恩波考研 ENBO

硕士研究生入学考试历年试题解析

2006

数学二

主　编　陈　仲
副主编　余　术

●解读 1994 年—2005 年 12 套全真试题，从中寻觅命题规律

●一线资深专家逐题解析，考点提示+思路点拨+技巧评点

●**考点提示** 提纲挈领，试题内涵及隐含信息披露无遗

●**思路点拨** 恰到好处，抽象思路与具体解法尽陈案前

●**技巧评点** 画龙点睛，解题诀窍与应试策略启迪无限

学苑出版社

全国硕士研究生入学考试

历年试题解析

数学二

主　编　陈　仲
副主编　余　术

学苑出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学考试数学历年试题解析(理科卷)/陈仲主编.—5版—北京:学苑出版社,2005.3

ISBN 7—5077—1792—5

Ⅰ.全... Ⅱ.陈... Ⅲ.数学—研究生—入学考试—解题 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第09347号

责任编辑:刘 涟
责任校对:秦 涛
封面设计:顾小平
出版发行:学苑出版社
社　　址:北京市丰台区南方庄2号院1号楼
邮政编码:100078
网　　址:www.book001.com
电子信箱:xueyuan@public.bta.net.cn
销售电话:010—67675512、84560465
经　　销:新华书店
印 刷 厂:山东省高唐印刷有限责任公司
开本尺寸:850×1168 1/16
印　　张:11.5
字　　数:280千字
版　　次:2005年3月北京第5版
印　　次:2005年3月山东第1次印刷
印　　数:0001—23000册
定　　价:19.00元

总前言

本套丛书是在“恩波考研辅导丛书”编辑部的支持、组织和策划下编写出版的。它以历年硕士生入学考试试题为基础,经过辅导专家的整理并作详尽解析而成,提供给广大考生备考复习使用,目的是帮助广大考生高效、有序地做好考前复习,从而取得理想的考试成绩。

本套丛书在编写过程中突出如下特点:

一、引导考生备考和复习　2005 年参加考研的人数达到 117.2 万人,竞争之激烈可想而知。所以考研复习不能落入俗套,要有创新思想,既要寻找适合自己特点的路子,又要清醒地把握住自己复习的进程,做到临考不乱,胸有成竹。本套丛书有引导考生备考和复习的初衷,供广大考生参考。

二、总结考试特点和规律　公共课是考研成功道路上最大的障碍,大多数考生因公共课成绩未达到国家最低录取控制分数线,而使其考研成功的梦想破灭。经调查分析,其原因是考生在复习时没有抓住考试的特点和规律,结果误入歧途。本套丛书编写时将试题解析与大纲考点相结合,总结出考试特点和规律,而遵循考试特点和规律从事考前复习将使考生避免盲目性,达到有的放矢、事半功倍的效果。

三、预测命题思路和趋势　本套丛书的试题与解析按时间顺序排列，先试题后解析，目的是希望考生通过做真题，熟悉考试的内容和形式；通过试题解析加强对考点的认识，理清解题思路，了解考试的最新动态和发展趋势，并对照解析检查不足与差距。

使用本套丛书时，请不要直接看解析和答案，最好先测试一下自己的水平，按规定的时间做完，然后对照答案，给自己记分，通过对照分析试题规律和自己的不足，以确定自己的复习重点。一位恩波考研辅导班的学员曾深有体会地说："认真做一套全真试题，并熟记全部考点和类型，其效率超过做两套模拟试题。"总之，考生在使用本套丛书时不要就题论题，而是要通过对历年考题的比较、对书中详尽解析和复习方法指导的把握，发现一些规律性的东西，使这些资料为我所用，从而提高自身水平，并轻松应对考试。

