高职高专院校课本

高等数学

张润琦　高存明 主编

人民教育出版社

高职高专院校课本

高 等 数 学

主编 张润琦 高存明

编写 毛京中 张润琦

杨 刚 于学汉

人民教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高职高专院校课本高等数学/张润琦主编. —北京：人民教育出版社，2004
ISBN 7-107-17562-9

Ⅰ. 高…
Ⅱ. 张…
Ⅲ. 高等数学—高等学校：技术学校—教材
Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 026054 号

人民教育出版社 出版发行
（北京沙滩后街 55 号　邮编：100009）
网址：http://www.pep.com.cn
北京四季青印刷厂印装　全国新华书店经销
2004 年 7 月第 1 版　2004 年 10 月第 1 次印刷
开本：787 毫米×1 092 毫米　1/16　印张：24
字数：500 千字　印数：0 001～2 000 册
定价：25.50 元

前言

本书是根据教育部颁布的高职高专“高等数学课程教学基本要求”编写的．考虑到近年来高职高专的发展状况，依据我们多年的教学经验，对教学内容作了适当的增删．本书的第一章至第十章为微积分，包括一元函数微积分，多元函数微分学和二重积分，常微分方程和无穷级数．第十一章为线性代数，第十二章为概率论和数理统计．这两部分简单叙述其基本内容．

编写本书时，我们注意到下述几个方面：

1．强调基本概念、方法和应用．这些内容对学生学习后续课程及未来发展是不可缺少的．省略了一些难懂的证明过程，删除了繁杂的计算技巧．例题和习题都围绕基本内容去设计．

2．尽量从实例中引出重要的基本概念，从直观上说明一些重要理论．这有利于学生对高等数学基本思想和内容的理解及应用．

3．微积分是建立在函数极限的“平台”上的．鉴于极限概念的严格数学描述——“ε-δ”说法难于被学生理解，我们删除了相应叙述，而代之以直观的“朴素说法”．实际上这更有利于学生理解极限概念的本质．

4．本书的微积分是“应用的微积分”、“直观的微积分”，相信它更适用于高职高专和成人教育的学生．

本书在编写过程中得到数学教育家李心灿教授的诸多指导和帮助，在此表示感谢．

书中的不足和错误，恳请读者指正．

编者

2004 年 5 月

目录

第一章 函数

函数是高等数学的主要研究对象. 本章将复习中学所学过的函数概念，进一步研究函数的性质，并引入初等函数的概念.

第一节 函数及其表示法

1. 函数的概念

人们在观察、研究自然现象或实际问题时，经常会遇到许多变量，这些变量之间有时存在着相互依赖关系.

例 1 在自由落体运动中，物体下落的时间 t 与距离 s 之间有下列依赖关系

$$s=\frac{1}{2}\mathrm{g}t^2$$

其中 g 是重力加速度. 假定物体落地的时刻为 T，则对每一个位于 $[0, T]$ 上的时间 t，都有一个距离 s 与之对应，我们将 s 与 t 之间的这种依赖关系称为**函数关系**.

定义 设 x 与 y 是两个变量，D 是一非空实数集，x 在 D 上取值，如果对于 D 中的每一个 x，变量 y 按照一定的法则 f，总有确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x)$$

其中 x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**或**函数**，D 叫做函数的**定义域**，f 叫做**对应法则**.

对应法则也可用其他字母表示，如 F、g、φ 等，有时为节省符号，也可将 y 是 x 的函数表示成 $y=y(x)$.

上面定义的函数实际上是单值函数，即对于自变量的每一个值，函数 y 只有一个值与之对应. 本书所讨论的函数都是单值函数.

