择公理以及等价于选择公理的几个定理.

本书中常用符号"$\leqslant$"表示一个二元关系. 根据上下文，这与数的小于或等于符号不会造成混淆.

## 1.1 偏序集与 Hasse 图

**定义 1.1.1** 设 $P$ 是一个集合，$P$ 上的二元关系 $\leqslant$ 叫做一个**偏序关系**(或**半序关系**). 如果它满足：

(1) 自反性：$\forall a \in P, a \leqslant a$;

(2) 反对称性：$\forall a, b \in P, a \leqslant b, b \leqslant a \Rightarrow a = b$;

(3) 传递性：$\forall a, b, c \in P, a \leqslant b, b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$.

这时称$(P, \leqslant)$(或简称 $P$)为一个**偏序集**(或**半序集**). 对任意 $a, b \in P$，若 $a \leqslant b$，则读作"$a$ 含于 $b$"或"$a$ 小于或等于 $b$"；若 $a \leqslant b$ 而 $a \neq b$，则记成 $a < b$，读作"$a$ 真含于 $b$"或者"$a$ 小于 $b$". 如果 $a \leqslant b$ 或者 $b \leqslant a$，则称 $a$ 与 $b$ 是**可比**的；否则就说 $a$ 与 $b$ 是**不可比的**，记作 $a \parallel b$. $a \leqslant b (a < b)$ 有时也记作 $b \geqslant a (b > a)$.

设$(P, \leqslant)$ 是一个偏序集，若 $P$ 中任意两个不同的元素都是可比的，则称$(P, \leqslant)$(简称 $P$) 是一个**线性序集**(或**链**，或**全序集**)，偏序关系 $\leqslant$ 称为**线性序**(或**全序**)；反之，若 $P$ 中任意两个不同的元素都不可比，则称$(P, \leqslant)$(简称 $P$) 是一个**非序集**(或**反链**).

**例 1.1.1** (1) 设 $P$ 是实数集 $\mathbf{R}$，$\leqslant$ 是 $\mathbf{R}$ 上通常的小于或等于关系，则$(\mathbf{R}, \leqslant)$ 是偏序集. 实际上，它还是全序集.

(2) 设 $P$ 是单位区间 $I = [0, 1]$ 上的全体连续实函数之集 $C[0, 1]$，对 $P$ 中任意二元 $f$ 与 $g$，规定 $f \leqslant g$ 当且仅当 $\forall t \in [0, 1], f(t) \leqslant g(t)$，则$(P, \leqslant)$ 是偏序集.

(3) 设 $A$ 是任意一个集合，$\mathscr{P}(A)$ 是 $A$ 的幂集，对 $\mathscr{P}(A)$ 中任意二元 $X$ 与

$Y$，规定 $X \leqslant Y$ 当且仅当 $X \subseteq Y$，则$(\mathscr{P}(A), \leqslant)$ 是偏序集.

(4) 设 $N$ 是自然数集，“$|$”表示数的整除关系，则易证“$|$”是 $N$ 上的偏序关系，即$(N, |)$是偏序集. 又 $\leqslant$ 是通常数的“小于或等于”关系，则$(N, \leqslant)$ 也是偏序集. 由此例可知，同一个集合可以具有不同的偏序关系，它们应被视为不同的偏序集.

(5) 设 $P$ 是任意集合，$E$ 是恒等关系，则$(P, E)$ 是偏序集. 显然，它是一个非序集(即反链).

(6) 设$(P, \leqslant)$ 是偏序集，则 $\leqslant$ 的逆关系 $\leqslant^{-1}$ 也是 $P$ 的一个偏序关系，我们称偏序集$(P, \leqslant^{-1})$ 是偏序集$(P, \leqslant)$ 的对偶，简记作 $P^{-1}$.

(7) 设$(P, \leqslant)$ 是偏序集，$M$ 是 $P$ 的一个子集，则对于 $M$ 中任意二元 $x$ 与 $y$ 规定 $x \leqslant_M y$ 当且仅当 $x \leqslant_P y$，则易见$(M, \leqslant_M)$ 是偏序集，称偏序集$(M, \leqslant_M)$ 是偏序集$(P, \leqslant)$ 的子偏序集.