参加本套丛书编写工作的有陈仲、余术、姜东平、陈华钧、王锁明、周固等老师。

编写组

http://www.enbobook.org

目录

2006 年考研数学点拨

近年来，我国每年报考硕士研究生的人数逐年增加，2003 年为 79.7 万人，2004 年为 94.5 万人，2005 年达 117.2 万人。出现这种"考研热"的原因是多方面的，首先是国家改革开放和现代化建设事业的需要，国家机关、企事业单位、各行各业对高素质、高学历人才的需求量越来越大，硕士生招生人数也逐年增加，2003 年为 27 万人，2004 年为 33 万人，2005 年达 37 万人，随着"科教兴国"、"知识经济"等战略性措施的实施，我们估计这种高层次人才的需求还将不断增加，"考研热"随之还会不断升温。其次，由于高等教育的大众化，2004 年高校本科毕业人数为 288 万人，2005 年达到 338 万人，大学生毕业就业已进入市场，相当多的大学本科毕业生要找到理想的工作是比较困难的，这也从客观上促使大学毕业生选择考研继续深造，希望学到更专门的知识，取得更高的学历，以增强自己的竞争能力。还有相当多的往届大学毕业生希望通过读研来实现调换工作岗位，调换工作单位，更好地发挥自己的专长，这些年，应届与往届的考生已基本各占一半。

硕士生入学数学统一考试是国家选拔高层次人才的水平考试，命题者将考试成绩的期望值设定在 75 ～ 80 分（总分 150 分）之间进行命题，试题面广量大，基础性强，难题较多，因此竞争力强，淘汰率高。

考研大纲

自 1989 年考研招生实行全国统考以来，数学考试的命题是严格按照国家考试中心制定的"数学考试大纲"所规定的考试内容和考试要求进行的。该大纲对考试性质、基本要求、考试方法、试卷分类和适用专业详细阐明；对各卷考试内容、考试要求和试卷结构皆一一详述，它不但是国家考试中心命题的指导性文件，也是广大考生复习迎考的惟一重要依据。每年的"考试大纲"都有变化，如 2004 年数学一增加了"多元函数微积分学"，对数学一、二、三、四的考试内容和考试要求进一步明确、规范和统一，并将选择题和填空题的考分比例由原来的 48 分增加到 56 分，总分 150 分不变。2005 年的"大纲"在"隐函数存在定理"，"平面曲线的切线方程与法线方程"等内容又作了修改，对样卷作了修订。"数学考试大纲"是必备材料，广大考生在复习时要好好研究"大纲"，经常对照"大纲"，明确考试范围和考试要求，了解分数分布，按"大纲"所指明的"了解"、"理解"、"掌握"等不同考试要求有重点地复习。

考研复习

数学的概念、理论和方法步步深入，没有前一步就没有后一步。因此考生第一遍要系统复习，将自己在大学一年级时学习的课本认真复习（注意将"大纲"不作考试要求的内容要跳过去），将自己过去的作业本认真看一遍，学过的东西抓起来往往容易一些。在第一遍复习的基础上要进入提高阶段。选择一本好的考研参考书，将有助于提高阶段的复习质量。现在市面上考研参考书琳琅满目，有的内容太杂，非常容易的基本题很多，非常难的不适合作考研题的题目也很多。一本差的参考书可能会误人子弟；一本好的考研参考书可以使你的复习更接近于考试的要求，强化你的知识，提高你的复习质量。此外，选择一个好的辅导班，在名师指导下，除系统复习外，更好地掌握数学方法，提高应试水平，这也是一个明智的选择。辅导班的作用主要有：① 串讲知识，建立知识框架；② 讲述考点重点，缩小复习范围；③ 化解难点，预测考题。不少已金榜题名的研究生有这样的体会，选择一个好的考研辅导班，可大大提高考试的得分。一个好的考研辅导班的标准是：有一组授课质量一流、考研辅导经验丰富的好老师；有一支懂教学、善于管理的员工队伍；有一个完整的教学计划。另外收费多少、课时安排、教室环境等也是选择参数。在辅导层次上有些辅导班又分为基础班、提高班、强化班与冲刺班。一些基础不好的考生可选基础班和提高班（或强化班）两期，基础较好的考生可选择提高班（或强化班）和冲刺班两期，不要四期全部参加。辅导班只能助你一臂之力，不可能代替你的复习。听了辅导班之后还得消化、巩固，认真地、耐心地做一定量的习题。犹如学习游泳，老是听教练讲如何如何游，怎么也学不会，一定要自己下水去多练习才行。听课方法也大有学问，要多听，听懂，理解，