高等数学中函数的定义域通常是区间，区间包括有限区间和无穷区间，它们的名称、记号和定义如下：

闭区间 $[a, b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$

开区间 $(a, b)=\{x|a<x<b\}$

半开区间 $[a, b)=\{x|a\leqslant x<b\}$

$(a, b]=\{x|a<x\leqslant b\}$

无穷区间 $(a, +\infty)=\{x|x>a\}$

$[a, +\infty)=\{x \mid x \geqslant a\}$

$(-\infty, a)=\{x \mid x<a\}$

$(-\infty, a]=\{x \mid x \leqslant a\}$

$(-\infty, +\infty)=\{x \mid x \in \mathbf{R}\}$

如果两个函数的对应规则是相同的，且定义域也是相同的，则称这两个函数是相同的函数.

例 2 下列 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否为相同的函数.

(1) $f(x)=x-1$，$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$；

(2) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$.

解 (1) $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是相同的函数，因为它们的定义域不相同. $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域中要求 $x \neq -1$.

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是相同的函数，因为它们的对应规则不相同. $f(x)$ 的函数值有正有负，而 $g(x)=|x|$ 的函数值是非负的.

例 3 求函数 $y=\sqrt{25-x^2}+\ln(3-x)$ 的定义域.

解 $\sqrt{25-x^2}$ 的定义域为 $25-x^2 \geqslant 0$，$25 \geqslant x^2$，

$|x| \leqslant 5$ 即 $-5 \leqslant x \leqslant 5$

$\ln(3-x)$ 的定义域为 $3-x>0$，即 $x<3$

因此函数的定义域为 $-5 \leqslant x \leqslant 5$ 与 $x<3$ 的公共部分（交集），即为

$$-5 \leqslant x<3$$

2. 函数的表示法

函数通常有三种表示法，即解析法（公式法）、数值法（表格法）和图形法.

用解析法表示函数时，有时一个解析式就可以，例如 $s=\frac{1}{2}gt^2$，$y=a^x$ 等等. 但是有一些函数的对应法则不能用一个解析式表示，在定义域的不同区间内要用不同的解析式表示，这类函数称为**分段函数**.

例 4 某种商品每件出厂价 90 元，厂家为鼓励销售商大量采购，决定凡是订购量超过 100 件的，每多订购一件，售价就降低 1 分（例如若订购 300 件，订购量比 100 件多出 200 件，于是每件就降价 $0.01 \times 200=2$(元))，但最低价为 75 元/件. 如果设 x 为订购此种商品的件数，y 为每件的价格，则 y 与 x 的函数关系就是一个分段函数，即

$$y=\begin{cases} 90 & x \leqslant 100 \\ 90-(x-100) \times 0.01 & 100<x<1\,600 \\ 75 & x \geqslant 1\,600 \end{cases}$$

习题1-1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{2-x^2}$; (2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$;

(3) $y=\dfrac{1}{\ln(1-x)}$; (4) $y=\arcsin\dfrac{x-2}{2}$.

2. 设 $f(x)=x^3+1$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f(-1)$，$f(x^2)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$[f(x)]^2$，$f(-x)$，$f(x+1)$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x & x<1 \\ 2 & x=1 \\ 2-x^2 & x>1 \end{cases}$

作出 $f(x)$ 的图象，并求 $f(1)$，$f(0)$，$f(-2)$，$f(2)$，$f(x+1)$.

4. 有一块边长为 a 的正方形铁皮，在它的四角各剪去相等的小正方形，折叠后做成一个无盖的盒子，求这个盒子的容积 V 与所剪去的小正方形边长 x 之间的函数关系.

5. 某工厂有某种商品，每件定价130元，每次销售量在100件以内时按原价出售，超过100件时，超过部分打9折出售，试求销售收益 y 与销售量 x 之间的函数关系.

第二节　函数的几种特性

1. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点是对称的，如果对于任意 $x\in D$，恒有

$$f(-x)=-f(x)$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**. 如果对任意 $x\in D$，恒有

$$f(-x)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

奇函数的图形是关于原点对称的（如图1-1），偶函数的图形是关于 y 轴对称的（如图1-2）.