显然，若$(P, \leqslant)$ 是一个链(或反链)，则其子偏序集也是链(或反链)；若子偏序集$(M, \leqslant_M)$ 本身是一个链(或反链)，则 $M$ 称为 $P$ 的链(或反链).

例如，令 $M = \{2^n \mid n = 0, 1, 2, \cdots\}$，$W = \{p \mid p$ 为素数$\}$，则 $M$ 是偏序集$(N, |)$ 内的一个链，$W$ 是$(N, |)$ 内的一个反链.

**定义 1.1.2** 设$(P, \leqslant)$ 是一个偏序集，$A$ 是 $P$ 的一个非空子集，$a \in A$. 若对任意的 $x \in A$，有 $x \leqslant a$，则称 $a$ 是 $A$ 的一个**最大元**；若不存在 $y \in A$，使得 $a < y (a \neq y)$，则称 $a$ 是 $A$ 的一个**极大元**. 对偶地，可以给出**最小元**和**极小元**的定义.

显然，最大元(最小元) 一定是极大元(极小元)，反之不真. 特别地，偏序集$(P, \leqslant)$ 的最大元(若存在时) 叫做 $P$ 的**单位元**，用 1 表示；$(P, \leqslant)$ 的最小元(若存在时) 叫做 $P$ 的**零元**，用 0 表示；1，0 统称为 $P$ 的**泛界**.

**定理 1.1.1** 设$(P, \leqslant)$ 是一个偏序集，$A$ 是 $P$ 的一个非空子集.

(1) 若 $A$ 有最大元(最小元)，则只有一个；

(2) 若 $A$ 是有限子集，则必有极大元(极小元)；

(3) 若 $A$ 是 $P$ 的链(即线性序子集)，则 $A$ 的极大元(极小元)(当存在时) 一定是最大元(最小元).

**证明** 在此只证(2)，其余读者自行验证.

设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，归纳定义 $P$ 中元素列 $m_1, m_2, \cdots, m_n$，使得 $m_1 = a_1$. 假定 $m_{k-1}$ 已经定义$(2 \leqslant k \leqslant n)$，规定

$$m_k = \begin{cases} a_k, & \text{若 } m_{k-1} < a_k \\ m_{k-1}, & \text{否则} \end{cases}$$

这样得到一列元素 $m_1, m_2, \cdots, m_n$，显然 $m_n \in A$ 是 $A$ 的一个极大元. 类似可证 $A$ 有极小元.

偏序集(或链)$(P, \leqslant)$ 叫做一个有限偏序集(或有限链)，如果 $P$ 是有限集；否则称 $P$ 是一个无限偏序集(或无限链). 通常 $P$ 所含元素的个数(基数)用 $n(P)$ 表示，叫做 $P$ 的阶.

由定理 1.1.1 显然可得：

**推论 1.1.1** 任何有限链一定有最大元(最小元).

**定义 1.1.3** 设 $a, b$ 是偏序集$(P, \leqslant)$中任意两个不同的元素. 若 $a < b$，且不存在 $x \in P$ 使得 $a < x < b$，则称 $a$ 是 $b$ 的一个**下邻**或 $b$ 是 $a$ 的一个**上邻**，或者说 $b$ **覆盖** $a$，记作 $a \prec b$. 若 $a \leqslant b$，则称 $P$ 的子集 $\{x \mid x \in P, a \leqslant x \leqslant b\}$ 是以 $a, b$ 为端点的闭区间，记作$[a, b]$. 若 $a \prec b$，则称区间$[a, b]$ 为**素区间**.

当偏序集$(P, \leqslant)$有泛界 0 或 1 时，则称 0 的上邻(若存在时)为 $P$ 的**原子**；称 1 的下邻(若存在时)为 $P$ 的**对偶原子**.

**定理 1.1.2** 设$(P, \leqslant)$是一个偏序集，$a, b \in P$，$a \neq b$，则

(1) $a \prec b \Leftrightarrow a \leqslant b$ 且 $[a, b] = \{a, b\}$；

(2) 若 $P$ 是有限偏序集，则 $a \leqslant b \Leftrightarrow$ 存在有限个元素 $x_i \in P(i = 0, 1, \cdots, n)$，使得 $a = x_0 \prec x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_{n-1} \prec x_n = b$.