能达到举一反三，触类旁通。

数学的概念和方法一般说来不是一、二遍就能学好的。必须多次反复、多次学习才能掌握。学会了还有个熟练的问题。如果在考试中，基本题不但会做，而且能较熟练地，比别人花较少的时间做对，你就有较多的时间去做难题，难的那怕做对一半也能使你的考分比别人高。

考研试题

要收集与研究近几年的研究生入学考试试题，了解题型、题量，知道哪一类题是常考的，哪一类题是必考的，哪一类题是基本不考的。分析历届研究生入学试题，可以看出全国研究生入学统一考试的基本模式是稳定的，虽然每年都有若干新颖的新编的题目，但大量的题目还是老脸式，甚至有相当一部分是雷同题。例如：

(1) 2005 年数学一、数学二题(8) 与 1999 年数学一题二(1)，数学二题二(3)；

(2) 2004 年数学一题(18) 与 1996 年数学一题四(1)；

(3) 2003 年数学三(19) 与 2002 年数学一题七；

(4) 2003 年数学一题四与 2001 年数学一题五；

(5) 2001 年数学一题一(2) 与 1993 年数学一题一(4)；

(6) 2001 年数学一题六与 1997 年数学一题三(2)；

(7) 2001 年数学二题八与 1995 年数学一题五；

(8) 2001 数学三、数学四题三与 1997 年数学三题四；

(9) 2001 年数学三、数学四题七与 1996 年数学三题六；

(10) 2000 年数学一题二(2) 与 1988 年数学一题二(3)；

(11) 2000 年数学三、数学四题九与 1991 年数学一题七；

(12) 2000 年数学一题七与 1995 年数学一题一(4)；

(13) 2000 年数学二题二(2) 与 1997 年数学二题二(3)；

(14) 2000 年数学三、数学四题五与 1991 年数学三题七；

(15) 2000 年数学四题十与 1999 年数学四题九；

(16) 1999 年数学一题三与 1995 年数学一题三(1)；

(17) 1999 年数学三题九与 1997 年数学一题七(2)；

(18) 1999 年数学四题九与 1994 年数学三题十；

(19) 1999 年数学二题十二与 1991 年数学一题七。等等。

关于命题的特点与走向，下列四点广大考生要引起重视：

第一，研究生入学统一考试一直是以考查“三基”(即基本概念、基本理论和基本方法) 为主线的。从 2004 年起有 6 条填空题(每题 4 分)，8 条选择题(每题 4 分)。这 56 分的试题基本上都是考查“三基”内容的基本题，覆盖面广，基础性强，而且要求有一定的熟练程度。

例如 2003 年数学一题二(1) 同数学二题二(4) 是一道选择题，要求根据题中所画的导函数的图形判断函数有几个极大值与几个极小值。

例如 2001 年数学一题二(3) 是一道选择题：

设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件是

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在.　　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在.

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在.　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在.

该题只有 3 分，但基础性强，要求对导数(包括左、右导数) 的定义掌握得很熟练，对极限(包括左、右极限) 的概念掌握得很好。

又如 1999 年数学一、二、三、四的试题中有一道全同选择题：

设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必是偶函数.

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必是奇函数．

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必是周期函数．

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时，$F(x)$ 必是单调增函数．

该题只有 3 分，但要将本题的内容全部搞清楚，需要许多基本知识，如什么叫原函数，原函数与不定积分的关系，两个不同原函数的关系，变上限的定积分，原函数存在定理，定积分的换元积分公式等。若用排除法也可通过举反例将(B)，(C)，(D) 排除，得出(A) 成立。

又如 2002 年数学一题二(3) 与数学二题二(4) 是一道相同的选择题。

设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导，则

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$. ✓

(C) 当 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to0+}f'(x)=0$.

(D) 当 $\lim\limits_{x\to0+}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to0+}f'(x)=0$.