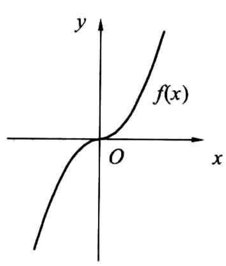

图1-1

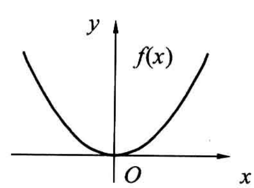

图1-2

例 1 讨论下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x^2$；　　(2) $f(x)=2x^3$；

(3) $f(x)=x^2+x^3$；　　(4) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 (1) 由于 $x\in\mathbf{R}$，定义域关于原点对称. $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$，故$f(x)=x^2$ 是偶函数.

(2) 由于 $x\in\mathbf{R}$，定义域关于原点对称. $f(-x)=2(-x)^3=-2x^3=-f(x)$，故 $f(x)=2x^3$ 是奇函数.

(3) 由于 $x\in\mathbf{R}$，定义域关于原点对称. $f(-x)=(-x)^2+(-x)^3=x^2-x^3$，

$f(-x)\neq -f(x)$ 且 $f(-x)\neq f(x)$.

故 $f(x)=x^2+x^3$ 既不是奇函数，也不是偶函数.

(4) 由于 $x\in\mathbf{R}$，定义域关于原点对称.

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln[-x+\sqrt{1+(-x)^2}]\\&=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}\\&=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)\end{aligned}$$

故 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$是奇函数.

2. 单调性

设函数 $f(x)$的定义域为区间 I，如果对于任意 x_1，$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，总有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

则称 $f(x)$在区间 I 上单调增加. 如果当 $x_1<x_2$ 时，总有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

则称 $f(x)$在区间 I 上单调减少.

单调增加函数的图形随着 x 的增大而上升（如图 1-3），单调减少函数的图形随着 x 的增大而下降（如图 1-4）.

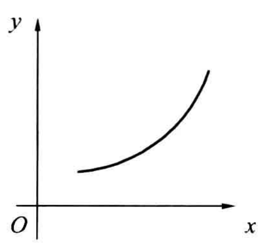

图 1-3

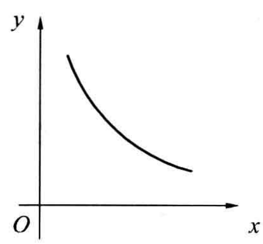

图 1-4

例如，$y=x+2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是单调增加函数. $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少函数，在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加函数.

3. 周期性

设函数 $y=f(x)$，如果存在常数 T，使得对定义域内的任何 x，都有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则称 $y=f(x)$ 为周期函数，使上式成立的最小的正数 T 称为 $f(x)$ 的周期.

周期函数的图形呈周期状.

例如，$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，$y=\tan x$ 与 $y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

4. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在正数 M，使得对任意 $x\in I$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界. 如果这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

在区间 I 上有界的函数 $y=f(x)$ 的图形完全位于直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间（图 1-5）.

例如，$y=\sin x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的. $y=x^2$ 在区间 $[0, 1]$ 上是有界的，但在区间 $[0, +\infty)$ 上是无界的.

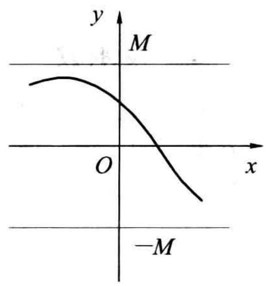

图 1-5

习题 1-2

1. 下列函数中哪些是奇函数，哪些是偶函数，哪些函数既不是奇函数也不是偶函数.（$x\in\mathbf{R}$）

(1) $y=x\cos x$；　(2) $y=x^2+1$；

(3) $y=x^2+\sin x$；　(4) $y=\sin^3 x$；

(5) $y=x^2\tan x$；　(6) $y=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$；

(7) $y=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$.

2. 指出下列函数的单调性.

(1) $y=3^x$；　(2) $y=2-x$；

(3) $y=\cos x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$；　(4) $y=\ln x+1$.