**证明** (1) 显然成立.

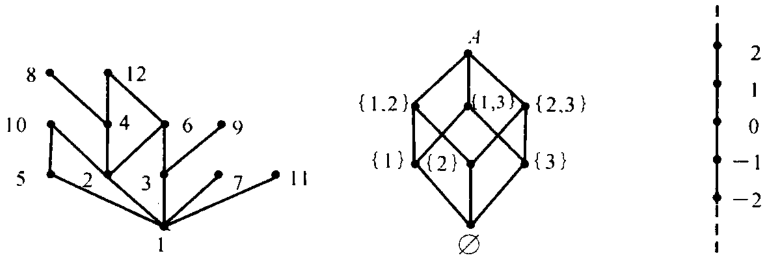
(2) 充分性显然成立. 下面证必要性，对区间$[a, b]$ 所含元素的个数 $m$ 使用归纳法. 由于 $a \leqslant b$，$a \neq b$，显然 $m \geqslant 2$. 当 $m = 2$ 时，由(1) 可知 $a \prec b$，结论成立. 设 $m > 2$，并且对于区间所含元素的个数小于等于 $m - 1$ 的情形，结论已经成立，则当区间$[a, b]$ 所含元素个数等于 $m$ 时$(m > 2)$，一定存在 $c \in P$，$a \leqslant c \leqslant b$，且 $c \neq a$，$c \neq b$. 易见区间$[a, c]$ 与区间$[c, b]$ 所含元素的个数均小于 $m$，由归纳假设知存在有限个元素 $x_i \in P(i = 0, 1, \cdots, k)$ 及 $y_j \in P(i = k, k + 1, \cdots, n)$，使得 $a = x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_k = c = y_k \prec y_{k-1} \prec \cdots \prec y_n = b$，因此(2) 的必要性成立.

由上述定理可知，在有限偏序集$(P, \leqslant)$中，偏序关系 $\leqslant$ 完全由具有覆盖关系的元素对(例如 $a \prec b$) 所决定. 如果把 $P$ 中每一个元素都用一个小圆圈(或小黑点) 在同一平面上表示出来，当且仅当 $b$ 覆盖 $a$ 时把 $b$ 画在 $a$ 的高处，并用线段将 $a, b$ 连接起来. 这样得到的图形称为偏序集$(P, \leqslant)$ 的**示图**，也叫做 **Hasse** 图. 利用示图，可以把偏序集中各元素之间的序关系形象地表示出来.

**例 1.1.2** (1) 设 $M = \{1, 2, 3, \cdots, 12\}$，"$|$" 表示数的整除关系，则$(M, |)$

成为一个偏序集，其示图由图 1.1.1(a) 给出.

(2) 设 $A=\{1,2,3\}$，则 $A$ 的幂集 $\mathscr{P}(A)$ 关于集合包含关系 $\subseteq$ 成为一个偏序集 $(\mathscr{P}(A),\subseteq)$. 其中 $\mathscr{P}(A)$ 的阶为 8，$\varnothing$ 是零元，$A$ 是单位元，单元子集 $\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$ 是原子，$\{1,2\}$，$\{2,3\}$，$\{1,3\}$ 是对偶原子. 其示图由图 1.1.1(b) 给出.

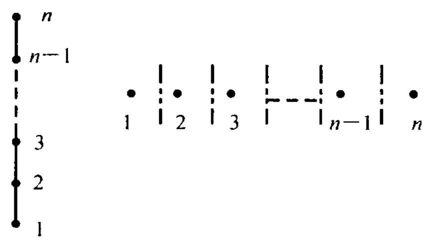



(a) (b) (c)

图 1.1.1

(3) 有时某些无限偏序集也可用 Hasse 图表示. 例如整数集 $Z$ 关于自然序（数的小于或等于关系）构成的无限链 $(Z,\leqslant)$，其示图可由图 1.1.1(c) 表示.

(4) 设 $A_n=\{1,2,3\cdots,n\}$ 是前 $n$ 个自然数构成的集合，则 $A_n$ 关于自然序 $\leqslant_Z$ 构成一个 $n$ 阶有限链，称为序数 $n$ 的链，记作 $\boldsymbol{n}$，其示图由图 1.1.2(a) 给出. 由 $A_n$ 构成的反链叫做基数 $n$ 的反链，记作 $n$，其示图由图 1.1.2(b) 给出.