该题用举反例易于否定(C)，(D)，但举反例否定(A) 不太容易。要正面证明(B) 成立有一定难度。虽然该题只有 3 分，但要真正搞清全部内容，基础性要求是很高的。

第二，每年都有考查灵活运用重要定理、重要公式的证明题。除了要理解这些重要定理的条件、结论外，还要针对具体情况灵活运用，例如 2000 年数学一、二、三、四的试题中有一道全同的证明题：

设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$，$\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$，试证：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$。

该题的评分结果是数学一考生的得分不好，数学二、三、四考生的得分很差。

该题需用到高等数学的零点定理、定积分中值定理、罗尔定理等。考生一般有两种解法：一是先用定积分中值定理，推得 $f(x)$ 的一个零点，再用反证法求得第二个零点；二是构造辅助函数

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

设法对 $F(x)$ 两次应用罗尔定理推得 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内至少有两个零点。绝大部分考生用的是上述第一种方法，上述第二种方法证明很简捷，但使用此方法的考生极少。

又例如 1998 年数学一题九、数学二题八、数学三题六、数学四题七分别是应用罗尔定理、柯西中值定理、拉格朗日中值定理的证明题，在证明中都要根据题意构造辅助函数，这一点对许多考生而言是个难点，要通过做一定数量的习题(包括一定比例的难题) 才能做到。

第三，每年都有一定量的应用题。在考查"三基" 的基础上，对考生运用所学知识解决实际问题的能力进行考查，在近几年的考研试题中有加强的趋势。应用题包括几何与物理上的应用(如变力作功，旋转体体积，弧长，立体的重心等)，还有与社会生活有关的其他专门设计的应用题，其中积分学和微分方程的应用是重点。对文科考生而言，应用导数或偏导数解经济问题中的极值应用题是重点。

例如 2004 年数学一题(16) 同数学二题(20) 是微分方程的应用题，求飞机滑行的最大距离；2003 年数学一题六是定积分与极限的综合应用题，求汽锤打桩的深度；2003 年数学二题九是定积分与微分方程的综合应用题，由容器注入液体时液面扩大的速率求容器侧壁的曲线方程；例如 2001 年数学一题八同数学二题九是微积分的应用，求雪堆全部融化所需的时间；2001 年数学三题六，求面积的最大值；2001 年数学四题六是导数在经济上的应用，求利润的最大值。又如 2000 年数学一题八是三重积分的应用题，求球体的重心坐标；2000 年数学二题七是微分方程应用题，求经过多少年湖泊中污染物的治理达标；2000 年数学三题五同数学四题五是多元函数极值(拉格朗日乘数法) 在经济上的应用，求产品销售价格使利润取最大值。

第四，每年都有一定量的综合题。在近几年研究生入学试题中综合题也有加强的趋势。它要求考生将微积分、线性代数和概率统计这三部分的知识综合起来解题。这类题往往有一定难度，失分率大，要求考生所学知识融汇贯通，灵活运用。

例如 2005 年数学二题(15)：

设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0) \neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x (x-t) f(t) \mathrm{d}t}{x \int_0^x f(x-t) \mathrm{d}t}$.

该题求极限用到变上限积分的求导公式、洛必达法则、定积分中值定理、定积分的换元公式等。

又例如 2001 年数学一题八：

设有一高度为 $h(t)$(t 为时间) 的雪堆在融化过程中，其侧面满足方程

$$z = h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)}$$

(设长度单位为 cm，时间单位为小时)，已知体积减少的速率与侧面积成正比(比例系数 0.9)，问高度为 130(cm) 的雪堆全部融化需多少小时？

该题是导数、积分、重积分的综合题。

又如 2000 年数学二题十一：

设函数 $f(x)$ 在$[0, +\infty)$ 上可导，$f(0) = 1$，且满足等式

$$f'(x) + f(x) - \frac{1}{x+1}\int_0^x f(t) \mathrm{d}t = 0,$$

(1) 求导数 $f'(x)$；

(2) 证明：当 $x \geqslant 0$ 时成立不等式：$\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 1$。

该题是导数、积分、微分方程和导数的应用的综合题。

又如 1999 年数学三题一(5)：

设随机变量 $X_{ij}(i,j = 1,2,\cdots,n; n \geqslant 2)$ 独立同分布，$\mathrm{E}(X_{ij}) = 2$，求行列式

$$Y = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{vmatrix}$$

的数学期望 $\mathrm{E}(Y)$。这是线性代数与概率统计的综合题。

再例如 1998 年数学一题一(4)：

设矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ 是满秩的，讨论两直线

$$\frac{x - a_3}{a_1 - a_2} = \frac{y - b_3}{b_1 - b_2} = \frac{z - c_3}{c_1 - c_2} \quad \text{与} \quad \frac{x - a_1}{a_2 - a_3} = \frac{y - b_1}{b_2 - b_3} = \frac{z - c_1}{c_2 - c_3}$$