3. 下列函数哪些是周期函数，如果是周期函数请指出其周期.

(1) $y=\sin 2x$；　(2) $y=\cos\frac{x}{2}$；

(3) $y=\sin\frac{x}{2}+\sin 2x$；　(4) $y=\tan(x-\pi)$；

(5) $y=\cos^3 x$；　(6) $y=x\cos x$.

4. 下列函数在指定区间上哪些是有界函数，哪些是无界函数？

(1) $y=\frac{1}{x}$，$x\in[1,\ 2]$；

(2) $y=\tan x$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$；

(3) $y=x^3$，$x\in[-1,\ 2]$；

(4) $y=\cos^2 x+3$，$x\in(-\infty,\ +\infty)$.

第三节　反函数、复合函数与初等函数

1. 反函数

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，值域为 W，如果对于 W 中的每一个 y 值，在 D 中存在惟一的 x 值，使 $f(x)=y$，则 x 也可以看成是 y 的函数，在此 y 是自变量，x 是因变量，这个函数关系可以表示成

$$x=f^{-1}(y)$$

(也可以用其他符号表示，如 $x=g(y)$ 等) $x=f^{-1}(y)$ 称为 $y=f(x)$的**反函数**. $y=f(x)$也称为 $x=f^{-1}(y)$的反函数，即两者互为反函数.

习惯上，用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此将 $x=f^{-1}(y)$改写成 $y=f^{-1}(x)$，即 $y=f^{-1}(x)$与 $y=f(x)$互为反函数.

$y=f(x)$的图形与 $y=f^{-1}(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称(如图 1-6).

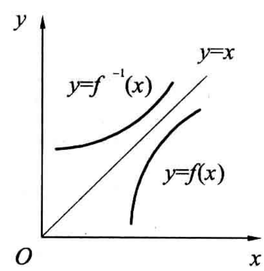

图 1-6

2. 复合函数

定义　设 $y=f(u)$，而 $u=\varphi(x)$，且函数 $\varphi(x)$的值域包含在函数 $f(u)$的定义域内，则 y 通过变量 u 的联系而成为 x 的函数，我们称 y 为 x 的**复合函数**，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 叫做中间变量.

例如，$y=u^2$，$u=\sin x$，y 通过 u 而成为 x 的函数 $y=\sin^2 x$.

例 1　函数 $y=\arctan^3\sqrt{1-x^2}$是由哪几个简单函数复合而成的.

解　是由 $y=u^3$，$u=\arctan v$，$v=\sqrt{t}$，$t=1-x^2$ 复合而成的.

例 2　设 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f[f(x)]$.

解　$$f[f(x)]=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

3. 初等函数

我们将函数

$$y=C\ (C\text{ 为常数})$$

幂函数 $y=x^u$（u 是实常数）

指数函数 $y=a^x$（$a>0$，$a\neq1$）

对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq1$）

三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$

反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$

统称为**基本初等函数**.

将由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合所构成的，并且可用一个式子表示的函数称为初等函数.

例如，$y=x\sin x-1$，$y=\dfrac{3x+2}{2x-7}$，$y=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{\ln(3-x)}}$，$y=2^{\sin^2 x}$都是初等函数.

4. 建立函数关系举例

例 3 用一半径为 R，圆心角为 α 的扇形围成一无底的圆锥，试将圆锥的容积 V 表示成 α 的函数.

解 如图 1-7，设圆锥底面半径为 r，高为 h，由于圆锥底面周长 $2\pi r$ 等于扇形的弧长 $R\alpha$，有

$$2\pi r=R\alpha$$

故
$$r=\frac{R\alpha}{2\pi}$$

又
$$h=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{R^2-\left(\frac{R\alpha}{2\pi}\right)^2}=R\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{4\pi^2}}$$

故
$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{R\alpha}{2\pi}\right)^2R\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{4\pi^2}}$$
$$=\frac{R^3\alpha^2}{12\pi}\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{4\pi^2}}=\frac{R^3\alpha^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}$$

其中 $0<\alpha<2\pi$.