(a) (b)

图 1.1.2

**定义 1.1.4** 设 $P$ 是偏序集，且 $S\subseteq P$. 如果对任意 $s\in S$，都有 $s\leqslant x$，则称元素 $x$ 为 $S$ 的上界. $S$ 的所有的上界组成的集合记作 $S^u$，即 $S^u=\{x\in P\mid s\leqslant x, s\in S\}$. 对偶地，我们可定义 $S$ 的下界，并记作 $S^l$，即 $S^l=\{x\in P\mid s\geqslant x, s\in S\}$.

一般说来，$S$ 的上界与下界未必存在. 即使存在也未必惟一，并且未必属

于 $S$. 由于 $\leqslant$ 满足传递性,因此 $S^u$ 是上集,$S^l$ 是下集(见定义 1.2.2). 由定理 1.1.1 可知,$S^u$ 的最小元若是存在,则只能有一个,称之为 $A$ 的**最小上界**或**上确界**,记作 $\sup A$ 或 $\bigvee A$. 对偶地,$S^l$ 的最大元若存在,则只能有一个,称之为 $A$ 的**最大下界**或**下确界**,记作 $\inf A$ 或 $\bigwedge A$.

如果 $S^u$ 有最小元 $x$,则称 $x$ 为 $S$ 的上确界. 也就是说,如果 $x$ 为 $S$ 的上确界,则 $x$ 满足:

(1) $x$ 是 $S$ 的上界;

(2) 对任意 $S$ 的上界 $y$,都有 $x \leqslant y$.

对偶地,如果 $S^l$ 有最大元 $x$,则称 $x$ 为 $S$ 的下确界. $S$ 的上确界也称为 $S$ 的并,记作 $\sup S$ 或 $\bigvee S$;$S$ 的下确界也称为 $S$ 的交,记作 $\inf S$ 或 $\bigwedge S$.

**注 1.1.1** (1) 当 $S=P$ 时,若 $P$ 有最大元 1,则 $P^u=\{1\}$,即 $\sup P=1$. 若 $P$ 没有最大元,则 $P^u=\varnothing$,因此 $\sup P$ 不存在. 对偶地,若 $P$ 有最小元 0,则 $\inf S=0$,若 $P$ 没有最小元,则 $\inf P$ 不存在.

(2) 当 $S=\varnothing$ 时,则 $\varnothing^u=P$,从而 $\sup\varnothing$ 存在当且仅当 $P$ 有最小元;则 $\varnothing^l=P$,从而 $\inf\varnothing$ 存在当且仅当 $P$ 有最大元.

一般地有下述结果.

**定理 1.1.3** 设 $A,B$ 是偏序集$(P,\leqslant)$中任意子集,

(1) 若 $A\subseteq B$,则 $B^u\subseteq A^u$,$B^l\subseteq A^l$;

(2) $A\subseteq(A^l)^u$,$A\subseteq(A^u)^l$;

(3) $A^l=((A^l)^u)^l$,$A^u=((A^u)^l)^u$;

(4) 若 $A$ 有最大元(最小元)$a$,则 $A$ 的上确界(下确界)存在,并且 $\sup A=a(\inf A=a)$.

**证明** 在此只证(2)与(3),其余读者自行验证.

(2) 设 $a\in A$,对任意 $x\in A^l$,$x$ 是 $A$ 的一个下界,因此 $x\leqslant a$,于是 $a$ 是 $A^l$ 的一个上界,即 $a\in(A^l)^u$,所以 $A\subseteq(A^l)^u$. 同理证 $A\subseteq(A^u)^l$,从而(2)成立.

(3) 由(2),$A^u\subseteq((A^u)^l)^u$. 再由(1)知 $((A^u)^l)^u\subseteq A^u$,于是 $A^u=((A^u)^l)^u$. 同理可以证明 $A^l=((A^l)^u)^l$,故(3)成立.

**推论 1.1.2** 设 $A$ 是偏序集$(P,\leqslant)$的任意子集,则下述条件等价:

(1) $A$ 在 $P$ 内的上确界(下确界)存在;

(2) $A^u(A^l)$ 在 $P$ 内的下确界(上确界)存在;

(3) $A^u\cap(A^u)^l\neq\varnothing(A^l\cap(A^l)^u\neq\varnothing)$.