的关系。该题是空间解析几何和线性代数的综合题，用到矩阵的秩，三向量共面的充要条件，直线的方程与两直线的关系，该题构题新颖，有一定难度。

考研技巧

考试时要遵循先易后难，遇难不慌，知一写一的原则。

硕士生入学考试是国家选拔高层次人才的水平考试，因此考试题中一定有难题，应试者一定会有不顺手的地方，这时应试者的心态是很重要的，如果遇难题就发慌，再遇难题就不知所措，严重影响甚至放弃后面的考试，那是一定考不好的。有这样的一个真实的例子，1998 年硕士生入学考试中有一位考生数学考了 38 分，其他 4 门都过线，总分超过分数线 15 分，结果落榜。该考生非常懊恼地回忆道：数学考试时很不顺手，几个题不会做，认为一定完了，就没有信心做余下的题，没想到最后数学单科的分数线是 40 分(注：数学单科的分数线 2002 年前一般在 50 ～ 55 之间，2003 年后一般在 75 ～ 80 分之间。) 如果当时心态好一点，认真做余下的题，多拿 5 ～ 10 分一定没问题。广大考生应从这个例子中吸取教训，应试时会做的题，能拿分题先解；难题或自己没有见过的题型要逐个攻克，能写几步写几步(评分是按步给分)；没有把握的题，分析题意，估计用什么公式，写出有关的思路和公式有时也能得 1 ～ 2 分；有些题或一些解题步骤很难，得分又少，放到最后思考或者大胆地放弃；最后还一定要腾出时间复查一遍，纠正笔误或不足之处。如果能将有限的时间都花在能得分的解题上，达到高水平发挥，就一定能获得好成绩，实现自己的理想。

1994 年数学二试题与解析

1994 年数学二试题

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分. 把答案填在题中横线上）

(1) 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，在$(-\infty,+\infty)$上连续，则 $a=$ $\underline{-2}$；

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t),\\ y=t^3+t^2\end{cases}$ 所确定，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ $\underline{\dfrac{(6t+5)(t+1)}{t}}$；

(3) $\dfrac{d}{dx}\left(\int_0^{\cos 3x}f(t)dt\right)=$ $\underline{-3\sin 3x}$；$f(\cos 3x)$

(4) $\int x^3e^{x^2}dx=$ $\underline{\frac{1}{2}e^{x^2}}$；$(x^2-1)+C$

(5) 微分方程 $ydx+(x^2-4x)dy=0$ 的通解为 $\underline{xy^4=C(x-4)}$

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内）

$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$

(1) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，则　　(A)

(A) $a=1, b=-\dfrac{5}{2}$.　　(B) $a=0, b=-2$.

(C) $a=0, b=-\dfrac{5}{2}$.　　(D) $a=1, b=-2$.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, & x\leqslant 1;\\ x^2, & x>1.\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的　　(B)

(A) 左、右导数都存在.　　(B) 左导数存在，但右导数不存在.

(C) 左导数不存在，但右导数存在.　　(D) 左、右导数都不存在.

(3) 设 $y=f(x)$ 是满足微分方程 $y''+y'-e^{\sin x}=0$ 的解，且 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在　　(C)

(A) x_0 的某个邻域内单调增加.　　(B) x_0 的某个邻域内单调减少.

(C) x_0 处取得极小值.　　(D) x_0 处取得极大值.

(4) 曲线 $y=e^{1/x^2}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 的渐近线有　　(B)

(A) 1 条.　　(B) 2 条.

(C) 3 条.　　(D) 4 条.

(5) 设

$$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x\,dx,$$

$$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)\mathrm{d}x,\quad >0$$

$$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)\mathrm{d}x,\quad <0$$

则有　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（ D ）

(A) $N<P<M$.　　　　(B) $M<P<N$.

(C) $N<M<P$.　　　　(D) $P<M<N$.