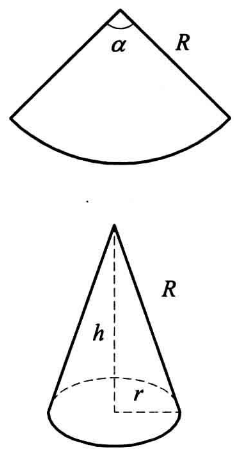

图 1-7

习题 1-3

1. 求下列函数的反函数.

(1) $y=\sqrt[3]{x+2}$；　(2) $y=1-3x^2$（$x>0$）；

(3) $y=2+\lg(x+1)$；　(4) $y=2x+1$；

(5) $y=\sqrt[n]{1-x^n}$（$x>0$）.

2. 指出下列函数是由哪些函数复合而成的.

(1) $y=\sin^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$；

(2) $y=\sqrt{\tan(x^2+2)}$；

(3) $y=e^{\sin\sqrt{3x-1}}$；　　　　(4) $y=e^{x^2}$.

3. 设 $f(x)=\frac{1}{1-x}$，求 $f[f(x)]$.

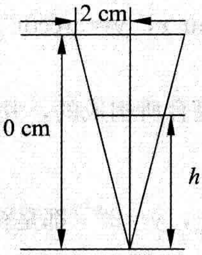

图 1-8

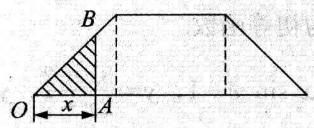

图 1-9

4. 用一个底面半径为 2 cm，高为 10 cm 的圆锥形做为量杯（图 1-8），求出溶液的体积 V 与液面高度 h 之间的函数关系.

5. 如图 1-9，设有上底为 1，下底为 3，高为 1 的等腰梯形，A 为底边上任一点，AB 垂直底边，A 与顶点 O 的距离为 x，当 AB 平行移动时，试将阴影部分面积 S 表示成 x（$0\leqslant x\leqslant 3$）的函数.

第二章 极限与连续

极限理论是微积分的理论基础，微积分的重要概念几乎都是通过极限定义的. 本章将介绍极限的概念、性质与运算，以及连续性的概念与性质.

第一节 极限的概念与性质

1. 数列的极限

按照一定顺序排列起来的无穷多个数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

称为**数列**. 其中第 n 项 x_n 称为一般项或通项. 数列可简记为 $\{x_n\}$.

例如，$\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{n}\right\}=1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots, \dfrac{1}{n}, \cdots$

$$\{x_n\}=\{2+(-1)^n\}=1, 3, 1, 3, \cdots$$

$$\{x_n\}=\{n^2\}=1, 4, 9, \cdots, n^2, \cdots$$

都是数列.

设函数 $y=f(x)$，则 $\{f(n)\}$ 也是一数列.

有些数列当 n 无限增大时，可以无限地趋于某个常数.

例 1 考察下列数列的变化趋势.

(1) $\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$； (2) $\{x_n\}=\left\{1-\dfrac{1}{n}\right\}$；

(3) $\{x_n\}=\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{n}\right\}$.

解 (1) $\{x_n\}=1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots, \dfrac{1}{n}, \cdots$ 的图形为图 2-1，可以看出，当 n 无限增大时，$\{x_n\}$ 的一般项无限地接近于 0.

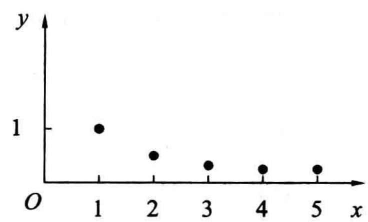

图 2-1

(2) $\{x_n\}=0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \cdots$ 的图形为图 2-2，可以看出，当 n 无限增大时，$\{x_n\}$ 的一般项无限地接近于 1.