当上述条件之一满足时,有

$$\sup A = A^u \cap (A^u)^l = \inf(A^u), \quad (\inf A = A^l \cap (A^l)^u = \sup(A^l)).$$

**证明** (1)⇒(2) 设$b=\sup A$存在,则$b$是$A^u$的最小元,由定理1.1.3(4)知$b=\inf(A^u)$存在.

(2)⇒(3) 设$b=\inf(A^u)$存在,则$b$是$(A^u)^l$的最大元,由定理1.1.3(2)知$A\subseteq(A^u)^l$,于是$b\in A^u$,因此$b\in A^u\cap(A^u)^l$,即$A^u\cap(A^u)^l\neq\varnothing$.

(3)⇒(1) 设$A^u\cap(A^u)^l\neq\varnothing$,取$b\in A^u\cap(A^u)^l$,易证$b$是$A^u$的最小元,故$b=\sup A$存在.

由上界、下界、上确界和下确界的定义易见:

$$\sup A = A^u \cap (A^u)^l = \inf(A^u), \quad (\inf A = A^l \cap (A^l)^u = \sup(A^l)).$$

**定理 1.1.4** 设偏序集$(P,\leqslant)$中每一个非空子集都有下确界(上确界),$A$是$P$的任意子集. 若$A$在$P$内至少有一个上界(下界),则$A$有上确界(下确界).

**证明** 由假设,$A^u\neq\varnothing$,因此$b=\inf(A^u)$存在. 由推论1.1.2知$b=\sup A$. 此外,我们有

**推论 1.1.3** 设$(P,\leqslant)$是任意偏序集,则下述条件等价:

(1)$P$中任意子集(包括$\varnothing$)有上确界;

(2)$P$中任意子集(包括$\varnothing$)有下确界.

**定理 1.1.5** 设$(P,\leqslant)$是任意偏序集,则$\forall a,b\in P$,有$a=a\wedge b\Leftrightarrow a\leqslant b\Leftrightarrow b=a\vee b$.

**证明** 直接验证.

## 1.2 序 同 态

**定义 1.2.1** 设$(P,\leqslant)$与$(Q,\leqslant)$是两个偏序集,$\theta:P\to Q$为映射.

(1) 若$\forall x,y\in P, x\leqslant y\Rightarrow\theta(x)\leqslant\theta(y)$,则称$\theta$为**保序映射**或**序同态**;

(2) 若$\forall x,y\in P, x\leqslant y\Rightarrow\theta(y)\leqslant\theta(x)$,则称$\theta$为**逆序映射**或**反序同态**;

(3) 若$\forall S\subseteq P, \theta(\bigvee S)=\bigvee\theta(S)$,则称$\theta$为**保任意并映射**,简称**保并映射**;

(4) 若$\forall S\subseteq P, \theta(\bigwedge S)=\bigwedge\theta(S)$,则称$\theta$为**保任意交映射**,简称**保交映射**;

(5) 若(3)和(4)中的$S$限定取有限集时,则称$\theta$为**保有限并映射**与**保有限交映射**;

显然,保(有限)并映射或保(有限)交映射都是保序映射,反之不然.

(6) 若 $\theta$ 为保序双射，并且其逆映射也是保序映射，则称 $\theta$ 为**序同构**；

(7) 若 $\theta$ 为反序双射，并且其逆映射也是反序映射，则称 $\theta$ 为**反序同构**(或**对偶同构**).

显然序同构一定是序同态. 当 $(P,\leqslant)=(Q,\leqslant)$ 时，序同态(或序同构) $\theta$ 叫做偏序集 $(P,\leqslant)$ 的**自同态**(或**自同构**). 若序同态 $\theta:P\to Q$ 是满射，则称偏序集 $P$ 与 $Q$ **同态**，记作 $P\sim Q$；若 $\theta$ 是序同构，则称 $P$ 与 $Q$ **同构**，记作 $P\cong Q$；若 $P$ 与 $Q$ 的某一个子偏序集同构，则称偏序集 $P$ 可同构嵌入到偏序集 $Q$ 中. 若 $\theta:P\to Q$ 是对偶同构，并且 $(P,\leqslant)=(Q,\leqslant)$，则称 $\theta$ 为 $P$ 的一个**自对偶同构**，并说偏序集 $P$ 是**自对偶的**.