三、(本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分)

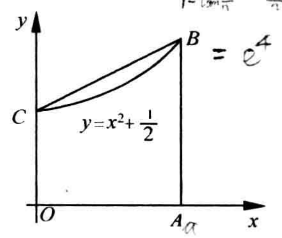
(1) 设 $y=f(x+y)$，其中 f 具有二阶导数，且其一阶导数不等于 1. 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(2) 计算 $\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$.

(3) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)$.　$= e^4$

(4) 计算 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin 2x+2\sin x}$.

(5) 如图，设曲线方程为 $y=x^2+\dfrac{1}{2}$，梯形 $OABC$ 的面积为 D，曲边梯形 $OABC$ 的面积为 D_1，点 A 的坐标为 $(a,0)$，$a>0$，证明：$\dfrac{D}{D_1}<\dfrac{3}{2}$.



四、(本题满分 9 分)

设当 $x>0$ 时，方程 $kx+\dfrac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个解，求 k 的取值范围.

五、(本题满分 9 分)

设 $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$，

(1) 求函数的增减区间及极值；

(2) 求函数图像的凹凸区间及拐点；

(3) 求其渐近线；

(4) 作出其图形.

六、(本题满分 9 分)

求微分方程 $y''+a^2y=\sin x$ 的通解，其中常数 $a>0$.

七、(本题满分 9 分)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且递减，证明：当 $0<\lambda<1$ 时，

$$\int_0^\lambda f(x)\mathrm{d}x\geqslant\lambda\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

八、(本题满分 9 分)

求曲线 $y=3-|x^2-1|$ 与 x 轴围成的封闭图形绕直线 $y=3$ 旋转所得的旋转体体积.

1994 年数学二试题解析

一、填空题

1 $-2.$

考点提示 函数在一点连续的定义.

思路点拨 先求 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的极限,再令其等于 $f(0)$.

【解】 因 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续,所以

$$a=f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{e^{2ax}-1}{x}$$

$$=2+\lim_{x\to 0}\frac{2ax}{x}=2+2a,$$

于是 $a=-2$.

技巧点评 在应用"等价无穷小因子代替"求极限之前先分项求极限.

2 $\dfrac{(6t+5)(t+1)}{t}.$

考点提示 求参数式函数的二阶导数.

思路点拨 直接应用参数式函数求导数的公式计算.

【解】

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2+2t}{1-\frac{1}{1+t}}=\frac{t(1+t)(3t+2)}{t}=3t^2+5t+2,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6t+5}{1-\frac{1}{1+t}}=\frac{(6t+5)(1+t)}{t}.$$

3 $-3\sin 3x\cdot f(\cos 3x).$

考点提示 变上限的定积分.

思路点拨 直接应用变上限定积分的求导公式.

【解】

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{\cos 3x}f(t)dt\right)=(\cos 3x)'f(\cos 3x)=-3\sin 3x\cdot f(\cos 3x).$$

4 $\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1)+C.$

考点提示 求不定积分.

思路点拨 综合应用分部积分法与换元积分法.

【解】

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int x^2 e^{x^2} dx^2 = \frac{1}{2}\int x^2 de^{x^2}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}\int e^{x^2} dx^2 = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

5 $(x-4)y^4 = Cx.$

考点提示 求可分离变量的一阶微分方程的通解.

思路点拨 分离变量,两边积分,化为求不定积分.

【解】 分离变量得

$$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{4x-x^2}dx,$$

积分得

$$\ln|y| = \int \frac{1}{x(4-x)}dx + \frac{1}{4}\ln|C|$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4-x}\right)dx + \frac{1}{4}\ln|C|$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{4-x}\right| + \frac{1}{4}\ln|C|,$$

化简即得所求通解为 $(x-4)y^4 = Cx.$

技巧点评 解微分方程中,任意常数的选取有一定技巧,选取得好,可容易地写出较简单形式的通解.

二、选择题

1 选(A).

考点提示 一元函数的马克劳林展式的应用.

思路点拨 应用 $\ln(1+x)$ 的马克劳林展式求极限.

【解】 应用马克劳林展开式,$x \to 0$ 时

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$

这里展开到 x^2 项是因为原式分母为 x^2. 于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}x^2 - ax - bx^2 + o(x^2)}{x^2} = 2,$$

故有 $1-a=0, -\frac{1}{2}-b=2 \Rightarrow a=1, b=-\frac{5}{2}.$

技巧点评 也可应用洛必达法则求极限.