显然，与 $P^{-1}$ 同构的偏序集一定与 $P$ 对偶同构. 偏序集在一个反序同构对应下，若不是自对偶的，就一定是成对地对偶的. 同样地，关于偏序集的定义和定理，在一个反序同构对应下，若不是自对偶的，就一定是成对地对偶的.

由序同构及反序同构的定义，容易证明下述定理.

**定理 1.2.1** 设 $(P,\leqslant)$ 与 $(Q,\leqslant)$ 是两个偏序集，$\theta:P\to Q$ 是满射，则下述条件等价：

(1) $\theta$ 是序同构(反序同构)；

(2) $\theta$ 是可逆映射，并且 $\theta$ 与 $\theta^{-1}$ 皆是保序的(反序的)；

(3) $\theta$ 是双保序的(双反序的)，即 $\forall x,y\in P$,

$$x\leqslant y\Leftrightarrow\theta(x)\leqslant\theta(y)\,(\theta(y)\leqslant\theta(x)).$$

**证明** (1)⇒(2)，(2)⇒(3) 显然成立. 为证(3)⇒(1)，只需证 $\theta$ 是双射. 设 $\theta(x)=\theta(y)$，$x,y\in P$，则 $\theta(x)\leqslant\theta(y)$ 且 $\theta(y)\leqslant\theta(x)$. 由(3) 知 $x\leqslant y$ 且 $y\leqslant x$，于是 $x=y$，因此 $\theta$ 是单射. 已知 $\theta$ 为满射，故 $\theta$ 为双射.

**注** 定理 1.2.1(2) 中要求 $\theta^{-1}$ 保序(反序) 是必需的. 存在双射(即可逆映射) $\theta:P\to Q$，使得 $\theta$ 是保序的，但 $\theta^{-1}$ 不是保序的，因而 $\theta$ 不是序同构. 例如在例 1.1.1(4)，定义 $f:(N,|)\to(N,\leqslant)$ 为恒等映射，则易证 $f$ 是序同态且为双射，但 $f$ 不是序同构.

设 $A$ 是任意一个偏序集，$a\in A$，称 $A$ 的下述子集 $(a]=\{x\mid x\in A,x\leqslant a\}$，$[a)=\{y\mid y\in A,a\leqslant y\}$，为由 $a$ 决定的**截段**.

在偏序集 $(A,\leqslant)$ 与偏序集 $(\mathscr{P}(A),\subseteq)$ 之间定义映射：$\varphi:a\mapsto(a]$，$(\forall a\in A)$. 则易见 $a\leqslant b\,(a,b\in A)$ 当且仅当 $\varphi(a)\subseteq\varphi(b)$. 特别，当 $\varphi(a)=\varphi(b)$ 时，必有 $a=b$. 因此 $A$ 与 $\mathscr{P}(A)$ 的子偏序集 $\varphi(A)=\{(a]\mid a\in A\}$ 同构，即偏序集 $A$ 可以同构嵌入到偏序集 $\mathscr{P}(A)$ 中. 于是我们证明了下述结果.

**定理 1.2.2** 任意偏序集 $(P,\leqslant)$ 均可同构嵌入到某个集合 $A$ 的幂集偏

序集$(\mathscr{P}(A),\subseteq)$中.

该定理表明了幂集偏序集的特殊地位.

利用序同构的定义,关于有限偏序集的示图,显然有:

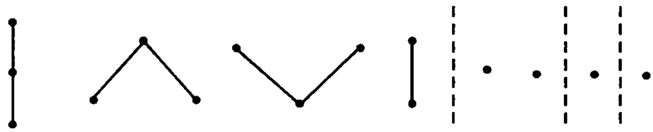
(1) 两个有限偏序集同构当且仅当它们可由同一个 Hasse 图表示;

(2) 偏序集 $P$ 的对偶 $P^{-1}$ 的示图可由 $P$ 的示图上下倒置得到;

(3) 有限偏序集 $P$ 自对偶,当且仅当 $P$ 有一个上下对称的示图.

根据(1),对于每一个确定的自然数 $n$,有可能求得所有彼此不同构的 $n$ 阶偏序集的个数.

**例 1.2.1** (1) 所有不同构的 3 阶偏序集共有 5 个,其示图由图 1.2.1 给出,其中有三个是自对偶的.



(a) (b) (c) (d) (e)

图 1.2.1

(2) 所有 $n$ 元有限链(反链)都可以由图 1.1.2(a)(图 1.1.2(b))表示.易见,任何 $n$ 元有限链(反链)彼此同构.

本书中将用 $\boldsymbol{n}$(或 $n$)表示任意一个 $n$ 元有限链(或反链),并且规定 $n$ 元有限链 $\boldsymbol{n}$ 的长为 $n-1$,$n$ 元有限反链 $n$ 的宽为 $n$.规定无限链(反链)的长(宽)为 $\infty$.

**推论 1.2.1** 两个有限链(反链)同构当且仅当它们的长(宽)相等.

关于对偶同构,我们易证下面定理成立.

**定理 1.2.3** 设$(P,\leqslant)$,$(Q,\leqslant)$是两个偏序集,$\theta:P\rightarrow Q$是对偶同构,$A$是 $P$ 的子集,$b\in P$.则

(1)$b$ 是 $A$ 的最大(小)元 $\Leftrightarrow\theta(b)$ 是 $\theta(a)$ 的最小(大)元;

(2)$b$ 是 $A$ 的极大(小)元 $\Leftrightarrow\theta(b)$ 是 $\theta(a)$ 的极小(大)元;

(3)$b$ 是 $A$ 的上(下)界 $\Leftrightarrow\theta(b)$ 是 $\theta(a)$ 的下(上)界;

(4)$b$ 是 $A$ 的上(下)确界 $\Leftrightarrow\theta(b)$ 是 $\theta(a)$ 的下(上)确界;

(5)$b$ 是 $P$ 的单位元(零元)$\Leftrightarrow\theta(b)$ 是 $Q$ 的零元(单位元).

根据定理 1.2.3,显然有:

**对偶原则** 若一个关于偏序集的命题在所在偏序集中为真,则其对偶命题(即把其中的偏序代以逆序,最大(小)元代以最小(大)元,极大(小)元代以极小(大)元,上(下)界代以下(上)界,上(下)确界代以下(上)确界,单位元

(零元)代以零元(单位元),等等)亦真.

设 $A$ 是任意集合,$A$ 的子集族 $S$ 叫做一个**子集环**,如果 $S$ 关于集合的交、并封闭,即 $\forall B,C \in S, B \cap C \in S, B \cup C \in S$. 称 $S$ 是一个**子集域**,如果 $S$ 关于集合的交、并、补封闭,其中补封闭是指 $\forall B \in S, B' = A - B \in S$.

显然 $A$ 的幂集 $\mathscr{P}(A)$ 是一个子集环,也是一个子集域.

**定义 1.2.2** 设 $P$ 偏序集,$A \subseteq P, a \in A, x \in P$,

(1) 如果 $a \leqslant x$,那么 $x \in A$,则称 $A$ 是**上集**(或**序滤子**);

(2) 对偶地,如果 $x \leqslant a$,那么 $x \in A$,则称 $A$ 是**下集**(或**序理想**).

容易证明:

**定理 1.2.4** 设 $P$ 偏序集,则

(1)$P, \varnothing$ 是 $P$ 的上集(下集);

(2)$P$ 的任意多个上集(下集)的并、交仍是上集(下集);

(3)$A$ 是上集当且仅当 $P - A$ 是下集;

(4)$P$ 的所有上集(下集)构成一个子集环.

设 $Q \subseteq P, x \in P$,定义 $\downarrow Q = \{y \in P \mid 存在 x \in Q 使得 y \leqslant x\}$, $\uparrow Q = \{y \in P \mid 存在 x \in Q 使得 x \leqslant y\}$, $\downarrow x = \{y \in P \mid y \leqslant x\}$, $\uparrow x = \{y \in P \mid x \leqslant y\}$.