2 选(B).

考点提示 左、右导数的定义.

思路点拨 应用极限求左、右导数.

【解】 由于 $f(1)=\frac{2}{3}$,应用左、右导数的定义有

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1-}\frac{2}{3}(x^2+x+1)=2,$$

$$f_+'(1)=\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{x^2-\frac{2}{3}}{x-1}=\infty,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处左导数为 2,右导数不存在.

技巧点评 注意 $f'_-(1)$ 与 $\lim\limits_{x\to1-}f'(x)$ 的区别,$f'_+(1)$ 与 $\lim\limits_{x\to1+}f'(x)$ 的区别.

3 选(C).

考点提示 极值的必要条件与充分条件.

思路点拨 $f'(x_0)=0$ 是 $f(x_0)$ 为极值的必要条件,由原式导出 $f''(x_0)>0$,这是 $f(x_0)$ 为极小值的充分条件.

【解】 因 $f'(x_0)=0$,所以 x_0 是 $f(x)$ 的驻点,由于

$$y''(x_0)=-y'(x_0)+e^{\sin x_0}=e^{\sin x_0}>0,$$

所以 $y(x_0)$ 为极小值.

4 选(B).

考点提示 求渐近线.

思路点拨 通过求极限 $f(+\infty)$,$f(-\infty)$ 求水平渐近线;通过求极限 $f(0+)$ 或 $f(0-)$ 求铅直渐近线.

【解】 由于

$$f(+\infty)=\frac{\pi}{4},\quad f(-\infty)=\frac{\pi}{4},$$

所以有水平渐近线 $y=\frac{\pi}{4}$,由于 $x\to+\infty$ 时,或 $x\to-\infty$ 时 $f(x)$ 皆与 $y=\frac{\pi}{4}$ 无限接近,所以无斜渐近线,又

$$\lim_{x\to0}f(x)=+\infty,$$

所以又有一条铅直渐近线 $x=0$. 即共有 2 条渐近线.

5 选(D).

考点提示 定积分的性质.

思路点拨 应用奇函数 $f(x)$ 在对称区间 $[-a,a]$ 上的定积分等于 0,偶函数 $f(x)$ 在对称区间 $[-a,a]$ 上的定积分等于 $2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$. 再应用定积分的保号性.

【解】 应用奇、偶函数在对称区间上积分的性质有

$$M = 0,$$

$$N = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \mathrm{d}x > 0,$$

$$P = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \mathrm{d}x < 0,$$

于是 $P < M < N$.

三、

1 考点提示 求隐函数的二阶导数.

思路点拨 将 y 视为 x 的函数后将方程两边对 x 求导.

【解】 应用隐函数求导法则得

$$y' = (1 + y')f',$$

所以 $y' = \dfrac{f'}{1-f'}$.将上式两边对 x 求导得

$$y'' = y'' \cdot f' + (1 + y')^2 f'',$$

于是

$$y'' = \frac{(1+y')^2 f''}{1-f'} = \frac{f''}{(1-f')^3}.$$

技巧点评 隐函数的导数不一定能写为 x 的函数,在其结果中可含 x, y.

2 考点提示 求定积分.

思路点拨 先应用第二换元积分法消去根号,再应用牛顿 - 莱布尼兹公式.

【解】 令 $x^2 = \sin t \ (0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2})$,则

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin t}(1-\sin^2 t)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin t}} \cos t \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{8}\cos 4t\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}t + \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{32}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{32}\pi.
\end{aligned}$$

3 考点提示 求数列的极限.

思路点拨 这是 1^∞ 型的未定式极限,可化为关于 e 的重要极限 $\lim(1+u)^{\frac{1}{u}}$ 的形式求极限,或者应用恒等式 $u^v = \exp(v\ln u)$,与等价无穷小因子代替求极限的方法.

【解】 解法 Ⅰ

$$\lim_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right)^{\frac{1-\tan\frac{2}{n}}{2\tan\frac{2}{n}}\cdot\frac{4\tan\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}\cdot\frac{1}{1-\tan\frac{2}{n}}} = e^4.$$