**定理 1.2.5** 设 $P$ 偏序集,$a, b \in P$,则以下各条等价:

(1)$x \leqslant y$;

(2)$\downarrow x \subseteq \downarrow y$;

(3) 对任意 $P$ 的下集 $Q$, $y \in Q \Rightarrow x \in Q$.

**证明** 直接验证.

下面给出了几种通过已知偏序集构造新偏序集的方法.

**定义 1.2.3** 设 $P$ 偏序集(无论有没有最小元 0),令 $P_{\perp} = P \cup \{0\}$,其中 $0 \notin P$. 在 $P_{\perp}$ 中规定: $\forall x, y \in P_{\perp}, x \leqslant y \Leftrightarrow x = 0$ 或 $x, y \in P$ 且 $x \leqslant y$,则易证$(P_{\perp}, \leqslant)$是偏序集,称之为 $P$ 的**提升**.

**定义 1.2.4** 设 $P, Q$ 偏序集且 $P \cap Q = \varnothing$,在 $P \cup Q$ 中规定:

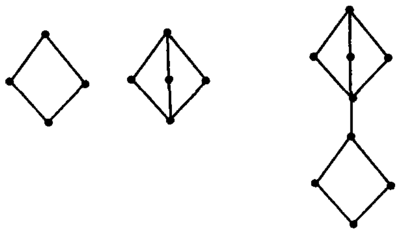
$\forall x, y \in P \cup Q, x \leqslant y \Leftrightarrow x, y \in P$ 且 $x \leqslant y$ 或 $x, y \in Q$ 且 $x \leqslant y$,则易证$(P \cup Q, \leqslant)$是偏序集,称之为 $P$ 和 $Q$ 的**不交并**,记作 $P \uplus$.

**定义 1.2.5** 设 $P, Q$ 偏序集且 $P \cap Q = \varnothing$,在 $P \cup Q$ 中规定:

$\forall x, y \in P \cup Q, x \leqslant y \Leftrightarrow x, y \in P$ 且 $x \leqslant y$ 或 $x, y \in Q$ 且 $x \leqslant y$ 或 $x \in P, y \in Q$,则易证$(P \cup Q, \leqslant)$是偏序集,称之为 $P$ 和 $Q$ 的**线性和**,记作$P \oplus Q$.

易见，$P_\perp = 1 \oplus P$，$P \oplus 1$ 表示 $P$ 具有一个新的最大元，且$\uplus$，$\oplus$ 满足结合律，即对任意不相交的偏序集 $P,Q,R$，

$$P \uplus (Q \uplus R) = (P \uplus Q) \uplus R, P \oplus (Q \oplus R) = (P \oplus Q) \oplus R.$$



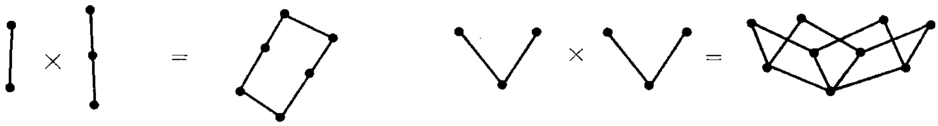
$M_2 \uplus M_3$　　$M_2 \oplus M_3$

(a)　　(b)

图　1.2.2

**定义 1.2.6**　设 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是偏序集，在 $P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n$ 中规定 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leqslant (y_1, y_2, \cdots, y_n) \Leftrightarrow \forall i, x_i \leqslant y_i$，则易见$(P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n, \leqslant)$是偏序集，我们称之为 $P_i$ 的**乘积**，这种序称为**坐标序**. 若 $P_1 = P_2 = \cdots = P_n$，则记为 $P^n$.

需要注意的是，在 $P_1 \times P_2$ 中还有另一种称之为字典序的序结构，即$(x_1, x_2) \leqslant (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 < y_1$ 或 $x_1 = y_1$ 时 $x_2 \leqslant y_2$. 在本书中，如无特殊说明，$P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n$ 中的序为坐标序.



(a)　　(b)

图　1.2.3

## 1.3　极小条件

设$(P, \leqslant)$是任意一个偏序集. 考虑下述条件：

**A 极小条件**：$P$ 中任意非空子集一定有极小元.

**B 降链条件**：$P$ 中任意元素列 $\{a_i \mid i = 1, 2, \cdots\}$ 如果能组成一个降链，即

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant \cdots,$$